特異摂動システムの安定化とロバスト安定性[†]

穂 高 一 条*・鈴木 正 之*

Stabilization and Robust Stability of Singularly Perturbed Systems[†]

Ichijyo HODAKA* and Masayuki SUZUKI*

In many literature, it has been shown that stabilizability/robust stability of singularly perturbed systems are equivalent to stabilizability/robust stability of their reduced and boundary layer systems. This paper shows that these facts can be explained by the fact that two steps of the decomposition of full-systems and feedback operation are completely interchangeable. It is shown that the interchangeability enables us to obtain simple viewpoints and general results for stabilization and robust stability analysis of singularly perturbed systems.

Key Words: singularly perturbed system, two-time-scale system, robust stability

1. はじめに

特異摂動システムの特徴は、システムを表す微分方程式に、非常に小さいが無視することのできないパラメータ（特異摂動パラメータとよばれる）が含まれている点であり、通常このパラメータは小さいことだけがわかっていて、正確な値を知ることができない。このため、特異摂動システムの理論では、十分小さな範囲でもとのシステムをある意味で近似する、退化システムと境界層システムとよばれる二つのサブシステムを導入し、これらを通してもとのシステムの性質を調べる方法が採られる。

特異摂動システムの安定解析は、Klimushev⁷⁾らによるものが最初である。彼らの結果は、退化システムと境界層システムが共に漸近安定ならば、もとの特異摂動システムも十分小さな範囲の特異摂動パラメータ $\mu > 0$ に対して漸近安定となるというものである。ここで重要なのは、これら二つのサブシステムは通常の特異でないシステムであることであり、安定性の判定が容易であることである。

その後、特異摂動システムは、安定化、極配置、最適制御、 H_∞ 制御などの制御問題に関して、非常に多くの研究が成されてきた^{1), 8)}。Suzuki ら^{15), 16)}は、特異摂動システムの状態フィードバックによる安定化を考え、二つのサブシステムが可安定ならば、もとの特異摂動システムは十分小さな範囲の $\mu > 0$ に対して可安定であることを示した。Khalil⁶⁾は、動的コントローラによる安定化を考え、特異摂動システムを表す μ を含んだ伝達関数を $\mathbf{RH}_\infty$ 上で既約分解し、その後

$\mu \rightarrow 0$ として、特異摂動システムの十分小さな範囲の $\mu > 0$ に対する動的コントローラによる可安定性が、二つのサブシステムの可安定性・可検出性により保証されることを示した。

また、特異摂動システムのロバスト安定解析・安定化に関する研究は、 H_∞ 制御に関連するものが多い。Luse ら⁹⁾は、重み付き感度関数の H_∞ ノルムを、十分小さな範囲の $\mu > 0$ に対してある値以下にする H_∞ 制御問題を最初に解いた。Khalil ら⁵⁾は、その結果を用いて特異摂動システムの一般的な H_∞ 制御器の設計手順を示した。その後、異なる問題設定のもとで、異なるアプローチで特異摂動システムの H_∞ 制御問題が扱われている。Pan ら^{11), 12)}は、特異摂動システムに対する標準 H_∞ 制御問題の可解性を、微分ゲームの理論を用いて示した。Oloomi ら¹⁰⁾は、一入出力の特異摂動システムに関するモデルマッチング問題を周波数領域で解いた。Tuan ら¹⁸⁾は、サブシステムが安定で、システムの入力を L_2 空間に制限したとき、特異摂動システムとそのサブシステムの解の誤差が有界であることをいった、一つの Tikhonov の定理⁸⁾を示し、これをもとに状態フィードバックによる H_∞ 制御問題を比較的簡潔に解いている。Dragan^{3), 4)}は、特異摂動システムの H_∞ ノルムが $\mu \rightarrow 0$ とともに、二つのサブシステムの H_∞ ノルムの大きい方に漸近することを示した。Tan ら¹⁷⁾は、 μ を含む一般化 Riccati 方程式を解析することで、非標準特異摂動システム⁸⁾に対しても有効な H_∞ 制御問題の解法を導いている。

これら従来の研究に共通に見られる目的は、特異摂動システムの可安定性、ロバスト安定性、ロバスト安定化可能性などの特異摂動パラメータ μ を含んだ条件を、 μ を十分小さいとして、いかに μ を含まない条件に書き直すかということである。そしてその結果は、いうなれば、 μ を含んだ特異摂動システムの性質が、その退化システムと境界層システムの性

[†] 第 28 回制御理論シンポジウムで一部発表 (1999・5)

* 名古屋大学大学院工学研究科

* Department of Engineering, Nagoya University
(Received August 24, 1999)
(Revised May 26, 2000)

質に継承されるというものである。

しかしながら、従来の研究では、各問題ごとに $\mu \rightarrow 0$ の操作をすることで、そのような特異摂動システムと二つのサブシステムの関係を示しており、特異摂動システム固有の困難さと、通常の特異でないシステムに対する制御に起因する困難さが混在した状態で問題を解いていた。このため、特異摂動システムそのものの問題が明確ではなかった。

本論文では、線形時不変特異摂動システムの安定化問題とロバスト安定解析に焦点を絞り、これらの問題が含んでいる、特異摂動システム固有の困難さと、通常のシステムに対する安定化・ロバスト安定性に起因する困難さを切り離すことを試みる。そしてこれらの問題に対する簡潔かつ統一的な方法と結果を示すことを目的とする。その際、特異摂動システムの退化システムと境界層システムを作る操作と、フィードバックシステムを作る操作が順序交換可能であるという事実が基本となる。注目すべきことは、この事実が単にフィードバックシステムが well-posed でありさえすれば成り立つということである。これは Corless ら²⁾によって、定数出力フィードバックに関して示されているが、本論文ではより一般的な特異摂動システムの形をしたコントローラに対しても成り立つことを示す。このことと、Klimushev らの安定解析の結果を併せると、容易に特異摂動システムの安定化問題を解くことができることがわかる。また、ロバスト安定解析についても先の基本事実が重要となり、ロバスト安定性に関する結果を非常に一般的な形で述べることができる。さらにこれにより、従来得られている特異摂動システムの H_∞ ノルムに関する結果を簡潔に説明できることがわかる。

2. 準備

特異摂動システム $\Sigma(\mu)$:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \mu \dot{x}_2 \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & B_1 \\ A_{21} & A_{22} & B_2 \\ C_1 & C_2 & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ u \end{bmatrix} \quad (1)$$

を考える。ただし、 $x_1(t) \in \mathbf{R}^{n_1}$, $x_2(t) \in \mathbf{R}^{n_2}$, $u(t) \in \mathbf{R}^m$, $y(t) \in \mathbf{R}^p$ とし、 A_{ij} , B_i , C_j ($i, j = 1, 2$), D は適切なサイズの実定数行列であり、

$$(\cdot)' := \frac{d}{dt}(\cdot)$$

である。 μ は十分小さな正の実数であり、システムに著しく異なる大きさの速度をもつダイナミクスが混在していることを特徴づけるもので、特異摂動パラメータとよばれる。特異摂動システムの理論では、このような異なる二つのダイナミクスを近似する二つのサブシステムを導入し、それらを通してもとのシステム $\Sigma(\mu)$ の解析が行われる。この二つのサブシステムは次のように定義される。

[定義] ⁸⁾ (1) 式で表される特異摂動システム $\Sigma(\mu)$ を考え、 A_{22} は正則であるとする。 $\Sigma(\mu)$ において、 $\mu \dot{x}_2 = 0$ として、 x_2 を消去し、 x_1, u, y をそれぞれ x_s, u_s, y_s に置き換えたシステム

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_s \\ y_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_s & B_s \\ C_s & D_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_s \\ u_s \end{bmatrix}, x_s(0) := x_1(0) \quad (2)$$

および $\Sigma(\mu)$ において、 $x_1(t) = x_1(0)$ ($\forall t \geq 0$) とし、

$$\tau := \frac{t}{\mu}$$

$$x_f(\tau) := x_2(t) + A_{22}^{-1} A_{21} x_1(0)$$

$$y_f(\tau) := y(t) - (C_1 - C_2 A_{22}^{-1} A_{21}) x_1(0)$$

$$u_f(\tau) := u(t)$$

とにおいて得られるシステム

$$\begin{bmatrix} \dot{x}'_f \\ y_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_f & B_f \\ C_f & D_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_f \\ u_f \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$x_f(0) := x_2(0) + A_{22}^{-1} A_{21} x_1(0)$$

を定義する。ただし、

$$(\cdot)' := \frac{d}{d\tau}(\cdot), x_s(t) \in \mathbf{R}^{n_1}, x_f(\tau) \in \mathbf{R}^{n_2}$$

$$u_s(t), u_f(\tau) \in \mathbf{R}^m, y_s(t), y_f(\tau) \in \mathbf{R}^p$$

であり、

$$\begin{bmatrix} A_s & B_s \\ C_s & D_s \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} A_{11} & B_1 \\ C_1 & D \end{bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} A_{12} \\ C_2 \end{bmatrix} A_{22}^{-1} \begin{bmatrix} A_{21} & B_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_f & B_f \\ C_f & D_f \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} A_{22} & B_2 \\ C_2 & D \end{bmatrix}$$

である。このとき (2) 式, (3) 式で表されるシステムをそれぞれ特異摂動システム $\Sigma(\mu)$ の退化システム、境界層システムとよび、 $\mathbf{S}(\Sigma(\mu))$, $\mathbf{F}(\Sigma(\mu))$ と記す。

(注意) 上の定義において、境界層システムを作る手順はやや複雑であるが、その結果である (3) 式は、より単純には、(1) 式から状態変数 x_1 を削り取り、その後 x_2 などを x_f などに置き換えたものにすぎない。このようなサブシステムを作る形式的な手順は、次節で重要となる。

システム $\Sigma(\mu)$ の安定性を調べるには、特異摂動パラメータ μ が既知である場合、単に定数行列

$$A(\mu) := \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ \frac{1}{\mu} A_{21} & \frac{1}{\mu} A_{22} \end{bmatrix} \quad (4)$$

の固有値を求めればよい。しかし、 μ が十分小さいことだけがわかっていて、正確な値を知ることができない場合、直接 $A(\mu)$ の安定性を調べることは困難である。

次の事実は、 μ を含む行列 $A(\mu)$ の固有値の近似を与えるもので、基本的には陰関数定理と縮小写像の定理を用いて証明することができる。

[補題 1] ⁸⁾ (4) 式の $A(\mu)$ を考え、 A_{22} は正則とする。このとき、実定数 $\mu_0 > 0$ が存在して

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ P(\mu) & I \end{bmatrix} A(\mu) \begin{bmatrix} I & 0 \\ -P(\mu) & I \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A_{11} - A_{12}P(\mu) & A_{12} \\ 0 & \frac{1}{\mu}A_{22} + P(\mu)A_{12} \end{bmatrix} \quad (5)$$

が任意の $\mu \in (0, \mu_0)$ に対して成り立つような写像

$$P: (0, \mu_0) \rightarrow \mathbf{R}^{n_2 \times n_1}$$

が存在する。さらにこのような P, μ_0 の一つは

$$P(\mu) = A_{22}^{-1}A_{21} + \mathcal{O}(\mu)$$

$$\mu_0 = \left\{ \|A_{22}^{-1}\| \left(\|A_s\|^{\frac{1}{2}} + \|A_{12}\|^{\frac{1}{2}} \|A_{22}^{-1}A_{21}\|^{\frac{1}{2}} \right)^2 \right\}^{-1}$$

で与えられる。ただし、 $\|\cdot\|$ は適当な行列のノルムであり、 $Q: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^{n_1 \times n_2}$ が、ある正の実数 μ_1 と k に対して

$$\|Q(\mu)\| \leq k\mu, \forall \mu \in [0, \mu_1]$$

を満たすとき、 $Q(\mu) = \mathcal{O}(\mu)$ と書くこととする。

補題 1 において、 $A(\mu)$ は (5) 式の右辺のブロック三角行列と相似であることに注意すると、 $A(\mu)$ の固有値は $\forall \mu \in (0, \mu_0)$ に対して

$$A_{11} - A_{12}P(\mu) = A_s + \mathcal{O}(\mu) \quad (6)$$

$$\frac{1}{\mu}A_{22} + P(\mu)A_{12} = \frac{1}{\mu}A_f + \mathcal{O}(1) \quad (7)$$

の固有値で評価されることがわかる。したがって、 μ が十分小さい範囲では、 $\Sigma(\mu)$ の極はその退化システムと境界層システムの極で近似され、この意味でこれら二つのサブシステムは特異摂動システムの近似システムであるといえる。またこのことから、 $\Sigma(\mu)$ の安定性に関してつぎのことが導かれる。
[系 1] ⁸⁾ (1) 式のシステム $\Sigma(\mu)$ を考え、 A_{22} は正則であるとする。このとき、 $\mathbf{S}(\Sigma(\mu))$ と $\mathbf{F}(\Sigma(\mu))$ が共に安定ならば、実定数 $\mu_0 > 0$ が存在して $\Sigma(\mu)$ は任意の $\mu \in (0, \mu_0)$ に対して安定となる。

この事実が、Klimushev ら⁷⁾の示した結果である。なお、(6) 式、(7) 式から、系 1 の逆の記述もまた成り立つように思われるが、簡単な反例を作ることができ、逆は一般に成り立たない。また、文献 14), 19) につぎの命題が記載されている。

[命題] ^{14), 19)} (1) 式のシステム $\Sigma(\mu)$ を考え、 A_{22} は純虚数の固有値をもたないとする。このとき実定数 $\mu_0 > 0$ が存在して $\Sigma(\mu)$ が任意の $\mu \in (0, \mu_0)$ に対して安定となるための必要十分条件は、 $\mathbf{S}(\Sigma(\mu))$ と $\mathbf{F}(\Sigma(\mu))$ が共に安定となることである。

この命題では、 A_{22} に関する仮定に系 1 より強いものを要求している。しかしこの場合でも、その必要性が成り立たないような簡単な例を作ることができ、この命題もまた成り立たない。

3. 特異摂動システムの安定化

本節では、特異摂動システムの十分小さな範囲の特異摂動パラメータ $\mu > 0$ に対する安定化問題を考える。そこでまずフィードバックと、サブシステムを作る操作の順序が交換可能であることを Corless ら²⁾の結果を拡張した形で示す。こ

れにより安定化問題は、容易に μ を含まない問題に置き換えられることがわかる。

(1) 式のシステム $\Sigma(\mu)$ をプラントと考え、コントローラとして同じ特異摂動パラメータをもつシステム $\Xi(\mu)$:

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \mu \dot{\xi}_2 \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & G_1 \\ F_{21} & F_{22} & G_2 \\ H_1 & H_2 & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ y \end{bmatrix} \quad (8)$$

を考えよう。ただし $\xi_i(t) \in \mathbf{R}^{n_i}$ ($i=1, 2$) であり、 F_{ij}, G_i, H_j, K ($i, j=1, 2$) は適当なサイズの実定数行列である。なお、 μ は (1) 式と同じものとしたが、異なるものにとっても同じオーダであれば以下の議論には差し支えない。(1) 式と (8) 式を連立させて、 u, y を消去したものを $\text{FB}(\Sigma(\mu), \Xi(\mu))$ と記す (Fig. 1)。

Fig. 1 $\text{FB}(\Sigma(\mu), \Xi(\mu))$

またこのシステムは、well-posedness 条件：

$$\det(I - KD) \neq 0$$

が成り立つとき一意に決まり、さらに安定であるとき、 $\text{FB}(\Sigma(\mu), \Xi(\mu))$ は内部安定であるということにする。

コントローラ $\Xi(\mu)$ を設計して、 $\text{FB}(\Sigma(\mu), \Xi(\mu))$ を安定化したい場合、系 1 から直ちに

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(\text{FB}(\Sigma(\mu), \Xi(\mu))) \\ \mathbf{F}(\text{FB}(\Sigma(\mu), \Xi(\mu))) \end{aligned} \quad (9)$$

を安定化すればよいことがわかる。したがって、これらのシステムを直接計算して、安定化コントローラが得られればよい。しかし、計算するとわかるが、これらのシステムはプラントとコントローラのパラメータ行列が複雑に絡み合ったものとなり、コントローラの設計には通常の方法が使えない。

一方、文献 6) によると、サブシステムを作ってからフィードバックを施したシステム

$$\begin{aligned} \text{FB}(\mathbf{S}(\Sigma(\mu)), \mathbf{S}(\Xi(\mu))) \\ \text{FB}(\mathbf{F}(\Sigma(\mu)), \mathbf{F}(\Xi(\mu))) \end{aligned} \quad (10)$$

が共に安定であれば、 $\text{FB}(\Sigma(\mu), \Xi(\mu))$ が十分小さな範囲の $\mu > 0$ で安定となる。(10) 式を安定化する問題は、プラント $\mathbf{S}(\Sigma(\mu)), \mathbf{F}(\Sigma(\mu))$ をコントローラ $\mathbf{S}(\Xi(\mu)), \mathbf{F}(\Xi(\mu))$ で安定化する問題であり、通常の安定化コントローラの設計問題である。

これらの事実から、(9) 式と (10) 式の安定性は共に十分小さな範囲の $\mu > 0$ に対する $\text{FB}(\Sigma(\mu), \Xi(\mu))$ の安定性を保証する。しかし、実は安定性より以前に、(9) 式と (10) 式のシステムそのものが同一であることをつぎのように示すことができる。

まず、コントローラのサブシステムを表す記号を定めておく。

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(\Xi(\mu)) : \begin{bmatrix} \dot{\xi}_s \\ u_s \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} F_s & G_s \\ H_s & K_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_s \\ y_s \end{bmatrix} \\ \mathbf{F}(\Xi(\mu)) : \begin{bmatrix} \dot{\xi}_f \\ u_f \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} F_f & G_f \\ H_f & K_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_f \\ u_f \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ただし、上で用いた行列は定義より

$$\begin{bmatrix} F_s & G_s \\ H_s & K_s \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} F_{11} & G_1 \\ H_1 & K \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} F_{12} \\ H_2 \end{bmatrix} F_{22}^{-1} \begin{bmatrix} F_{21} & G_2 \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\begin{bmatrix} F_f & G_f \\ H_f & K_f \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} F_{22} & G_2 \\ H_2 & K \end{bmatrix} \quad (12)$$

である。このときつぎのことが成り立つ。

《定理1》 (1) 式の $\Sigma(\mu)$ と (8) 式の $\Xi(\mu)$ を考え、 A_{22} , F_{22} は正則であるとする。また、

$$\Lambda_f := I - KD, \Lambda_s := I - K_s D_s$$

とおく。このときつぎの (i), (ii), (iii) が成り立つ。

(i) Λ_f が正則ならば、三つのシステム $\mathbf{FB}(\Sigma(\mu), \Xi(\mu))$, $\mathbf{F}(\mathbf{FB}(\Sigma(\mu), \Xi(\mu)))$, $\mathbf{FB}(\mathbf{F}(\Sigma(\mu)), \mathbf{F}(\Xi(\mu)))$ が一意に定まり、後の二つは同一のシステムである。すなわち、

$$\mathbf{F}(\mathbf{FB}(\Sigma(\mu), \Xi(\mu))) \equiv \mathbf{FB}(\mathbf{F}(\Sigma(\mu)), \mathbf{F}(\Xi(\mu))) \quad (13)$$

の関係が成り立つ。

(ii) Λ_f , Λ_s が正則ならば、システム $\mathbf{S}(\mathbf{FB}(\Sigma(\mu), \Xi(\mu)))$, $\mathbf{FB}(\mathbf{S}(\Sigma(\mu)), \mathbf{S}(\Xi(\mu)))$ が一意に定まり、これらは同一のシステムである。すなわち、

$$\mathbf{S}(\mathbf{FB}(\Sigma(\mu), \Xi(\mu))) \equiv \mathbf{FB}(\mathbf{S}(\Sigma(\mu)), \mathbf{S}(\Xi(\mu))) \quad (14)$$

の関係が成り立つ。

(iii) Λ_f が正則であるとき、 $\mathbf{FB}(\mathbf{F}(\Sigma(\mu)), \mathbf{F}(\Xi(\mu)))$ が原点に極をもたないことと、 Λ_s が正則であることは等価である。

(証明) まず、 $\mathbf{FB}(\Sigma(\mu), \Xi(\mu))$ とは、(1) 式と (8) 式を単に連立させた方程式

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \dot{x}_1^T & \dot{\xi}_1^T & \mu \dot{x}_2^T & \mu \dot{\xi}_2^T & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & A_{12} & 0 & 0 & B_1 \\ 0 & F_{11} & 0 & F_{12} & G_1 & 0 \\ A_{21} & 0 & A_{22} & 0 & 0 & B_2 \\ 0 & F_{21} & 0 & F_{22} & G_2 & 0 \\ C_1 & 0 & C_2 & 0 & -I & D \\ 0 & H_1 & 0 & H_2 & K & -I \end{bmatrix} \\ & \times \begin{bmatrix} x_1^T & \xi_1^T & x_2^T & \xi_2^T & y^T & u^T \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (15)$$

において、下二行を y, u について解き、それを残りの上四行に代入したものである。すなわち、

$$\det \begin{bmatrix} -I & D \\ K & -I \end{bmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow \det \Lambda_f \neq 0 \quad (16)$$

のとき、(15) 式の下二行は

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix} &= - \begin{bmatrix} -I & D \\ K & -I \end{bmatrix}^{-1} \\ & \times \begin{bmatrix} C_1 & 0 & C_2 & 0 \\ 0 & H_1 & 0 & H_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \xi_1 \\ x_2 \\ \xi_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

のように一意に解けて、これを上四行に代入したものが $\mathbf{FB}(\Sigma(\mu), \Xi(\mu))$ である。

(i) $\mathbf{F}(\mathbf{FB}(\Sigma(\mu), \Xi(\mu)))$ は、単に $\mathbf{FB}(\Sigma(\mu), \Xi(\mu))$ の x_1, ξ_1 を削り、 x_2 などを x_f などに置き換えたものである。また、 $\mathbf{FB}(\mathbf{F}(\Sigma(\mu)), \mathbf{F}(\Xi(\mu)))$ は、(15) 式から x_1, ξ_1 を削り、その後 u, y を消去し、文字の置き換えを行ったものである。したがって、(16) 式が成り立つとき、(13) 式が成り立つことは明らかである。

(ii) $\mathbf{S}(\mathbf{FB}(\Sigma(\mu), \Xi(\mu)))$ とは、 $\mathbf{FB}(\Sigma(\mu), \Xi(\mu))$ において、 $\mu \dot{x}_2 = 0, \mu \dot{\xi}_2 = 0$ として、 x_2, ξ_2 について解き、残りの式に代入したあと、 x_1 などを x_s などに置き換えたものである。これは

$$\begin{aligned} & \det \left(\begin{bmatrix} A_{22} & 0 \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & B_2 \\ G_2 & 0 \end{bmatrix} \right) \\ & \times \begin{bmatrix} -I & D \\ K & -I \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} C_2 & 0 \\ 0 & H_2 \end{bmatrix} \neq 0 \end{aligned} \quad (17)$$

のとき一意に決まる。一方、 $\mathbf{FB}(\mathbf{S}(\Sigma(\mu)), \mathbf{S}(\Xi(\mu)))$ とは、(15) 式においてまず、上から三、四行目において、 $\mu \dot{x}_2 = 0, \mu \dot{\xi}_2 = 0$ として x_2, ξ_2 について解き、 x_2, ξ_2 を消去して、さらに u, y を消去したものである。つまり、

$$\det \begin{bmatrix} A_{22} & 0 \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix} \neq 0 \quad (18)$$

として、上から三、四行目より得られる

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_2 \\ \xi_2 \end{bmatrix} &= - \begin{bmatrix} A_{22} & 0 \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}^{-1} \\ & \times \begin{bmatrix} A_{21} & 0 & 0 & B_2 \\ 0 & F_{21} & G_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \xi_1 \\ y \\ u \end{bmatrix} \end{aligned}$$

を代入し、その後で、 u, y を消去したものが $\mathbf{FB}(\mathbf{S}(\Sigma(\mu)), \mathbf{S}(\Xi(\mu)))$ である。これは

$$\begin{aligned} & \det \left(\begin{bmatrix} -I & D \\ K & -I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C_2 & 0 \\ 0 & H_2 \end{bmatrix} \right) \\ & \times \begin{bmatrix} A_{22} & 0 \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & B_2 \\ G_2 & 0 \end{bmatrix} \neq 0 \end{aligned} \quad (19)$$

のときに一意に決まることがわかる。\$S(FB(\Sigma(\mu), \Xi(\mu)))\$ が一意に決まる条件である (16) 式, (17) 式と, \$FB(S(\Sigma(\mu)), S(\Xi(\mu)))\$ が一意に決まる条件 (18) 式, (19) 式が同時に成り立つための必要十分条件は, (16) 式, (18) 式と

$$\det \begin{bmatrix} A_{22} & 0 & 0 & B_2 \\ 0 & F_{22} & G_2 & 0 \\ C_2 & 0 & -I & D \\ 0 & H_2 & K & -I \end{bmatrix} \neq 0 \quad (20)$$

の三つが成り立つことであり, これが

$$A_{22}, F_{22}, \Lambda_f, \Lambda_s$$

の正則性と等価であることは簡単にわかる。このとき, \$S(FB(\Sigma(\mu), \Xi(\mu)))\$ と \$FB(S(\Sigma(\mu)), S(\Xi(\mu)))\$ のどちらのシステムも (15) 式において, \$\mu \dot{x}_2 = 0, \mu \dot{\xi}_2 = 0\$ としたものから, \$x_2, \xi_2, u, y\$ を一度に消去したものに他ならない。すなわち, (14) 式の関係が成り立つ。

(iii) \$FB(F(\Sigma(\mu)), F(\Xi(\mu)))\$ の \$A\$ 行列は, \$\det \Lambda_f \neq 0\$ のとき, (17) 式左辺の \$\det\$ の中の行列であり, これが原点に固有値をもたないことは, (17) 式が成り立つことである。いま, (16) 式, (18) 式を仮定しているのだから, (17) 式, (19) 式, (20) 式はすべて等価であり, (19) 式は \$\Lambda_s\$ が正則であることと等価である。

定理 1 の (i), (ii) より, フィードバックシステムを作ってからサブシステムを計算したものと, その操作の順序を入れ替えてできるシステムは, well-posedness が成り立てば, 同一である。また, 定理 1 の (iii) より, \$FB(F(\Sigma(\mu)), F(\Xi(\mu)))\$ を安定化すれば, \$FB(S(\Sigma(\mu)), S(\Xi(\mu)))\$ は常に well-posed であることが保証される点に注意されたい。

定理 1 では, コントローラとして (8) 式の形を考えたが, その特殊な場合として, 特異摂動システムでない通常のコントローラ

$$\Xi: \begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & G_1 \\ H_1 & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ y \end{bmatrix} \quad (21)$$

あるいは, 定数出力フィードバック

$$K: u = Ky \quad (22)$$

を考えよう。これらはそれぞれ定理 1 において, \$\Xi(\mu)\$ から \$\xi_2\$ を削った場合 (\$\nu_2 = 0\$), \$\xi_1, \xi_2\$ を削った場合 (\$\nu_1 = \nu_2 = 0\$) であるから, 定理 1 と同様な結果が成り立つことは明らかであろう。

(22) 式に関する結果だけを述べておく。これは後で用いる。

[系 2] (1) 式の \$\Sigma(\mu)\$ と (22) 式の \$K\$ を考え, \$A_{22}, F_{22}\$ は正則であるとする。このときつぎの (i), (ii), (iii) が成り立つ。

(i) \$I - KD\$ が正則ならば, \$FB(\Sigma(\mu), K)\$ とつぎのシステムが一意に定まり,

$$F(FB(\Sigma(\mu), K)) \equiv FB(F(\Sigma(\mu)), K)$$

の関係が成り立つ。

(ii) \$I - KD, I - KD_s\$ が正則ならば, つぎのシステムが一意に定まり,

$$S(FB(\Sigma(\mu), K)) \equiv FB(S(\Sigma(\mu)), K)$$

の関係が成り立つ。

(iii) \$I - KD\$ が正則であるとき, \$FB(F(\Sigma(\mu)), K)\$ が原点に極をもたないことと, \$I - KD_s\$ が正則であることは等価である。

なお, Corless ら²⁾は, ブロック逆行列の公式を用いて系 2 の (i), (ii) に相当する結果を導いている。

定理 1 と系 1 を用いると, つぎのように特異摂動システムの安定化は, 特異摂動システムでないプラントとコントローラによる安定化問題を解くことにより可能であることがわかる。

[補題 2] (1) 式の \$\Sigma(\mu)\$ と (8) 式の \$\Xi(\mu)\$ を考え, \$A_{22}, F_{22}\$ は正則であるとする。このとき \$FB(S(\Sigma(\mu)), S(\Xi(\mu)))\$ と \$FB(F(\Sigma(\mu)), F(\Xi(\mu)))\$ が共に内部安定ならば, 実定数 \$\mu_0 > 0\$ が存在して, 任意の \$\mu \in (0, \mu_0)\$ に対して \$FB(\Sigma(\mu), \Xi(\mu))\$ は内部安定となる。

(証明) \$FB(S(\Sigma(\mu)), S(\Xi(\mu)))\$ と \$FB(F(\Sigma(\mu)), F(\Xi(\mu)))\$ の内部安定性には, well-posedness 条件 \$\det \Lambda_f \neq 0, \det \Lambda_s \neq 0\$ が含まれる。したがって定理 1 より (13) 式, (14) 式が成り立ち, \$FB(\Sigma(\mu), \Xi(\mu)), S(FB(\Sigma(\mu), \Xi(\mu))), F(FB(\Sigma(\mu), \Xi(\mu)))\$ は well-posed であり, 後の二つは安定である。系 1 より実定数 \$\mu_0 > 0\$ が存在して, 任意の \$\mu \in (0, \mu_0)\$ に対して \$FB(\Sigma(\mu), \Xi(\mu))\$ は内部安定となる。

このように, 特異摂動システムの安定化は, 補題 2 の条件を満たすコントローラ \$\Xi(\mu)\$ を見つけることで達成され, これは \$\mu\$ を含まない通常の安定化問題である。ただし, \$S(\Sigma(\mu))\$ と \$F(\Sigma(\mu))\$ をそれぞれ安定化する \$S(\Xi(\mu))\$ と \$F(\Xi(\mu))\$ は, (11) 式, (12) 式の関係から独立ではないので, 注意が必要である。

そこでこのことに留意し, 特異摂動システムの安定化問題を考える。\$FB(S(\Sigma(\mu)), S(\Xi(\mu)))\$ と \$FB(F(\Sigma(\mu)), F(\Xi(\mu)))\$ の \$A\$ 行列はそれぞれ

$$\begin{bmatrix} A_s + B_s \Lambda_s^{-1} K_s C_s & B_s \Lambda_s^{-1} H_s \\ G_s \tilde{\Lambda}_s^{-1} C_s & F_s + G_s \tilde{\Lambda}_s^{-1} D_s H_s \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$\begin{bmatrix} A_f + B_f \Lambda_f^{-1} K_f C_f & B_f \Lambda_f^{-1} H_f \\ G_f \tilde{\Lambda}_f^{-1} C_f & F_f + G_f \tilde{\Lambda}_f^{-1} D_f H_f \end{bmatrix} \quad (24)$$

である。ただし, 定理 1 で定義した \$\Lambda_f, \Lambda_s\$ に加えて

$$\tilde{\Lambda}_f := I - D_f K_f, \tilde{\Lambda}_s := I - D_s K_s$$

とおいた。

したがって, いま考えている安定化問題は, (11) 式, (12) 式のもとで (23) 式, (24) 式の二つの行列を同時に安定化する \$\Xi(\mu)\$ を見つけることである。

《定理 2》 (1) 式の $\Sigma(\mu)$ を考え、 A_{22} は正則であるとする。このときつぎの (i), (ii) は等価である。

(i) 整数 $\nu_1 \geq 0, \nu_2 \geq 0$ と (8) 式の $\Xi(\mu)$ が存在して $\text{FB}(\mathbf{S}(\Sigma(\mu)), \mathbf{S}(\Xi(\mu)))$ と $\text{FB}(\mathbf{F}(\Sigma(\mu)), \mathbf{F}(\Xi(\mu)))$ が共に内部安定となる。

(ii) $(A_s, B_s), (A_f, B_f)$ が可安定、かつ $(C_s, A_s), (C_f, A_f)$ が可検出である。

(証明) (i) $\Rightarrow$ (ii): 通常の理論より、 $\mathbf{S}(\Xi(\mu))$ と $\mathbf{F}(\Xi(\mu))$ が (11) 式、(12) 式の関係式にかかわりなく、全く独立に選べる場合でも (ii) が必要となる。

(ii) $\Rightarrow$ (i): $\nu_i = n_i$ ($i = 1, 2$) として、(i) を満たすフルオーダーコントローラ $\Xi(\mu)$ を一つ作ればよい。まず、 $K_f = 0$ とすると、 $\det \Lambda_f \neq 0$ であり、 $\text{FB}(\mathbf{F}(\Sigma(\mu)), \mathbf{F}(\Xi(\mu)))$ は well-posed となる。このとき (24) 式の行列は

$$\begin{bmatrix} A_f & B_f H_f \\ G_f C_f & F_f + G_f D_f H_f \end{bmatrix}$$

となる。これは

$$\begin{bmatrix} I & -I \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

による相似変換を施した後

$$F_f := A_f - G_f C_f + B_f H_f - G_f D_f H_f$$

とおくことにより、

$$\begin{bmatrix} A_f - G_f C_f & 0 \\ G_f C_f & A_f + B_f H_f \end{bmatrix} \quad (25)$$

となる。したがって、可安定性・可検出性より $A_f - G_f C_f, A_f + B_f H_f$ を安定化する G_f, H_f が存在して、このとき $\text{FB}(\mathbf{F}(\Sigma(\mu)), \mathbf{F}(\Xi(\mu)))$ は安定となる。ここで、 $\mathbf{S}(\Xi(\mu))$ が定義できるためには $\det F_f \neq 0$ が必要となる。上で決めた F_f はこれを満たす保証はないが、つぎのようにこれを回避できる。いま、 $\det F_f = 0$ となる場合、

$$F_f := A_f - G_f C_f + B_f H_f - G_f D_f H_f - \epsilon I$$

と置き直す。このとき (25) 式は

$$\begin{bmatrix} A_f - G_f C_f & \epsilon I \\ G_f C_f & A_f + B_f H_f - \epsilon I \end{bmatrix}$$

となるが、この行列の固有値は ϵ に関して連続であり、 $\epsilon = 0$ で安定であるから、十分小さな ϵ に対しても安定である。また、 ϵ を $A_f - G_f C_f + B_f H_f - G_f D_f H_f$ の固有値以外から選べば、 $\det F_f \neq 0$ とできる。このように F_f, G_f, H_f, K_f を選べば、 $\text{FB}(\mathbf{F}(\Sigma(\mu)), \mathbf{F}(\Xi(\mu)))$ は安定となる。一方、(11) 式により

$$K_s = K_f - H_f F_f^{-1} G_f = -H_f F_f^{-1} G_f$$

が決まる。このとき、定理 1 の (iii) より、 $\det \Lambda_s \neq 0$ となり、 $\text{FB}(\mathbf{S}(\Sigma(\mu)), \mathbf{S}(\Xi(\mu)))$ は well-posed となる。(23) 式の行列を同様に相似変換し、

$$F_s := A_s + B_s \Lambda_s^{-1} K_s C_s - G_s \tilde{\Lambda}_s^{-1} C_s$$

$$+ B_s \Lambda_s^{-1} H_s - G_s \tilde{\Lambda}_s^{-1} D_s H_s$$

とおくと、

$$\begin{bmatrix} A_s - (G_s - B_s K_s) \tilde{\Lambda}_s^{-1} C_s & \\ G_s \tilde{\Lambda}_s^{-1} C_s & \\ 0 & \\ A_s + B_s \Lambda_s^{-1} (H_s + K_s C_s) & \end{bmatrix}$$

となる。よって、可安定性・可検出性より $A_s + B_s \hat{H}_s, A_s - \hat{G}_s C_s$ を安定化する $\hat{H}_s, \hat{G}_s$ が存在して

$$(G_s - B_s K_s) \tilde{\Lambda}_s^{-1} = \hat{G}_s, \Lambda_s^{-1} (H_s + K_s C_s) = \hat{H}_s$$

すなわち、

$$G_s := \hat{G}_s \tilde{\Lambda}_s + B_s K_s, H_s := \Lambda_s \hat{H}_s - K_s C_s$$

とおけば、 $\text{FB}(\mathbf{S}(\Sigma(\mu)), \mathbf{S}(\Xi(\mu)))$ が安定化される。

以上のように決定された $F_f, G_f, H_f, K_f, F_s, G_s, H_s, K_s$ を用いて

$$\begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & G_1 \\ F_{21} & F_{22} & G_2 \\ H_1 & H_2 & K \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} F_s & 0 & G_s \\ 0 & F_f & G_f \\ H_s & H_f & K_f \end{bmatrix} \quad (26)$$

としたとき、 $\Xi(\mu)$ は関係式 (11) 式、(12) 式と条件 (i) を満たす。

したがって、特異摂動システムの十分小さな範囲の $\mu > 0$ に対する安定化は、プラントの退化システムと境界層システムをそれぞれ独立に安定化することで達成され、コントローラに対する制約 (11) 式、(12) 式が安定化コントローラの存在条件に影響を与えないことがわかる。また、この問題は通常の安定化コントローラ的设计法により容易に解くことができる。さらに証明からわかるように、安定化が可能な場合は、常に (26) 式の形のコントローラ $\Xi(\mu)$ で安定化でき、このとき (8) 式は

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ u_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_s & G_s \\ H_s & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mu \dot{\xi}_2 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_f & G_f \\ H_f & K_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_2 \\ y \end{bmatrix}$$

$$u = u_1 + u_2$$

のようにサブシステムの和の形でかけ、この $\Xi(\mu)$ は composite controller とよばれている。

Khalil⁶⁾は、 μ を含んだままの特異摂動システムを $\mathbf{RH}_\infty$ 上で既約分解して、その後 $\mu \rightarrow 0$ とすることで定理 2 を導いている。しかし、ここで述べた導き方では、 $\mu \rightarrow 0$ の操作は不要であり、より簡潔なものとなっている。 $\mu \rightarrow 0$ の操作は、補題 2 を証明する際に利用した系 1 に含まれているのである。

最後に、(22) 式の定数出力フィードバックによる安定化問題を考えよう。系 1 と系 2 より、直ちに次の結果を得る。

[系 3] (1) 式の $\Sigma(\mu)$ と (22) 式の K を考え、 A_{22} は正則であるとする。このとき $\text{FB}(\mathbf{S}(\Sigma(\mu)), K)$ と

$FB(F(\Sigma(\mu)), K)$ が共に内部安定であるならば、実定数 $\mu_0 > 0$ が存在して、任意の $\mu \in (0, \mu_0)$ に対して $FB(\Sigma(\mu), K)$ は内部安定となる。

この場合、二つのサブシステムを同じゲイン K で同時に安定化しなければならず、定理2のように独立にゲインを設計できない。このため、たとえ境界層システムがもととも安定で、退化システムを安定化したとしても、特異摂動システムは不安定化される場合があるので、注意が必要である²⁰⁾。

なお、状態フィードバックが可能である場合は、このようなことは起きない。 $\Sigma(\mu)$ の出力が

$$y = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

となるように

$$C_1 = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

としよう。またこれに併せてゲイン K を

$$K = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix}$$

と分割する。このとき系3より、 $FB(S(\Sigma(\mu)), K)$ と $FB(F(\Sigma(\mu)), K)$ のA行列

$$A_s + B_s(I + K_2 A_{22}^{-1} B_2)^{-1} (K_1 - K_2 A_{22}^{-1} A_{21})$$

$$A_f + B_f K_2$$

が安定となればよい。ここで

$$K_f := K_2$$

$$K_s := (I + K_2 A_{22}^{-1} B_2)^{-1} (K_1 - K_2 A_{22}^{-1} A_{21})$$

とおくと、これには逆変換

$$K_1 = (I + K_f A_{22}^{-1} B_2) K_s + K_f A_{22}^{-1} A_{21} \quad (27)$$

$$K_2 = K_f$$

が存在する。したがって、 (A_f, B_f) , (A_s, B_s) が可安定ならば、特異摂動システム $\Sigma(\mu)$ は状態フィードバック

$$u = K_1 x_1 + K_2 x_2$$

により、十分小さな範囲の $\mu > 0$ に対して安定化でき、そのゲインは、 $A_f + B_f K_f$, $A_s + B_s K_s$ をそれぞれ安定化する K_f , K_s を用いて、(27) 式で与えられる。これが、Suzukiら¹⁵⁾により最初に導かれた composite controller であった。

4. 特異摂動システムのロバスト安定性

本節では、特異摂動システムのロバスト安定性が、非常に一般的な不確かさに対して、サブシステムのロバスト安定性と等価であることを示す。

(1) 式のシステム $\Sigma(\mu)$ と不確かさを表す複素行列 $\delta \in \mathbb{C}^{m \times p}$ を考え、これらのフィードバック結合によるシステム $FB(\Sigma(\mu), \delta)$ を考えよう (Fig. 2)。

ただし、不確かさ δ はある集合 $\Delta \subset \mathbb{C}^{m \times p}$ に属するものとする。この $FB(\Sigma(\mu), \delta)$ は、well-posedness 条件: $\det(I - \delta D) \neq 0$ を仮定したとき、

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \mu \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11}(\delta) & \tilde{A}_{12}(\delta) \\ \tilde{A}_{21}(\delta) & \tilde{A}_{22}(\delta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (28)$$

となる。ただし、

$$\tilde{A}_{ij}(\delta) := A_{ij} + B_i \delta C_j, \quad i, j = 1, 2$$

$$\tilde{\delta} := (I - \delta D)^{-1} \delta$$

とおいた。

Fig. 2 $FB(\Sigma(\mu), \delta)$

いま、不確かさ δ を固定した場合を考えよう。系3は明らかに複素行列 K に対しても成り立つので、これを $FB(\Sigma(\mu), \delta)$ に適用する。すると、 A_{22} , $I - \delta D$, $I - \delta D_s$ が正則であるときに、 $FB(S(\Sigma(\mu)), \delta)$ と $FB(F(\Sigma(\mu)), \delta)$ が共に内部安定ならば、 $\mu_0 > 0$ が存在して $FB(\Sigma(\mu), \delta)$ は $\forall \mu \in (0, \mu_0)$ に対して内部安定となる。しかし $\delta \in \Delta$ を動かしたとき、上の μ_0 は一般に δ に依存し、

$$\mu_0(\delta) > 0, \quad \forall \delta \in \Delta$$

であるが、

$$\exists \{\delta_i\} \subset \Delta, \quad \mu_0(\delta_i) \rightarrow 0 \text{ as } i \rightarrow \infty$$

となる可能性がある。よっていま考えているロバスト安定性は、 δ に依存しない $\mu_0 > 0$ が存在して $FB(\Sigma(\mu), \delta)$ が $\forall \mu \in (0, \mu_0)$ と $\forall \delta \in \Delta$ に対して内部安定となることでなければいけない。したがって一般にこのことは、 $FB(S(\Sigma(\mu)), \delta)$ と $FB(F(\Sigma(\mu)), \delta)$ が共に $\forall \delta \in \Delta$ に対して内部安定となるとしても成り立つとは限らない。

しかしこれは次に示すように、 δ の集合 Δ をコンパクト集合に制限することで成り立つ。

《定理3》 (1) 式の特異摂動システム $\Sigma(\mu)$ と複素定数行列の集合 $\Delta \subset \mathbb{C}^{m \times p}$ を考える。ただし、 A_{22} は正則であり、 Δ はコンパクト集合であると仮定する。このとき $FB(S(\Sigma(\mu)), \delta)$ と $FB(F(\Sigma(\mu)), \delta)$ が共に任意の $\delta \in \Delta$ に対して内部安定であるならば、実定数 $\mu_0 > 0$ が存在して、 $FB(\Sigma(\mu), \delta)$ は任意の $\mu \in (0, \mu_0)$ と任意の $\delta \in \Delta$ に対して内部安定となる。

(証明) 各 $\delta \in \Delta$ に対して、補題1を用いると $\mu_0 > 0$ が存在して

$$\tilde{A}(\mu, \tilde{\delta}) := \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11}(\tilde{\delta}) & \tilde{A}_{12}(\tilde{\delta}) \\ \frac{1}{\mu} \tilde{A}_{21}(\tilde{\delta}) & \frac{1}{\mu} \tilde{A}_{22}(\tilde{\delta}) \end{bmatrix}$$

の固有値は $\forall \mu \in (0, \mu_0)$ に対して

$$\tilde{A}_s(\tilde{\delta}) + O(\mu) \quad (29)$$

$$\frac{1}{\mu} \tilde{A}_{22}(\tilde{\delta}) + \tilde{A}_{21}(\tilde{\delta}) \tilde{A}_{22}(\tilde{\delta})^{-1} + O(\mu) \quad (30)$$

の固有値で評価できる。ただし、

$$\tilde{A}_s(\tilde{\delta}) := \tilde{A}_{11}(\tilde{\delta}) - \tilde{A}_{12}(\tilde{\delta})\tilde{A}_{22}(\tilde{\delta})^{-1}\tilde{A}_{21}(\tilde{\delta})$$

である。このことが δ に依存しない $\mu_0 > 0$ に対して成り立つことを示したいが、一般に μ_0 は δ に依存し、その一つは、補題 1 より

$$\mu_0(\tilde{\delta}) := \left\{ \|\tilde{A}_{22}(\tilde{\delta})^{-1}\| \left(\|\tilde{A}_s(\tilde{\delta})\|^{\frac{1}{2}} + \|\tilde{A}_{12}(\tilde{\delta})\|^{\frac{1}{2}} \|\tilde{A}_{22}(\tilde{\delta})^{-1}\tilde{A}_{21}(\tilde{\delta})\|^{\frac{1}{2}} \right)^2 \right\}^{-1} > 0$$

である。明らかに、 $\mu_0: \tilde{\Delta} \rightarrow \mathbf{R}$ は連続関数であり、 Δ のコンパクト性は

$$\tilde{\Delta} := \{\tilde{\delta}: \tilde{\delta} = (I - \delta D)^{-1}\delta, \delta \in \Delta\} \quad (31)$$

のコンパクト性を要求するので、集合 $\mu_0(\tilde{\Delta})$ もコンパクトである。したがって、最小値

$$\mu_1 := \min \mu_0(\tilde{\Delta}) > 0$$

が存在する。ゆえにこの δ に依存しない $\mu_1 > 0$ に関して $\tilde{A}(\mu, \tilde{\delta})$ の固有値は、 $\forall \mu \in (0, \mu_1)$ に対して (29) 式、(30) 式の固有値で評価される。いま、 $\tilde{A}_s(\tilde{\delta})$ 、 $\tilde{A}_{22}(\tilde{\delta})$ は共に安定行列であるから、 $\mu_2 \in (0, \mu_1)$ が存在して、任意の $\mu \in (0, \mu_2)$ と任意の $\delta \in \Delta$ に対して $\tilde{A}(\mu, \tilde{\delta})$ は安定行列となる。■

(注意) 定理 3 では、 Δ のコンパクト性を仮定したが、証明からわかるように (31) 式の $\tilde{\Delta}$ のコンパクト性で置き換えてもよい。したがって、 Δ 自身は必ずしもコンパクトである必要はない。たとえば、 $m = p$ の場合、

$$\Delta := \{\delta \in \mathbf{C}^{m \times m} : \delta + \delta^* \leq 0\}$$

を考えると、これはコンパクトでない。ここで、 $D = I$ と仮定すると、 $I - \delta D$ は $\forall \delta \in \Delta$ に対して正則であり、

$$\tilde{\Delta} = \left\{ \tilde{\delta} \in \mathbf{C}^{m \times m} : \left(\tilde{\delta} + \frac{1}{2}I \right)^* \left(\tilde{\delta} + \frac{1}{2}I \right) \leq \frac{1}{4}I \right\}$$

となることがわかり、コンパクトである。

このように、極めて広いクラスの不確かさの集合に対して二つのサブシステムのロバスト安定性が、特異摂動システム $\Sigma(\mu)$ のロバスト安定性を保証することがわかる。

定理 3 を用いて、多くの文献^{3)~5), 9)~12), 17), 18)}で研究されている、特異摂動システムの H_∞ ノルムを考えよう。特異摂動システム $\Sigma(\mu)$ の伝達関数を $P(s, \mu)$ と記し、 μ を固定すると、 $\Sigma(\mu)$ が安定であり、かつ

$$\|P(\cdot, \mu)\|_\infty < \gamma, \gamma > 0$$

が成り立つことは、Rotea¹³⁾によると

$$\Delta := \{\delta \in \mathbf{C}^{m \times p} : \delta^* \delta \leq (1/\gamma^2)I\} \quad (32)$$

の任意の元 δ に対して $\text{FB}(\Sigma(\mu), \delta)$ が内部安定となることと等価である。この Δ はコンパクト集合であり、定理 3 を適用すると、つぎの結果が導かれる。

[系 4] (1) 式の $\Sigma(\mu)$ を考え、 A_{22} は正則であるとし、実定数 $\gamma > 0$ が与えられているとし、 $\mathbf{S}(\Sigma(\mu))$ と $\mathbf{F}(\Sigma(\mu))$ は

共に安定であるとする。また、これらのシステムの伝達関数をそれぞれ

$$P_s(s) := D_s + C_s(sI - A_s)^{-1}B_s,$$

$$P_f(r) := D_f + C_f(rI - A_f)^{-1}B_f$$

とする。ただし $r = \mu s$ である。これに対して

$$\|P_s\|_\infty < \gamma, \|P_f\|_\infty < \gamma \quad (33)$$

が成り立つと仮定する。このとき、実定数 $\mu_0 > 0$ が存在して、任意の $\mu \in (0, \mu_0)$ に対して、 $\Sigma(\mu)$ は安定となり、かつ

$$\|P(\cdot, \mu)\|_\infty < \gamma \quad (34)$$

が成り立つ。

(証明) 仮定と文献 13) より、 $\text{FB}(\mathbf{S}(\Sigma(\mu)), \delta)$ と $\text{FB}(\mathbf{F}(\Sigma(\mu)), \delta)$ は共に (32) 式の Δ の任意の元 δ に対して内部安定となる。よって定理 3 より、実定数 $\mu_0 > 0$ が存在して、 $\text{FB}(\Sigma(\mu), \delta)$ は任意の $\mu \in (0, \mu_0)$ と任意の $\delta \in \Delta$ に対して内部安定となる。再び文献 13) より、(34) 式が $\forall \mu \in (0, \mu_0)$ に対して成り立つ。■

9), 12) では μ を含んだ Riccati 方程式を $\mu \rightarrow 0$ とすることで系 4 を示している。

また、系 4 から次のことが導かれる。

[系 5] (1) 式の $\Sigma(\mu)$ を考え、 A_{22} は正則、 $\mathbf{S}(\Sigma(\mu))$ と $\mathbf{F}(\Sigma(\mu))$ は共に安定であるとする。このとき

$$\lim_{\mu \rightarrow 0+} \|P(\cdot, \mu)\|_\infty \leq \max \{\|P_s\|_\infty, \|P_f\|_\infty\} \quad (35)$$

が成り立つ。

(証明) γ_0, γ_1 をそれぞれ (35) 式の左辺と右辺の値とする。このとき $\|P_s\|_\infty < \gamma, \|P_f\|_\infty < \gamma$ が $\forall \gamma > \gamma_1$ に対して成り立つ。このとき系 4 から

$$\exists \mu_0 > 0, \|P(\cdot, \mu)\|_\infty < \gamma, \forall \mu \in (0, \mu_0)$$

が成り立つことがわかる。これが $\forall \gamma > \gamma_1$ に対して成り立つので

$$\|P(\cdot, \mu)\|_\infty \leq \gamma_1, \forall \mu \in (0, \mu_0)$$

となつて、 $\gamma_0 \leq \gamma_1$ が成り立つ。■

Dragan⁴⁾は、 μ を含んだ Riccati 方程式を $\mu \rightarrow 0$ とすることにより、系 5 の (35) 式における不等号の向きを逆にしたものを導いている。また文献 3) でも同様な結果を得ている。またこれとは独立に、Tuan¹⁸⁾は、システムの入力を L_2 空間に制限したときの Tikhonov の定理を示し、これをもとに Riccati 方程式を用いない比較的簡潔な証明を与えている。

5. おわりに

本論文ではまず、特異摂動システムの退化システムと境界層システムを作る操作と、フィードバックシステムを作る操作が順序交換可能であることを、Corless²⁾の結果を拡張した形で示した。つぎにこの事実を利用して、特異摂動システムの十分小さな特異摂動パラメータに対する安定化問題を

解く簡潔な方法を示した。さらに、特異摂動システムと不確かさを表す複素行列のフィードバックシステムに関するロバスト安定解析を、非常に広いクラスの不確かさについて行い、特異摂動システムのロバスト安定性が、その二つのサブシステムのロバスト安定性により保証されることを示した。

謝辞 有益なご指摘をいただいた査読者に感謝致します。

参考文献

- 1) 安藤・鈴木: 特異摂動法と特異摂動システムにおけるロバスト制御の動向, システム / 制御 / 情報, **42-12**, 653/660 (1998)
- 2) M. Corless, F. Garofalo and L. Glielmo: New Results on Composite Control of Singularly Perturbed Uncertain Linear Systems, *Automatica*, **29-2**, 387/400 (1993)
- 3) V. Dragan: The Asymptotic Behavior of the Stability Radius for a Singularly Perturbed Linear System, *Int. J. Robust and Nonlinear Control*, **8**, 817/829 (1998)
- 4) V. Dragan: H_∞ -Norms and Disturbance Attenuation for Systems with Fast Transients, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **41-5**, 747/750 (1996)
- 5) H. K. Khalil and F. Chen: H_∞ Control of Two-Time-Scale Systems, *Systems and Control Letters*, **19**, 35/42 (1992)
- 6) H. K. Khalil: Output Feedback Control of Linear Two-Time-Scale Systems, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **32-9**, 784/792 (1987)
- 7) A. I. Klimushev and N. N. Krasovskii: Uniform Asymptotic Stability of Systems of Differential equations with a small parameter in the derivative terms, *J. Appl. Math. Mech.*, **25**, 1011/1025 (1962)
- 8) P. V. Kokotovic, H. K. Khalil and J. O'Reilly: *Singular Perturbation Methods in Control; Analysis and Design*, Academic Press, London (1986)
- 9) D. W. Luse and J. A. Ball: Frequency-Scale Decomposition of H^∞ -Disk Problems, *SIAM J. Control and Optimization*, **27-4**, 814/835, (1989)
- 10) H. M. Oloomi and M. E. Sawan: H_∞ Model Matching Problem for Singularly Perturbed Systems, *Automatica*, **32-3**, 369/377 (1996)
- 11) Z. Pan and T. Basar: H^∞ -Optimal Control for Singularly Perturbed Systems-Part I, *Automatica*, **29-2**, 401/423 (1993)
- 12) Z. Pan and T. Basar: H^∞ -Optimal Control for Singularly Perturbed Systems-Part II, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **39-2**, 280/299 (1994)
- 13) M. A. Rotea, M. Corless, D. Da and I. R. Petersen: Systems with Structured Uncertainty: Relations between Quadratic and Robust Stability; *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **38-5**, 799/803 (1993)
- 14) L. Saydy: New Stability/Performance Results for Singularly Perturbed Systems, *Automatica*, **32-6**, 807/818 (1996)
- 15) M. Suzuki and M. Miura: Stabilizing Feedback Controllers for Singularly Perturbed Linear Constant Systems, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **21-2**, 123/124 (1976)
- 16) M. Suzuki: Composite Controls for Singularly Perturbed Systems, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **26-2**, 505/507 (1981)
- 17) W. Tan, T. Leung and Q. Tu: H_∞ Control for Singularly Perturbed Systems, *Automatica*, **34-2**, 255/260 (1998)
- 18) H. D. Tuan and S. Hosoe: On a State-Space Approach in Robust Control for Singularly Perturbed Systems, *Int. J. Control*, **66-3**, 435/462 (1997)
- 19) M. Vidyasagar: *Nonlinear Systems Analysis, 2nd Ed.*,

Prentice-Hall (1993)

- 20) M. Vidyasagar: Robust Stabilization of Singularly Perturbed Systems, *Systems and Control Letters*, **5**, 413/418 (1985)

[著者紹介]

穂高 一条 (正会員)

1966年7月4日生。97年6月名古屋大学大学院工学研究科博士課程後期課程単位取得退学。同年6月名古屋大学大学院工学研究科助手。現在に至る。博士(工学)。ロバスト制御理論, 非線形制御理論の研究に従事。

鈴木 正之 (正会員)

1941年1月5日生。69年3月名古屋大学大学院工学研究科博士課程修了。同年4月名古屋大学工学部助手, 航空学科講師, 助教授を経て, 91年4月同大学航空学科教授。94年4月より名古屋大学大学院工学研究科航空宇宙工学専攻教授となり, 現在に至る。非線形制御系, 特異摂動システム, ロバスト制御, 宇宙ロボティクスなどの研究に従事。工学博士。IEEEなどの会員。