ディスクリプタ表現を利用した倒立振子システムの非線形 $\mathcal{H}_\infty$ 制御†

川 田 昌 克*・井 上 和 夫**

Nonlinear $\mathcal{H}_\infty$ Control for an Inverted Pendulum System Using Descriptor Representation†

Masakatsu KAWATA* and Kazuo INOUE**

In this paper, a design method of the nonlinear $\mathcal{H}_\infty$ state feedback is proposed for a nonlinear descriptor model of an inverted pendulum system. First, the nonlinear descriptor model of a polynomial type with structural uncertainties for the inverted pendulum system introduced. The descriptor variables of this model include not only state variables but also the time derivative of state variables. Next, a state-dependent matrix inequality condition, which is can be transferred to the finite number of linear matrix inequalities, for the nonlinear robust $\mathcal{H}_\infty$ control problem and the eigenvalue location problem is given. The validity of the proposed nonlinear $\mathcal{H}_\infty$ control is shown through experiments as compared with the other nonlinear $\mathcal{H}_\infty$ control.

Key Words: nonlinear $\mathcal{H}_\infty$ control, eigenvalue location, descriptor form, linear matrix inequality, inverted pendulum

1. はじめに

ディスクリプタ方程式は多くのシステムでその物理構造を適切に表すことができるため、これまでにディスクリプタシステムに対する各種制御問題が考察されている。従来、ディスクリプタ変数を状態変数 x とし、 $\dot{x}$ の係数行列の正則性を仮定することが多かったが^{1)~3)}、近年、ディスクリプタ形式の柔軟性を利用したゲインスケジュールド $\mathcal{H}_\infty$ 制御⁴⁾、2次安定化制御^{5), 6)}、コスト保証制御⁷⁾などの設計法が提案されている。これら設計法では、たとえばスケジューリングパラメータ (あるいは不確かなパラメータ) p に依存した

$$E(p)\dot{x} = A(p)x + Bu$$

が与えられたとき ($E(p)$, $A(p)$ は p に関して有限のべき級数)、ディスクリプタ形式の柔軟性を利用して

$$E^\# \dot{\xi} = A^\#(p)\xi + B^\#u$$

のように変換することにより、 p をディスクリプタ変数 ξ の係数行列 $A^\#(p)$ に集約しており、保守性の軽減に有効である。このとき、一般に $E^\#$ は非正則となるが、増淵ら^{8), 9)} や上里ら⁶⁾ が示した結果を利用すれば、可解条件として線形行

列不等式 (LMI; linear matrix inequality) が得られる。特に、上里らの結果を用いると $E^\#$ の構造に依存せずに等式制約のない LMI 条件となり、既存のソフトウェアを用いて容易に解が得られるため汎用性が高い。

本論文で対象とする倒立振子システムの数学モデルは、非線形ディスクリプタ方程式で適切に表すことができ、ディスクリプタ形式を利用した設計法が有効であると考えられる。そこで、本論文では、ディスクリプタ表現を利用した非線形 $\mathcal{H}_\infty$ 状態フィードバックを設計し、実機実験によりその有効性を検証することを目的とする。

本論文では、まず、倒立振子システムの非線形ディスクリプタ方程式における係数行列が状態変数 x に関して有限のべき級数で表されていないため、係数行列を $x = 0$ で Taylor 級数展開し、状態変数 x に関して有限のべき級数と構造的な不確かさの和で表す。つぎに、構造的な不確かさを考慮したゲインスケジューリング^{10), 11)}の考え方にに基づき、ディスクリプタ変数を x のみとしたディスクリプタ形式の一般化制御対象を構成し、非線形 $\mathcal{H}_\infty$ 制御問題の可解条件を状態に依存した線形行列不等式 (sLMI; state-dependent linear matrix inequality) で表すことを提案する¹²⁾。得られる sLMI 条件は有限個の LMI に帰着可能であるため、既存のソフトウェアを利用して容易に解を得ることができ、解析解を求めることが困難な Hamilton-Jacobi 方程式 (不等式) に基づく設計法^{13), 14)}よりも実用的である。また、非線形 $\mathcal{H}_\infty$ 制御問題のみを考えて設計すると、状態フィードバックゲインが過大となる傾向があるが、線形システムの極配置問題²⁾に相当する固有値指定問題も制御仕様として考えることによって、この問題点を回避できる。しかしながら、倒立振子システムの

† 第 28 回制御理論シンポジウムで発表 (1999・5)

* 舞鶴工業高等専門学校電子制御工学科 舞鶴市宇白屋 234

** 立命館大学理工学部 草津市野路東 1-1-1

* Department of Control Engineering, Maizuru National College of Technology, Maizuru

** Faculty of Science and Engineering, Ritsumeikan University, Kusatsu

(Received January 11, 1999)

(Revised March 29, 2000)

場合、ディスクリプタ変数 x の時間微分 $\dot{x}$ の係数行列が x に依存しているため、sLMI を有限個の LMI で置き換えたときに生じる保守性や評価出力における構造的な不確かさを見積もる際の保守性に関する対処が十分ではない¹⁵⁾。

そこで、つぎに、ディスクリプタ形式の柔軟性を積極的に利用し、状態変数 x だけでなくその時間微分 $\dot{x}$ もディスクリプタ変数に含め⁴⁾、保守性を軽減することを提案する¹⁵⁾。その際、上里らの結果を用いても円内への固有値指定問題の可解条件に現れる等式制約を取り除くことができないため、この問題点の対処法について議論する。また、非線形 $\mathcal{H}_\infty$ 制御問題と固有値指定問題の複数仕様をできるだけ保守性なく満足させるための sLMI の解の構造についても考察する。

最後に、実験により Hamilton-Jacobi 方程式 (不等式) の近似解に基づく設計法^{16), 17)} との比較を行い、本論文で提案する設計法の有効性を示す。

以下に本論文で用いる記号の説明を行う¹⁴⁾。正方形列 A に対して $\text{He}[A] := A + A^T$ と定義し、対称行列を

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & * \\ B^T & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ * & C \end{bmatrix}$$

のように表す。また、 $x \in \mathcal{R}^n$ が $\int_{t_0}^{\infty} \|x\|^2 dt < \infty$ であるとき $x \in \mathcal{L}_2$ と表し、 x の $\mathcal{L}_2$ ノルムは $x \in \mathcal{L}_2$ に対して

$$\|x\|_2 = \left(\int_{t_0}^{\infty} \|x\|^2 dt \right)^{1/2}$$

と定義される。有界な関数全体を $\mathcal{L}_\infty$ と表し、特に $\sup_t \|x\| \leq c$ (c は正定数) であるとき、 $x \in \mathcal{L}_\infty^c$ と表す。

2. 問題設定

2.1 倒立振り子システムの数学モデル

Fig. 1 に示す倒立振り子システムの数学モデルは、

$$\overline{M}\ddot{r} + (m\ell \cos \theta)\ddot{\theta} = -\mu_1 \dot{r} + m\ell \dot{\theta}^2 \sin \theta + k_f v \quad (1)$$

$$(m\ell \cos \theta)\ddot{r} + \overline{J}\ddot{\theta} = -\mu_2 \dot{\theta} + m\ell g \sin \theta \quad (2)$$

で与えられる。ただし、 $\overline{M} = M + m$ 、 $\overline{J} = J + m\ell^2$ であり、 r [m]: 台車の変位、 θ [rad]: 振り子の角度、 v [V]: ドライバに加える電圧、 $M = 0.338$ [kg]: 台車の質量、 $m = 0.102$ [kg]: 振り子の質量、 $\ell = 0.158$ [m]: 軸から振り子の重心までの距離、 $J = 1.76 \times 10^{-3}$ [kg·m²]: 振り子の重心まわりの慣性モーメント、 $\mu_1 = 5.92$ [kg/s]: 台車駆

動系の等価粘性摩擦係数、 $\mu_2 = 3.86 \times 10^{-4}$ [kg·m²/s]: 軸の粘性摩擦係数、 $k_f = 3.07$ [N/V]: 力/電圧変換係数、 $g = 9.81$ [m/s²]: 重力加速度を表す。したがって、状態変数を $x_p := [r \ \dot{r} \ \theta \ \dot{\theta}]^T$ 、操作量を $u_p := v$ とすると、システムの構造を適切に表した以下の非線形ディスクリプタ方程式が得られる¹²⁾。

$$\mathcal{P}: E_p(x_p)\dot{x}_p = A_p(x_p)x_p + B_p u_p \quad (3)$$

$$E_p(x_p) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \overline{M} & 0 & m\ell \cos \theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & m\ell \cos \theta & 0 & \overline{J} \end{bmatrix}$$

$$A_p(x_p) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu_1 & m\ell \dot{\theta}^2 \frac{\sin \theta}{\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & m\ell g \frac{\sin \theta}{\theta} & -\mu_2 \end{bmatrix}$$

$$B_p = [0 \ k_f \ 0 \ 0]^T$$

2.2 一般化制御対象の構成

倒立振り子システムの非線形サーボ制御を実現するため、Fig. 2 に示す拡大系を考える¹⁷⁾。ただし、重み関数は

$$W_t(p) = b_{t0} + b_{t1}p + b_{t2}p^2, \quad W_s(p) = \frac{b_s}{p} \quad (4)$$

であり、 $p := d/dt$ は微分演算子である。 r^{ref} を r の目標値とすると、評価出力 $\bar{z} := [\bar{z}_1 \ \bar{z}_2]^T$ は

$$\bar{z}_1 = W_t(p)r = C_{t0}x_p + C_{t1}\dot{x}_p \quad (5)$$

$$\bar{z}_2 = W_s(p)(r^{ref} - r) = b_s x_s \quad (6)$$

$$C_{t0} = [b_{t0} \ b_{t1} \ 0 \ 0], \quad C_{t1} = [0 \ b_{t2} \ 0 \ 0]$$

$$x_s = \int_0^t (r^{ref} - C_{p1}x_p)dt, \quad C_{p1} = [1 \ 0 \ 0 \ 0]$$

となるから、状態変数、操作量、外生信号をそれぞれ $x := [x_1 \ \dots \ x_5]^T = [x_p^T \ x_s]^T$ 、 $u := u_p$ 、 $\bar{w} := r^{ref}$ と定義すると、一般化制御対象は次式で与えられる。

$$\bar{\mathcal{S}}: \begin{cases} \overline{E}_N(x)\dot{x} = \overline{A}_N(x)x + \overline{B}_1\bar{w} + \overline{B}_2u \\ \bar{z} = \overline{C}_{10}x + \overline{C}_{11}\dot{x} \\ y = x \end{cases} \quad (7)$$

$$\overline{E}_N(x) = \begin{bmatrix} E_p(x_p) & \mathbf{o} \\ \mathbf{o} & 1 \end{bmatrix}$$

Fig. 1 Inverted pendulum system

Fig. 2 Nonlinear servo system

$$\widehat{M}_E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\delta_{11}(\bar{x}_3)}{n_{11}} & \frac{\delta_{12}(\bar{x}_3)}{n_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\delta_{21}(\bar{x}_3)}{n_{21}} & \frac{\delta_{22}(\bar{x}_3)}{n_{22}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\widehat{\Sigma}_E(x) = \text{diag} \left\{ \frac{\delta_{11}(x_3)}{\delta_{11}(\bar{x}_3)}, \frac{\delta_{12}(x_3)}{\delta_{12}(\bar{x}_3)}, \frac{\delta_{21}(x_3)}{\delta_{21}(\bar{x}_3)}, \frac{\delta_{22}(x_3)}{\delta_{22}(\bar{x}_3)} \right\}$$

$$\widehat{N}_E = \begin{bmatrix} 0 & n_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n_{12} & 0 \\ 0 & n_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n_{22} & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\delta_3(\bar{x}_3, \bar{x}_4)}{n_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\delta_4(\bar{x}_3)}{n_4} & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$\Sigma_A(x) = \text{diag} \left\{ \frac{\delta_3(x_3, x_4)}{\delta_3(\bar{x}_3, \bar{x}_4)}, \frac{\delta_4(x_3)}{\delta_4(\bar{x}_3)} \right\}$$

$$N_A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & n_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n_4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

のようにノルム有界型で表す¹²⁾ (n_{ij} , n_k は正数). なお, $\Delta \bar{E}(x)$ ではなく $\Delta \bar{E}(x) \bar{E}^{-1}(x)$ をノルム有界型で表したの
は, 後述の sLMI を x に関する有限のべき級数とするため
である. このとき, 評価出力 z , 外生信号 w をそれぞれ

$$z = V_z^{-1/2} \begin{bmatrix} \bar{z} \\ \tilde{z} \end{bmatrix}, \quad w = V_w^{-1/2} \begin{bmatrix} \bar{w} \\ \tilde{w} \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$\tilde{z} = \gamma \begin{bmatrix} \widehat{N}_E \bar{E}(x) \dot{x} \\ N_A x \end{bmatrix}, \quad \tilde{w} = \begin{bmatrix} \widehat{\Sigma}_E(x) \widehat{N}_E \bar{E}(x) \dot{x} \\ \Sigma_A(x) N_A x \end{bmatrix}$$

$$V_z = \text{blockdiag} \{ I_2, \tilde{V}_E, \tilde{V}_A \}$$

$$V_w = \text{blockdiag} \{ 1, \tilde{V}_E, \tilde{V}_A \}$$

$$\tilde{V}_E = \text{diag} \{ \tilde{v}_{11}, \tilde{v}_{12}, \tilde{v}_{21}, \tilde{v}_{22} \} > 0$$

$$\tilde{V}_A = \text{diag} \{ \tilde{v}_3, \tilde{v}_4 \} > 0$$

とした非線形システム

$$S: \begin{cases} E(x) \dot{x} = A(x)x + B_1 V_w^{1/2} w + B_2 u \\ V_z^{1/2} z = C_1(x)x + D_{11} V_w^{1/2} w + D_{12} u \end{cases} \quad (15)$$

$$E(x) = \bar{E}(x), \quad A(x) = \bar{A}(x)$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} \bar{B}_1 & -\widehat{M}_E & M_A \end{bmatrix}, \quad B_2 = \bar{B}_2$$

$$C_1(x) = \begin{bmatrix} \bar{C}_{10}^T & (\gamma \widehat{N}_E \bar{A}(x))^T & (\gamma N_A)^T \end{bmatrix}^T$$

$$D_{11} = \begin{bmatrix} O_{2 \times 1} & O_{2 \times 4} & O_{2 \times 2} \\ \gamma \widehat{N}_E \bar{B}_1 & -\gamma \widehat{N}_E \widehat{M}_E & \gamma \widehat{N}_E M_A \\ O_{2 \times 1} & O_{2 \times 4} & O_{2 \times 2} \end{bmatrix}$$

$$D_{12} = \begin{bmatrix} O_{2 \times 1}^T & (\gamma \widehat{N}_E \bar{B}_2)^T & O_{2 \times 1}^T \end{bmatrix}^T$$

に対する $\mathcal{L}_2$ ゲイン条件を考えることによって, (11) 式で表
される $\bar{S}$ に対する非線形ロバスト $\mathcal{H}_\infty$ 制御問題の可解条件

が得られる. 以下に文献 12) で示した結果を sLMI の解が
 x に依存した場合に拡張した定理を示す.

《定理 1》 正数 γ が与えられ, 領域 $\mathcal{U}$ で sLMI

$$Q_{\mathcal{L}_2}(x) := \begin{bmatrix} -\text{He}[\Theta_{\mathcal{L}_2}(x)] + E(x)\Phi(x)E^T(x) \\ V_w B_1^T \\ (C_1(x)\Phi(x) + D_{12}Z(x))E^T(x) \\ \star & \star \\ \gamma^2 V_w & \star \\ -D_{11}V_w & V_z \end{bmatrix} > 0 \quad (16)$$

$$\Theta_{\mathcal{L}_2}(x) = (A(x)\Phi(x) + B_2Z(x))E^T(x)$$

を満足する $\Phi(x) = \Phi^T(x) > 0$, $\tilde{V}_E > 0$, $\tilde{V}_A > 0$, $Z(x)$
が存在するとき, $K(x) = Z(x)\Phi(x)^{-1}$ は (11) 式で表され
る $\bar{S}$ に対する非線形ロバスト $\mathcal{H}_\infty$ 制御問題の解である.

(証明) 付録 A を参照のこと. $\square$

3.2 円内への固有値指定問題の可解条件

文献 2) で示されている不確かなパラメータに依存した線
形システムに対する極配置問題の可解条件を利用すると, 円
内への固有値指定問題の可解条件は以下のようになる.

《定理 2》 円の中心 $(q, 0)$, 半径 r が与えられたとき, sLMI

$$Q_{eig}(x) := \begin{bmatrix} q\text{He}[\Theta_{eig}(x)] + d\bar{E}(x)\Phi(x)\bar{E}^T(x) \\ \Theta_{eig}^T(x) \\ \star \\ \bar{E}(x)\Phi(x)\bar{E}^T(x) \end{bmatrix} > 0 \quad (17)$$

$$\Theta_{eig}(x) := (\bar{A}(x)\Phi(x) + \bar{B}_2Z(x))\bar{E}^T(x)$$

を満足する $\Phi(x) = \Phi^T(x) > 0$ および $Z(x)$ が領域 $\mathcal{U}$ で存
在するとき, $K(x) = Z(x)\Phi^{-1}(x)$ は非線形システム $\bar{S}$ に
対する中心 $(q, 0)$, 半径 r の円内への固有値指定問題を満足
する. ただし $d = r^2 - q^2$ である. $\square$

3.3 ディスクリプタ表現の柔軟性を利用しない場合の問題点

定理 1, 2 で示した結果では, 以下のような問題がある.

問題点 1 $\bar{C}_{11} \neq 0$ ($b_{t2} \neq 0$) のとき, (8) 式の評価出力
 $\bar{z}$ は $\bar{E}_N^{-1}(x)$ を含むため, $\bar{C}_{1N}(x) = \bar{C}_1(x) + \Delta \bar{C}_1(x)$,
 $\bar{D}_{12N}(x) = \bar{D}_{12}(x) + \Delta \bar{D}_{12}(x)$ と表したときの $\Delta \bar{C}_1(x)$,
 $\Delta \bar{D}_{12}(x)$ をノルム有界型で表すと見積りりが保守的になる.

問題点 2 $\Delta \bar{E}(x)$ ではなく $\Delta \bar{E}(x)\bar{E}^{-1}(x)$ をノルム有界
型で表しているため, 線形ロバスト $\mathcal{H}_\infty$ 制御問題を考えた
場合¹⁾と比べて構造的な不確かさに起因する外生信号 $\tilde{w}$,
評価出力 $\tilde{z}$ の数が増える.

問題点 3 $\Phi(x)$, $Z(x)$ を

$$\Phi(x) = \Phi_{(0)}, \quad Z(x) = Z_{(0)} + x_3^2 Z_{(33)} \quad (18)$$

という単純な形式としても $\bar{E}(x)$ が x_3^2 に依存しているた
め, sLMI (16), (17) 式は

$$\text{blockdiag} \{ \Phi(x), \tilde{V}_A, \tilde{V}_E, Q_{\mathcal{L}_2}(x), Q_{eig}(x) \} \\ = Q_{(0)} + x_3^2 Q_{(33)} + x_4^2 Q_{(44)}$$

$$+x_3^4 Q_{(3333)} + x_3^2 x_4^2 Q_{(3344)} > 0 \quad (19)$$

のように x_3^2 に関して 2 次, x_4^2 に関して 1 次となる。そのため, 変動 $\mathcal{T}_3 = \{(x_3^2, x_4^2) \mid |x_3| \leq \bar{x}_3\}$, $\mathcal{T}_4 = \{x_4^2 \mid |x_4| \leq \bar{x}_4\}$ を囲う凸多面体 $\mathcal{H}_3$, $\mathcal{H}_4$ の頂点で (19) 式における (x_3^2, x_4^2, x_4^2) を置き換えた LMI を解けばよいが^{10), 12)}, $\mathcal{T}_3$ は曲線であるため $\mathcal{T}_3$ を保守性なく $\mathcal{H}_3$ で囲うことができない。

このように, ディスクリプタ変数 (状態変数) の時間微分 $\dot{x}$ の係数行列 $\bar{E}(x)$ が x_3^2 に依存しているため, 定理 1, 2 に示した結果を用いると保守的になる³⁾。

4. ディスクリプタ表現の柔軟性を利用した可解条件

4.1 $\dot{x}$ をディスクリプタ変数とした場合の $\bar{S}$

ここでは, 3.3 で述べた柔軟性を利用しない場合の問題点に対処するため, ディスクリプタ表現の柔軟性を利用し, ディスクリプタ変数 ξ の時間微分 $\dot{\xi}$ の係数行列 $\bar{E}^\sharp$ が x に依存しないような変換を行う^{4), 5), 15)}。

ディスクリプタ変数を

$$\xi = [x^T \quad \dot{x}^T]^T \quad (20)$$

と定義し, (11), (10) 式で表される $\bar{S}$, $\mathcal{K}$ を書き換えると,

$$\bar{S}: \begin{cases} \bar{E}^\sharp \dot{\xi} = (\bar{A}^\sharp(x) + \Delta \bar{A}^\sharp(x))\xi \\ \quad + \bar{B}_1^\sharp \bar{w} + \bar{B}_2^\sharp u \\ \bar{z} = \bar{C}_1^\sharp \xi \\ y = x \end{cases} \quad (21)$$

$$\mathcal{K}: u = K^\sharp(x)\xi \quad (22)$$

$$\bar{E}^\sharp = \begin{bmatrix} I_5 & O_{5 \times 5} \\ O_{5 \times 5} & O_{5 \times 5} \end{bmatrix}$$

$$\bar{A}^\sharp(x) = \begin{bmatrix} O_{5 \times 5} & I_5 \\ \bar{A}(x) & -\bar{E}(x) \end{bmatrix}$$

$$\Delta \bar{A}^\sharp(x) = \begin{bmatrix} O_{5 \times 5} & O_{5 \times 5} \\ \Delta \bar{A}(x) & -\Delta \bar{E}(x) \end{bmatrix}$$

$$\bar{B}_1^\sharp = \begin{bmatrix} O_{5 \times 1} \\ \bar{B}_1 \end{bmatrix}, \bar{B}_2^\sharp = \begin{bmatrix} O_{5 \times 1} \\ \bar{B}_2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{C}_1^\sharp = [\bar{C}_{10} \quad \bar{C}_{11}], K^\sharp(x) = [K(x) \quad O_{1 \times 5}]$$

となる。このとき, ディスクリプタ変数の時間微分 $\dot{\xi}$ の係数行列 $\bar{E}^\sharp$ は定数行列となる。さらに, 制御量 z を (8) 式のように x と u を用いて表す代わりに, (7) 式のように x と $\dot{x}$ を用いて表すことによって, 構造的な不確かさを陽に含まない $\bar{z} = \bar{C}_1^\sharp \xi$ という簡単な形式となり, 柔軟性を利用しない場合の問題点 1 に対処できる。

また, 実用的な $\mathcal{U}$ で $|\delta_i(x_3)| \leq |\delta_i(\bar{x}_3)|$ ($i = 1, 2, 4$), $|\delta_3(x_3, x_4)| \leq |\delta_3(\bar{x}_3, \bar{x}_4)|$ となることを考慮し, 柔軟性を利用しない場合の問題点 2 に対処するために $\Delta \bar{E}(x)$ を

$$\Delta \bar{E}(x) = M_E \Sigma_E(x) N_E \quad (23)$$

$$\Sigma_E^T(x) \Sigma_E(x) \leq I_2, \Sigma_A^T(x) \Sigma_A(x) \leq I_2 \quad (x \in \mathcal{U})$$

$$M_E = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\delta_1(\bar{x}_3)}{n_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\delta_2(\bar{x}_3)}{n_2} & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$\Sigma_E(x) = \text{diag} \left\{ \frac{\delta_1(x_3)}{\delta_1(\bar{x}_3)}, \frac{\delta_2(x_3)}{\delta_2(\bar{x}_3)} \right\}$$

$$N_E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & n_1 & 0 \\ 0 & n_2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

と表し, また, $\Delta \bar{A}(x)$ を (13) 式のようにノルム有界型で表すと, 構造的な不確かさ $\Delta \bar{A}^\sharp(x)$ は

$$\Delta \bar{A}^\sharp(x) = M_A^\sharp \Sigma_A^\sharp(x) N_A^\sharp, \Sigma_A^\sharp(x) \Sigma_A^\sharp(x) \leq I_4$$

$$M_A^\sharp = \begin{bmatrix} O_{5 \times 2} & O_{5 \times 2} \\ M_A & -M_E \end{bmatrix}$$

$$\Sigma_A^\sharp(x) = \text{blockdiag} \{ \Sigma_A(x), \Sigma_E(x) \}$$

$$N_A^\sharp = \begin{bmatrix} N_A & O_{2 \times 5} \\ O_{2 \times 5} & N_E \end{bmatrix}$$

と表される。ただし, n_i ($i = 1, \dots, 4$) は適当な正数である。

4.2 非線形ロバスト $\mathcal{H}_\infty$ 制御問題の可解条件

構造的な不確かさ $\Delta \bar{E}(x)$, $\Delta \bar{A}(x)$ に起因する外生信号を $\tilde{w}^\sharp = \Sigma_A^\sharp(x) N_A^\sharp \xi$ とおくと, (21) 式より

$$\bar{E}^\sharp \dot{\xi} = \bar{A}^\sharp(x)\xi + [\bar{B}_1^\sharp \quad M_A^\sharp] \begin{bmatrix} \bar{w} \\ \tilde{w}^\sharp \end{bmatrix} + \bar{B}_2^\sharp u \quad (24)$$

となる。したがって, 領域 $\mathcal{U}$ において $\tilde{w}^\sharp$ から評価出力 $\tilde{z}^\sharp = \gamma N_A^\sharp \xi$ までの $\mathcal{L}_2$ ゲインを γ 以下にするような $\mathcal{K}$ は構造的な不確かさ $\Delta \bar{E}(x)$, $\Delta \bar{A}(x)$ と無関係に $\bar{S}$ を安定化すると考えられる。そこで, 評価出力 $z^\sharp$, 外生信号 $w^\sharp$ を

$$z^\sharp = S_z^{-1/2} \begin{bmatrix} \bar{z} \\ \tilde{z}^\sharp \end{bmatrix}, w^\sharp = S_w^{-1/2} \begin{bmatrix} \bar{w} \\ \tilde{w}^\sharp \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$S_z = \text{blockdiag} \{ I_2, \tilde{S}_A, \tilde{S}_E \}$$

$$S_w = \text{blockdiag} \{ 1, \tilde{S}_A, \tilde{S}_E \}$$

$$\tilde{S}_E = \text{diag} \{ \tilde{s}_1, \tilde{s}_2 \} > 0, \tilde{S}_A = \text{diag} \{ \tilde{s}_3, \tilde{s}_4 \} > 0$$

と定義すると, 以下の非線形システムが得られる。

$$S^\sharp: \begin{cases} E^\sharp \dot{\xi} = A^\sharp(x)\xi + B_1^\sharp S_w^{1/2} w^\sharp + B_2^\sharp u \\ S_z^{1/2} z^\sharp = C_1^\sharp \xi \\ y = x \end{cases} \quad (26)$$

$$E^\sharp = \bar{E}^\sharp, A^\sharp(x) = \bar{A}^\sharp(x)$$

$$B_1^\sharp = [\bar{B}_1^\sharp \quad M_A^\sharp], B_2^\sharp = \bar{B}_2^\sharp, C_1^\sharp = \begin{bmatrix} \bar{C}_1^\sharp \\ \gamma N_A^\sharp \end{bmatrix}$$

ただし, $\tilde{S}_A, \tilde{S}_E$ はスケーリング行列である。

文献 5), 8), 9) の結果を用いると, 以下の定理で示すように, 等式制約を含む sLMI が非線形ロバスト $\mathcal{H}_\infty$ 制御問題の可解条件として得られる。

《定理 3》 $S^\sharp$ および正数 γ が与えられ, 領域 $\mathcal{U}$ で sLMI

$$E^\sharp X_{\mathcal{L}_2}^T(x) = X_{\mathcal{L}_2}(x) E^\sharp{}^T \geq 0 \quad (27)$$

$$Q_{\mathcal{L}_2}^\#(x) := \begin{bmatrix} -\text{He}[\Theta_{\mathcal{L}_2}^\#(x)] + E^\# \dot{X}_{\mathcal{L}_2}^T(x) \\ S_w B_1^{\#T} \\ C_1^\# X_{\mathcal{L}_2}^T(x) \\ \star \quad \star \\ \gamma^2 S_w \quad \star \\ O_{6 \times 5} \quad S_z \end{bmatrix} > 0 \quad (28)$$

$$\Theta_{\mathcal{L}_2}^\#(x) = A^\#(x) X_{\mathcal{L}_2}^T(x) + B_2^\# Z^\#(x)$$

を満足する

$$X_{\mathcal{L}_2}(x) := \begin{bmatrix} X_1(x) & X_{\mathcal{L}_2 2}(x) \\ O_{5 \times 5} & X_{\mathcal{L}_2 4}(x) \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$Z^\#(x) := \begin{bmatrix} Z_1(x) & Z_2(x) \end{bmatrix} \quad (30)$$

および $\tilde{S}_A > 0$, $\tilde{S}_E > 0$ が存在するとする。ただし, $X_1(x)$, $X_{\mathcal{L}_2 2}(x)$, $X_{\mathcal{L}_2 4}(x) \in \mathcal{R}^{5 \times 5}$, $Z_1(x)$, $Z_2(x) \in \mathcal{R}^5$ であり, $X_1(x) = X_1^T(x) > 0$, $X_{\mathcal{L}_2 4}(x)$: 正則行列である。このとき, 非線形状態フィードバック

$$\mathcal{K}: u = K^\#(x)\xi, K^\#(x) := Z^\#(x)X_{\mathcal{L}_2}^{-T}(x) \quad (31)$$

は $\bar{\mathcal{S}}$ に対する非線形ロバスト $\mathcal{H}_\infty$ 制御問題の解である。また, sLMI (27), (28) 式を満足する $Z^\#(x)$ の構造を特に

$$Z^\#(x) := \begin{bmatrix} Z_1(x) & O_{1 \times 5} \end{bmatrix} \quad (32)$$

と限定すれば, 非線形状態フィードバックは

$$\mathcal{K}: u = K(x)x, K(x) := Z_1(x)X_1^{-1}(x) \quad (33)$$

のように x のみに依存し, (22) 式の構造となる。

(証明) 付録 B を参照のこと。□

(注意 1) $X_{\mathcal{L}_2}(x)$ が非正則の場合, (28) 式の成立を損なわない範囲で $X_{\mathcal{L}_2}(x)$ を $X_{\mathcal{L}_2}(x) + \varepsilon I$ (ε : 微小な正数) のように微小変動させることにより, $X_{\mathcal{L}_2}(x) + \varepsilon I$ を正則にすることができる^{8), 9)}。また, $X_{\mathcal{L}_2}(x)$ を $X_{\mathcal{L}_2}(x) + \varepsilon I$ で置き換えても (27) 式が成立する。そのため定理 3 では, 一般性を失うことなく $X_{\mathcal{L}_2}(x)$ が正則であるとした。

(注意 2) (27) 式には等式制約が含まれているため, このままでは MATLAB の LMI Toolbox を利用して厳密な解を求めることは困難であるが, 付録 B に示すように, $E^\#$ の構造に注意すると, (27) 式をこれと等価な等式制約のない $X_1(x) = X_1^T(x) > 0$ で置き換えることができる。

(注意 3) 上里ら⁶⁾は $X_{\mathcal{L}_2}(x) = E^\# P^T(x) + U S^T V^T$ ($P(x) = P^T(x) > 0$, S : 正則行列, U, V : $\text{Null} E^\#$ の基底からなる行列) とすれば (27) 式の等式制約を取り除くことができ, $Z^\#(x) = L(x)E^{\#T}$ という形式に限定すれば $\mathcal{K}$ が x のみに依存することを示している。(26) 式の構造である場合, $X_{\mathcal{L}_2}(x)$, $Z^\#(x)$ の形式は本論文で得られた結果と本質的に等価である。

4.3 円内への固有値指定問題の可解条件

非線形 $\mathcal{H}_\infty$ 制御問題の可解条件を考慮すると, 円内への固有値指定問題の場合も (17) 式における $\Theta_{\text{eig}}(x)$, $\bar{E}(x)\Phi(x)\bar{E}^T$ をそれぞれ $\Theta_{\text{eig}}^\#(x) := \bar{A}^\#(x)X_{\text{eig}}^T(x) + \bar{B}_2^\# Z_{\text{eig}}^\#(x)$,

$$\bar{E}^\# X_{\text{eig}}^T(x) = X_{\text{eig}}(x)\bar{E}^{\#T} \geq 0 \quad (34)$$

で置き換えた sLMI

$$\begin{bmatrix} q\text{He}[\Theta_{\text{eig}}^\#(x)] + d\bar{E}^\# X_{\text{eig}}^T(x) & \star \\ \Theta_{\text{eig}}^{\#T}(x) & \bar{E}^\# X_{\text{eig}}^T(x) \end{bmatrix} \geq 0 \quad (35)$$

が可解条件であると考えられる。ただし, $d = r^2 - q^2$ である。なお, (17) 式と異なり (35) 式に等式制約がついているのは, (35) 式の (2, 2) ブロックである $\bar{E}^\# X_{\text{eig}}^T(x)$ が半正定行列であることを考慮したためである。実際, 円内への固有値指定問題の可解条件は以下の定理で与えられる。

《定理 4》 円の中心 $(q, 0)$, 半径 r が与えられたとき, sLMI (34), (35) 式を満足する

$$X_{\text{eig}}(x) := \begin{bmatrix} X_{\text{eig}1}(x) & X_{\text{eig}2}(x) \\ O_{5 \times 5} & X_{\text{eig}4}(x) \end{bmatrix} \quad (36)$$

$$Z_{\text{eig}}^\#(x) := \begin{bmatrix} Z_{\text{eig}1}(x) & Z_{\text{eig}2}(x) \end{bmatrix} \quad (37)$$

が領域 $\mathcal{U}$ で存在するとする。ただし, $X_{\text{eig}1}(x)$, $X_{\text{eig}2}(x)$, $X_{\text{eig}4}(x) \in \mathcal{R}^{5 \times 5}$, $Z_{\text{eig}1}(x)$, $Z_{\text{eig}2}(x) \in \mathcal{R}^5$ であり, $X_{\text{eig}1}(x) = X_{\text{eig}1}^T(x) > 0$, $X_{\text{eig}4}(x)$: 正則行列である。このとき, 非線形状態フィードバック

$$\mathcal{K}: u = K^\#(x)\xi, K^\#(x) := Z_{\text{eig}}^\#(x)X_{\text{eig}}^{-T}(x) \quad (38)$$

は領域 $\mathcal{U}$ でディスクリプタ変数を (20) 式としたシステム (21) 式に対する特性方程式

$$\det[\lambda \bar{E}^\# - (\bar{A}^\#(x) + \bar{B}_2^\# K^\#(x))] = 0 \quad (39)$$

の根 $\lambda = \alpha + j\beta$ を中心 $(q, 0)$, 半径 r の円内に配置する。また, sLMI (34), (35) 式を満足する $Z_{\text{eig}}^\#(x)$ の構造を特に

$$Z_{\text{eig}}^\#(x) := \begin{bmatrix} Z_{\text{eig}1}(x) & O_{1 \times 5} \end{bmatrix} \quad (40)$$

と限定すれば, 非線形状態フィードバックは

$$\mathcal{K}: u = K(x)x, K(x) := Z_{\text{eig}1}(x)X_{\text{eig}1}^{-1}(x) \quad (41)$$

のように x のみに依存した (22) 式の構造となり, 領域 $\mathcal{U}$ で元のシステム (11) 式に対する特性方程式 (12) 式の根 $\lambda = \alpha + j\beta$ を中心 $(q, 0)$, 半径 r の円内に配置する。

(証明) 付録 C を参照のこと。□

(注意 1) 定理 3 の注意 1 で述べた理由により, 定理 4 では一般性を失うことなく $X_{\text{eig}}(x)$ が正則であるとした。

(注意 2) $Z^\#(x)$, $Z_{\text{eig}}^\#(x)$ の構造をそれぞれ (32), (40) 式に限定すると, 非線形 $\mathcal{H}_\infty$ 制御問題と円内への固有値指定問題を同時に満足する非線形状態フィードバックは (33), (41) 式より $Z_1(x)X_1^{-1}(x) = Z_{\text{eig}1}(x)X_{\text{eig}1}^{-1}(x)$ という制約を満足する必要がある。したがって, $X_{\text{eig}1}(x) = X_1(x)$, $Z_{\text{eig}1}(x) = Z_1(x)$ とすれば, 単に $X_{\text{eig}}(x) = X_{\mathcal{L}_2}(x)$, $Z_{\text{eig}}^\#(x) = Z^\#(x)$ とするよりも解の保守性が軽減できる。定理 3 の注意 2 で述べたように, (34) 式はこれと等価な等式制約のない $X_{\text{eig}1}(x) = X_{\text{eig}1}^T(x) > 0$ で置き換えることができるが, $\bar{E}^\# X_{\text{eig}}^T(x)$ が半正定行列であるため, 上里らの結果⁶⁾を用いても (35) 式の等式制約を取り除くことは

できない。そこで、本論文では $\bar{E}^\#$ の構造を考慮し、(35) 式の等式制約を取り除いた以下の可解条件を提案する。

《定理 5》 円の中心 $(q, 0)$ ，半径 r が与えられたとき，sLMI

$$Q_{eig}^\#(x) := \begin{bmatrix} q\text{He}[\Theta_{eig}^\#(x)] + d\bar{E}^\# X_{eig}^T(x) \\ Q_{eig21}^\#(x) \\ \star \\ X_1(x) \end{bmatrix} > 0 \quad (42)$$

$$Q_{eig21}^\#(x) := \begin{bmatrix} O_{5 \times 5} & (\bar{A}(x)X_1(x) + \bar{B}_2 Z_1(x))^T \end{bmatrix}$$

を満足する

$$X_{eig}(x) := \begin{bmatrix} X_1(x) & X_{eig2}(x) \\ O_{5 \times 5} & X_{eig4}(x) \end{bmatrix} \quad (43)$$

$$Z_{eig}^\#(x) := \begin{bmatrix} Z_1(x) & O_{1 \times 5} \end{bmatrix} \quad (44)$$

が領域 $\mathcal{U}$ で存在するとする。ただし、 $X_1(x) = X_1^T(x) > 0$ ， $X_{eig4}(x)$ ：正則行列， $d = r^2 - q^2$ である。このとき、(33) 式は領域 $\mathcal{U}$ で特性方程式 (12) 式の根 $\lambda = \alpha + j\beta$ を中心 $(q, 0)$ ，半径 r の円内に配置する。

(証明) 付録 D を参照のこと。□

なお、定理 5 は定理 4 の注意 2 を考慮した結果となっていることに注意されたい。

4.4 有限個の LMI への帰着

4.2, 4.3 の結果より sLMI (28) 式および (42) 式を同時に満足する解 (29), (32), (43), (44) 式および $\tilde{S}_A > 0$ ， $\tilde{S}_E > 0$ を求めることができれば、非線形 $\mathcal{H}_\infty$ 制御問題、円内への固有値指定問題を同時に満足し、かつ x にのみ依存した非線形状態フィードバック (33) 式が得られる。

本論文では、sLMI (28), (42) 式を有限個の LMI に帰着してその解を求めるため、解 (29), (32), (43), (44) 式を

$$\begin{cases} X_1(x) = X_{1(0)} \\ X_{L22}(x) = X_{L22(0)}, X_{L24}(x) = X_{L24(0)} \\ X_{eig2}(x) = X_{eig2(0)}, X_{eig4}(x) = X_{eig4(0)} \\ Z_1(x) = Z_{1(0)} + x_3^2 Z_{1(33)} \end{cases} \quad (45)$$

という形式に選ぶ。なお、 $Z_1(x) = Z_{1(0)} + x_3^2 Z_{1(33)} + x_4^2 Z_{1(44)}$ のように $Z_1(x)$ を x_4^2 に依存させることも考えられるが、振子が台車に与える影響は十分小さいため、文献 12) で示したように $K_{(44)} = Z_{1(44)} X_{1(0)}^{-1}$ は $K_{(0)}$ ， $K_{(33)}$ と比べて無視できるほど小さくなる。そこで本論文では $Z_{1(44)} = O$ とした。また、 $X_1(x)$ を x_3^2 に依存させ、

$$X_1(x) = X_{1(0)} + x_3^2 X_{1(33)} \quad (46)$$

とすることも考えられる。この場合、 $X_1(x) = X_{1(0)}$ とした場合と比べて $\bar{x}_3$ を大きく見積もることが可能となるが、以下に示す理由で $X_1(x) = X_{1(0)}$ とした。

理由 1 $X_1(x)$ を (46) 式の形式とすると、 $\dot{X}_1(x) = 2x_3 x_4 X_{1(33)}$ であるから sLMI は

$$\begin{aligned} & \text{blockdiag}\{X_1(x), \tilde{S}_A, \tilde{S}_E, Q_{L2}^\#(x), Q_{eig}^\#(x)\} \\ & = Q_{(0)}^\# + x_3^2 Q_{(33)}^\# + x_3 x_4 Q_{(34)}^\# \end{aligned}$$

$$+ x_4^2 Q_{(44)}^\# + x_3^4 Q_{(3333)}^\# + x_3^2 x_4^2 Q_{(3344)}^\# > 0 \quad (47)$$

という形式となる。この場合、保守性が少なくなるように $\mathcal{T}_3 = \{(x_3, x_3^2, x_3^4) \mid |x_3| \leq \bar{x}_3\}$ を囲む凸多面体 $\mathcal{H}_3$ の頂点を決めると、頂点の数が増大し、有限個の LMI の解を求めるのに多大の時間を要する。

理由 2 $X_1(x)$ を (46) 式の形式とすると、 $K(x)$ は複雑な形式となり、実用的ではない。

さらに、 $X_{L22}(x)$ ， $X_{L24}(x)$ ， $X_{eig2}(x)$ ， $X_{eig4}(x)$ を定数行列としたのは、これらを x_3^2 に依存させると、(28)，(42) 式における $\Theta_{L2}^\#(x)$ ， $\Theta_{eig}^\#(x)$ が x_3^2 に関して 2 次となり、柔軟性を利用しない場合の問題点 3 に対処できないためである。

sLMI (28)，(42) 式の解を (45) 式の形式とすると、sLMI (28)，(42) 式は x_3^2 ， x_4^2 に関して 1 次の sLMI

$$\begin{aligned} Q_{(x_3^2, x_4^2)}^\# &:= \text{blockdiag}\{X_1(x), \tilde{S}_A, \tilde{S}_E, \\ & \quad Q_{L2}^\#(x), Q_{eig}^\#(x)\} \\ & = Q_{(0)}^\# + x_3^2 Q_{(33)}^\# + x_4^2 Q_{(44)}^\# > 0 \quad (48) \end{aligned}$$

となるため、柔軟性を利用しない場合の問題点 3 に対処できる。つまりこの場合、 $\mathcal{T}_i = \{x_i^2 \mid |x_i| \leq \bar{x}_i\}$ ($i = 3, 4$) を囲む凸多面体 $\mathcal{H}_i$ の頂点は保守性なく 0， $\bar{x}_i^2$ のように定まるため、(48) 式の解を求める代わりに 4 個の LMI

$$\begin{cases} Q_{(0)}^\#(0, 0) = Q_{(0)}^\# > 0 \\ Q_{(x_3^2, 0)}^\# = Q_{(0)}^\# + \bar{x}_3^2 Q_{(33)}^\# > 0 \\ Q_{(0, x_4^2)}^\# = Q_{(0)}^\# + \bar{x}_4^2 Q_{(44)}^\# > 0 \\ Q_{(x_3^2, x_4^2)}^\# = Q_{(0)}^\# + \bar{x}_3^2 Q_{(33)}^\# + \bar{x}_4^2 Q_{(44)}^\# > 0 \end{cases} \quad (49)$$

の共通解 (45) 式および $\tilde{S}_A$ ， $\tilde{S}_E$ を求めればよい¹⁵⁾。その結果、固有値指定条件付き非線形 $\mathcal{H}_\infty$ 状態フィードバック K が以下のように求まる。

$$\begin{aligned} \mathcal{K}: u &= (K_{(0)} + x_3^2 K_{(33)})x \\ K_{(0)} &= Z_{1(0)} X_{1(0)}^{-1}, K_{(33)} = Z_{1(33)} X_{1(0)}^{-1} \end{aligned} \quad (50)$$

5. 設計例および実験結果

5.1 実験の条件

本論文で提案した手法の有効性を検証するために、実機実験を行った。非線形状態フィードバックは、 $\gamma = 1$ ， $b_s = 1.1$ とし、3., 4. で提案した手法、文献 16) で示した Hamilton-Jacobi 方程式 (不等式) に基づく手法により設計した。ただし 3., 4. で提案した手法では、固有値指定の設計パラメータを $q = -12$ ， $r = 11.5$ とし、 n_{ij} および n_k を 0.001， $\bar{x}_4 = 7.5\bar{x}_3$ とし、LMI の解が求まる範囲で $\bar{x}_3$ をできるだけ大きくした。実験ではパラメータ変動に対するロバスト性を調べるため、同定で用いた全長が 0.4 [m] の振子の代わりに全長が 0.6 [m] のものを取り付け、初期状態 $x(0) = \mathbf{o}$ から振子を倒立させたまま台車の位置 r を台車の目標値 $r^{ref} = 1.8$ [m] に追従させた。

5.2 $W_t(p) = b_{t0} + b_{t1}p$ ($\bar{C}_{11} = \mathbf{o}$) の場合

重み関数を $W_t(p) = (p + 0.5)/5$ とした。3. で提案した手法では $\bar{x}_3 = 0.621$ 程度まで解が得られ^(注1)、固有値指定条件付き非線形 $\mathcal{H}_\infty$ 状態フィードバック $\mathcal{K}_{conv}$ は以下のようにになった。

$$\mathcal{K}_{conv}: u = (\mathbf{K}_{(0)} + x_3^2 \mathbf{K}_{(33)})x$$

$$\mathbf{K}_{(0)} = \begin{bmatrix} 6.73 & 4.87 & 9.30 & 1.51 & -7.77 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{(33)} = \begin{bmatrix} 14.8 & 6.36 & 20.1 & 3.48 & -17.2 \end{bmatrix}$$

それに対し、4. で提案した手法では $\bar{x}_3 = 0.652$ 程度まで解が得られ、ディスクリプタ形式の柔軟性を利用することによって保守性が軽減できた。なお、固有値指定条件付き非線形 $\mathcal{H}_\infty$ 状態フィードバック $\mathcal{K}$ は以下のようにになった。

$$\mathcal{K}: u = (\mathbf{K}_{(0)} + x_3^2 \mathbf{K}_{(33)})x$$

$$\mathbf{K}_{(0)} = \begin{bmatrix} 7.96 & 5.41 & 11.0 & 1.80 & -9.14 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{(33)} = \begin{bmatrix} 8.26 & 3.76 & 12.7 & 2.24 & -9.53 \end{bmatrix}$$

Fig. 3 の実験結果からわかるように、ディスクリプタ表現の柔軟性を利用した 4. で提案した手法の方が $\bar{x}_3$ を大きく見積もることができたため、台車の目標値 r^{ref} が大きく変化しても振動を抑えることができた。

Fig. 3 experiment results ($W_t(p) = b_{t0} + b_{t1}p$)

5.3 $W_t(p) = b_{t0} + b_{t1}p + b_{t2}p^2$ ($\bar{C}_{11} \neq \mathbf{o}$) の場合

重み関数を $W_t(p) = (p + 1.4)^2 / (10 \times 1.4^2)$ とした。比較のために文献 16) で提案した Hamilton-Jacobi 方程式の近似解法を用いて非線形 $\mathcal{H}_\infty$ 状態フィードバック $\mathcal{K}_{app}$ を設計すると、以下のようになった¹⁷⁾。

$$\mathcal{K}_{app}: u = (\mathbf{K}_{(0)} + x_3^2 \mathbf{K}_{(33)})x$$

$$\mathbf{K}_{(0)} = \begin{bmatrix} 6.30 & 4.71 & 8.93 & 1.43 & -7.46 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{(33)} = \begin{bmatrix} -4.94 & -2.04 & -0.220 & 0.526 & 6.50 \end{bmatrix}$$

また、4. で提案した手法では $\bar{x}_3 = 0.678$ 程度まで (48) 式の解が得られた。その結果、固有値指定条件付き非線形 $\mathcal{H}_\infty$ 状態フィードバック $\mathcal{K}$ は以下のようにになった。

$$\mathcal{K}: u = (\mathbf{K}_{(0)} + x_3^2 \mathbf{K}_{(33)})x$$

(注1) $\Phi(x)$, $Z(x)$ は (18) 式の形式とした。また、sMI (19) 式の $(x_3^2/\bar{x}_3^2, x_3^4/\bar{x}_3^4, x_4^2/\bar{x}_4^2)$ を $(0, 0, 0)$, $(1/4, 0, 0)$, $(3/4, 1/2, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(1/4, 0, 1)$, $(3/4, 1/2, 1)$, $(1, 1, 1)$ で置き換えた 8 個の LMI を解いた¹²⁾。

Fig. 4 experiment results ($W_t(p) = b_{t0} + b_{t1}p + b_{t2}p^2$)

$$\mathbf{K}_{(0)} = \begin{bmatrix} 6.38 & 4.79 & 9.62 & 1.57 & -7.40 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{(33)} = \begin{bmatrix} 7.54 & 3.69 & 11.9 & 2.11 & -8.81 \end{bmatrix}$$

Fig. 4 に示すように、文献 16) の手法では Hamilton-Jacobi 方程式の近似解に基づいているために持続振動を生じたが、4. で提案した手法では持続振動を生じていない。

6. おわりに

本論文では倒立振り子システムを対象とし、ディスクリプタ表現を利用した sLMI 条件に基づく固有値指定条件付き非線形 $\mathcal{H}_\infty$ 状態フィードバックの設計法を提案した。特に 4. ではディスクリプタ表現の柔軟性を利用した場合、

- (1) 非線形 $\mathcal{H}_\infty$ 制御問題における構造的な不確かさの見積もりに関する保守性を軽減できる
- (2) 円内への固有値指定問題の可解条件を等式制約のない sLMI 条件で表すことができる
- (3) 非線形 $\mathcal{H}_\infty$ 制御問題、円内への固有値指定問題の可解条件である sLMI を x に関する低次のべき級数で表せ、また、解の形式を限定することによって 2 つの制御問題を満足する保守性の少ない解が得られる

ことを示した。最後に、実験によって提案する設計法の有効性を確認した。

なお、ディスクリプタ変数を適切に選ぶ^{4), 5)} ことによって (21) 式の形式で表すことができるような非線形システムに対しては、倒立振り子システムの場合と同様、ディスクリプタ表現の柔軟性を利用した設計法が有効である考えられる。また、スケジューリングパラメータに依存したシステムの場合、定理 5 の結果を極配置問題の可解条件として利用できる。今後、他の実システムへの応用を検討していきたい。

最後に、本論文に対して貴重なご意見をいただいた査読者の方々に感謝の意を表します。

参考文献

- 1) 申, 田村: ディスクリプタ型モデルに基づく $\mathcal{H}_\infty$ ロバスト準最適制御, 計測自動制御学会論文集, **29**-12, 1486/1488 (1993)
- 2) 杉江, 濱本: LMI による 2 慣性共振系の制御, システム制御情報学会論文集, **9**-5, 219/226 (1996)
- 3) 陳, 杉江: パラメータ依存リアプノフ関数に基づくディスクリプタシステムのゲインスケジューリング, 計測自動制御学会論文集, **34**-9, 1159/1163 (1998)
- 4) 増淵, 示村: ディスクリプタ形式に基づくゲインスケジューリ

ング制御系設計, 第 26 回制御理論シンポジウム資料, 21/24 (1997)

- 5) 増淵, 示村: ゲインスケジューリング系の設計におけるディスクリプタ形式の利用について, システム制御情報学会論文誌, **12-7**, 390/394 (1999)
- 6) 上里, 池田: ディスクリプタシステムに対する等式条件を含まない LMI 安定条件とそのロバスト安定化への応用, 計測自動制御学会論文誌, **34-12**, 1854/1860 (1998)
- 7) 陳, 大西, 藤中, 柴田: ディスクリプタ形式を利用したコスト保証制御, 第 28 回制御理論シンポジウム資料, 289/292 (1999)
- 8) I. Masubuchi, Y. Kamitane, A. Ohara and N. Suda: Control for Descriptor Systems: A Matrix Inequalities Approach, Automatica, **33-4**, 669/673 (1997)
- 9) 増淵, 小原, 須田: 状態フィードバックによるディスクリプタシステムのロバスト安定化, 計測自動制御学会論文誌, **30-12**, 1553/1555 (1994)
- 10) 渡辺, 内田, 藤田: 有限個の LMI 条件に基づいたスケジューリングパラメータを持つ線形システムの解析, 第 24 回制御理論シンポジウム資料, 9/14 (1995)
- 11) 内田, 渡辺: ゲインスケジューリング — 適応/非線形制御への展開, システム/制御/情報, **42-6**, 306/311 (1998)
- 12) 川田, 島津, 井上: ディスクリプタ形式に基づく非線形 $\mathcal{H}_\infty$ 制御とその倒立振子システムへの応用, 第 21 回 Dynamical System Theory シンポジウム資料, 247/251 (1998)
- 13) A. J. van der Schaft: $\mathcal{L}_2$ -gain Analysis of Nonlinear Systems and Nonlinear State Feedback $\mathcal{H}_\infty$ Control, IEEE Trans. Automat. Contr., **AC-37-6**, 770/784 (1992)
- 14) J. Imura, T. Sugie and T. Yoshikawa: A Hamilton-Jacobi Inequality Approach to the Strict $\mathcal{H}_\infty$ Control Problem of Nonlinear Systems, Automatica, **32-4**, 645/650 (1996)
- 15) 川田, 島津, 井上: ディスクリプタ形式の表現能力を利用した非線形 $\mathcal{H}_\infty$ 制御とその倒立振子システムへの応用, 第 28 回制御理論シンポジウム資料, 257/262 (1999)
- 16) 川田, 島津, 井上: Hamilton-Jacobi 方程式に基づく非線形 $\mathcal{H}_\infty$ 制御の近似実現, システム制御情報学会論文誌, **11-7**, 401/410 (1998)
- 17) 川田, 島津, 井上: 倒立振子システムの非線形 $\mathcal{H}_\infty$ 状態フィードバック制御, 計測自動制御学会論文誌, **35-2**, 294/296 (1999)
- 18) 佐々木, 内田: 拡張 2 次形式リアプノフ関数による非線形状態フィードバックの構成法—線形行列不等式による凸解析アプローチ—, 計測自動制御学会論文誌, **33-11**, 1111/1113 (1997)

《付 録》

A. 定理 1 の証明

紙面の関係上, 略証のみ示す. 文献 12) の定理 3 では $\Phi(x)$ が定数行列 Φ である場合について示されているが, x に依存した $\Phi(x)$ の場合, $\Phi(x)\Phi^{-1}(x) = \Phi^{-1}(x)\Phi(x) = I$ より $\dot{\Phi}^{-1}(x) = -\Phi^{-1}(x)\dot{\Phi}(x)\Phi^{-1}(x)$ という関係式が成立することを利用すると, 文献 12) と同様に定理 1 を証明することができる.

B. 定理 3 の証明

(26) 式における $E^\sharp$ の構造を考慮すると, $E^\sharp X_{\mathcal{L}_2}^T(x) = X_{\mathcal{L}_2}(x)E^{\sharp T}$ となる

$$X_{\mathcal{L}_2}(x) = \begin{bmatrix} X_1(x) & X_{\mathcal{L}_{22}}(x) \\ X_{\mathcal{L}_{23}}(x) & X_{\mathcal{L}_{24}}(x) \end{bmatrix} \quad (\text{B.1})$$

は $X_1(x) = X_1^T(x)$, $X_{\mathcal{L}_{23}}(x) = O_{5 \times 5}$ でなければならず,

$X_{\mathcal{L}_2}(x)$ は必ず (29) 式の構造となる. このとき, $X_{\mathcal{L}_2}(x)$ が正則であるための条件は

$$\det X_{\mathcal{L}_2}(x) = \det X_1(x) \det X_{\mathcal{L}_{24}}(x) \neq 0 \quad (\text{B.2})$$

であるから, (27), (B.2) 式より $X_1(x) = X_1^T(x) > 0$ であり, $X_{\mathcal{L}_{24}}(x)$ は正則である.

つぎに, $A_{cl}^\sharp(x) := A^\sharp(x) + B_2^\sharp K^\sharp(x)$ として Schur complement により (28) 式を書き換えると,

$$\begin{aligned} & \text{He} [A_{cl}^\sharp(x) X_{\mathcal{L}_2}^T(x)] - E^\sharp \dot{X}_{\mathcal{L}_2}^T(x) + \frac{1}{\gamma^2} B_1^\sharp S_w B_1^{\sharp T} \\ & + X_{\mathcal{L}_2}(x) C_1^{\sharp T} S_z^{-1} C_1^\sharp X_{\mathcal{L}_2}^T(x) < 0 \quad (\text{B.3}) \end{aligned}$$

となる. ただし, (29) 式より $P_{\mathcal{L}_2}(x) := X_{\mathcal{L}_2}^{-T}(x)$ は

$$P_{\mathcal{L}_2}(x) = \begin{bmatrix} P_1(x) & O_{5 \times 5} \\ P_{\mathcal{L}_{23}}(x) & P_{\mathcal{L}_{24}}(x) \end{bmatrix} \quad (\text{B.4})$$

$$\begin{cases} P_1(x) := X_1^{-1}(x) \\ P_{\mathcal{L}_{23}}(x) := -X_{\mathcal{L}_{24}}^{-T}(x) X_{\mathcal{L}_{22}}^T(x) X_1^{-1}(x) \\ P_{\mathcal{L}_{24}}(x) := X_{\mathcal{L}_{24}}^{-T}(x) \end{cases}$$

である. また $X_1(x)X_1^{-1}(x) = X_1^{-1}(x)X_1(x) = I$ より

$$\dot{P}_1(x) = \dot{X}_1^{-1}(x) = -X_1^{-1}(x)\dot{X}_1(x)X_1^{-1}(x)$$

であるから,

$$P_{\mathcal{L}_2}^T(x) E^\sharp \dot{X}_{\mathcal{L}_2}(x) P_{\mathcal{L}_2}^T(x) = -\dot{P}_{\mathcal{L}_2}^T(x) E^\sharp$$

となる. したがって, (B.3) 式の左から $P_{\mathcal{L}_2}^T(x)$, 右から $P_{\mathcal{L}_2}(x)$ をかけると,

$$\begin{aligned} & \text{He} [P_{\mathcal{L}_2}^T(x) A_{cl}^\sharp(x)] + \dot{P}_{\mathcal{L}_2}^T(x) E^\sharp + C_1^{\sharp T} S_z^{-1} C_1^\sharp \\ & + \frac{1}{\gamma^2} P_{\mathcal{L}_2}^T(x) B_1^\sharp S_w B_1^{\sharp T} P_{\mathcal{L}_2}(x) < 0 \quad (\text{B.5}) \end{aligned}$$

が得られる. いま, (B.5) 式を満足する $P_{\mathcal{L}_2}(x)$ を用いて,

$$\begin{aligned} \phi(x) &:= \xi^T P_{\mathcal{L}_2}^T(x) E^\sharp \xi = \xi^T E^{\sharp T} P_{\mathcal{L}_2}(x) \xi \\ &= x^T P_1(x) x > 0 \quad (x \neq 0, x \in \mathcal{U}) \quad (\text{B.6}) \end{aligned}$$

のように正定値関数 $\phi(x)$ を定義すると, その時間微分は

$$\begin{aligned} \dot{\phi}(x) &= \dot{\xi}^T E^{\sharp T} P_{\mathcal{L}_2}(x) \xi + \xi^T P_{\mathcal{L}_2}^T(x) E^\sharp \dot{\xi} \\ &+ \xi^T \dot{P}_{\mathcal{L}_2}^T(x) E^\sharp \xi \\ &= \xi^T \text{He} [P_{\mathcal{L}_2}^T(x) A_{cl}^\sharp(x)] \xi \\ &+ w^{\sharp T} S_w^{1/2} B_1^{\sharp T} P_{\mathcal{L}_2}(x) \xi \\ &+ \xi^T P_{\mathcal{L}_2}^T(x) S_w^{1/2} B_1^\sharp w^\sharp \\ &< -\gamma^2 \left\| w^\sharp - \frac{1}{\gamma^2} S_w^{1/2} B_1^{\sharp T} P_{\mathcal{L}_2}(x) \xi \right\|^2 \\ &+ \gamma^2 \|w^\sharp\|^2 - \|z^\sharp\|^2 \\ &\leq \gamma^2 \|w^\sharp\|^2 - \|z^\sharp\|^2 \\ &= \gamma^2 \|\bar{w}\|^2 - \|\bar{z}\|^2 \\ &+ \gamma^2 (x^T N_A^T L_A(x) N_A x \\ &+ \dot{x}^T N_E^T L_E(x) N_E \dot{x}) \quad (\text{B.7}) \end{aligned}$$

$$L_A(x) = \Sigma_A^T(x) \tilde{S}_A^{-1} \Sigma_A(x) - \tilde{S}_A^{-1}$$

$$L_E(x) = \Sigma_E^T(x) \tilde{S}_E^{-1} \Sigma_E(x) - \tilde{S}_E^{-1}$$

となる. ここで, (23) 式および $\tilde{s}_i > 0$ ($i = 1, \dots, 4$) より $L_A(x) \leq 0$, $L_E(x) \leq 0$ であるから, (B.7) 式は

$$\dot{\phi}(x) < \gamma^2 \|\bar{w}\|^2 - \|\bar{z}\|^2 \quad (\text{B.8})$$

となる. したがって, $\bar{w} = 0$ のとき,

$$\dot{\phi}(x) < -\|\bar{z}\|^2 \leq 0 \quad (\text{B.9})$$

となり, K は $\bar{S}$ を安定化することがいえる. また $x(0) = o$ のとき, (B.8) 式の両辺を $t = 0$ から ∞ まで積分すると,

$$\gamma^2 \|\bar{w}\|_2^2 - \|\bar{z}\|_2^2 \geq 0 \quad (\text{B.10})$$

となるから, L_2 ゲイン条件 (9) 式を満足することがいえる. なお, (30), (B.4) 式より (31) 式は

$$\begin{aligned} K: u = & Z_1(x)X_1^{-1}(x)x \\ & - Z_2(x)X_{L_{24}}^{-T}(x)X_{L_{22}}^T(x)X_1^{-1}(x)x \\ & + Z_2(x)X_{L_{24}}^{-T}(x)\dot{x} \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

であるから, (30) 式において $Z_2(x) = O_5$ とし, $Z^\sharp(x)$ を (32) 式の構造に限定すると, 非線形状態フィードバック K は (33) 式のように x にのみ依存し, (22) 式の構造となる.

C. 定理4の証明

付録Bと同様, $\bar{E}^\sharp X_{\text{eig}}^T(x) = X_{\text{eig}}(x)\bar{E}^\sharp{}^T$ となる正則行列 $X_{\text{eig}}(x)$ は必ず (36) 式の構造となる. いま,

$$\bar{A}_{cl}^\sharp{}^T(x)\psi = \lambda \bar{E}^\sharp{}^T \psi \quad (\text{C.1})$$

$$\bar{A}_{cl}(x) = \bar{A}^\sharp(x) + \bar{B}_2^\sharp K^\sharp(x)$$

を満足する $\psi \in C^{10}$ (C^k : k 次元複素ベクトル) を

$$\psi = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} \quad (\psi_1, \psi_2 \in C^5)$$

とおく. このとき, (35) 式の右から

$$\Psi := \begin{bmatrix} \psi & O_{10 \times 1} \\ O_{10 \times 1} & \psi \end{bmatrix} \quad (\text{C.2})$$

をかけ, 左から Ψ の共役転置行列 Ψ^* をかけると, (C.1) 式および $\bar{E}^\sharp X_{\text{eig}}^T(x) = X_{\text{eig}}(x)\bar{E}^\sharp$ より

$$Q(\lambda)\psi^* \bar{E}^\sharp X_{\text{eig}}^T(x)\psi \geq 0 \quad (\text{C.3})$$

$$Q(\lambda) := \begin{bmatrix} q(\lambda + \lambda^*) + d & \lambda^* \\ \lambda & 1 \end{bmatrix}, \quad d = r^2 - q^2$$

となる. ただし, λ^* は λ の共役複素数である. ここで, $X_{\text{eig}1}(x) = X_{\text{eig}1}^T(x) > 0$ より

$$\begin{aligned} \psi^* \bar{E}^\sharp X_{\text{eig}}^T(x)\psi &= \psi^* X_{\text{eig}}(x)\bar{E}^\sharp{}^T \psi \\ &= \psi_1^* X_{\text{eig}1}(x)\psi_1 > 0 \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

であるから, (C.3) 式より $Q(\lambda) \geq 0$ であることがいえる,

$$(\alpha - q)^2 + \beta^2 \leq r^2 \quad (\text{C.5})$$

という関係式が得られる. したがって, 非線形状態フィードバック (38) 式は特性方程式 (39) 式の根 $\lambda = \alpha + j\beta$ を中心 ($q, 0$), 半径 r の円内に配置する.

なお, $Z_{\text{eig}}^\sharp(x)$ の構造を特に (37) 式と限定すれば, 付録B

と同様, 非線形状態フィードバック (38) 式は (41) 式のように x にのみ依存し, (22) 式の構造となる. また, (C.1) 式は

$$\bar{A}_{cl}^T(x)\psi_2 = \lambda\psi_1, \quad \psi_1 = \bar{E}^T(x)\psi_2 \quad (\text{C.6})$$

のように分割できる. ただし, $\bar{A}_{cl}(x) := \bar{A}(x) + \bar{B}_2 K(x)$ である. したがって, (C.1) 式は元のシステム (11) 式に対する特性方程式 (12) 式に相当する

$$\bar{A}_{cl}^T(x)\psi_2 = \lambda \bar{E}^T(x)\psi_2 \quad (\text{C.7})$$

と等価であり, 非線形状態フィードバック (41) 式が特性方程式 (12) 式の根 $\lambda = \alpha + j\beta$ を中心 ($q, 0$), 半径 r の円内に配置することがいえる.

D. 定理5の証明

$K^\sharp(x) = [X_1^{-1}(x)Z_1(x) \quad O_{1 \times 5}]$ として, (C.1) 式を満足する ψ を ψ_1 と ψ_2 に分割すると, 付録Cと同様, (C.7) 式が得られ, (C.1) 式が元のシステム (11) 式に対する特性方程式 (12) 式に相当する (C.7) 式と等価であることがわかる. いま, (42) 式の右から

$$\hat{\Psi} := \begin{bmatrix} \psi & O_{10 \times 1} \\ O_{5 \times 1} & \psi_1 \end{bmatrix} \quad (\text{D.1})$$

をかけ, 左から $\hat{\Psi}^*$ をかけると, (C.1), (C.6), (C.7) 式および $\bar{E}^\sharp X_{\text{eig}}^T(x) = X_{\text{eig}}(x)\bar{E}^\sharp$ より

$$Q(\lambda)\psi_1^* X_1(x)\psi_1 > 0 \quad (\text{D.2})$$

となる. ここで, $X_1(x) = X_1^T(x) > 0$ であるから, (D.2) 式より $Q(\lambda) > 0$ であり, 以下の関係式が得られる.

$$(\alpha - q)^2 + \beta^2 < r^2 \quad (\text{D.3})$$

したがって, 非線形状態フィードバック (33) 式が特性方程式 (12) 式の根 $\lambda = \alpha + j\beta$ を中心 ($q, 0$), 半径 r の円内に配置することがいえる.

[著者紹介]

川田 昌 克 (正会員)

1997年3月立命館大学大学院理工学研究科博士後期課程修了. 同年4月より同大学理工学部助手 (任期制) を経て, 98年4月より舞鶴工業高等専門学校電子制御工学科助手. 非線形システムのロバスト制御とその応用に関する研究に従事. 博士 (工学). システム制御情報学会の会員.

井上 和 夫 (正会員)

1966年3月大阪大学大学院工学研究科博士課程修了. 同年4月より立命館大学理工学部講師, 助教授を経て, 71年より教授. ヒューマンインタフェース, 適応制御などに関する研究に従事. 工学博士. システム制御情報学会, 電気学会, 電子情報通信学会, IEEEなどの会員.