左シフト不変部分空間でのリフティングを用いた ハンケル作用素, 混合ハンケル・テプリッツ作用素の特異値公式†

太田 快人*

Formulas for Singular Values of Hankel Operators and Mixed Hankel-Toeplitz Operators
Using Lifting Technique on the Left Shift Invariant Subspace†

Yoshito OHTA*

This paper derives Hamiltonian formulas for singular values of Hankel operators and mixed Hankel-Toeplitz operators. Given an inner function and a continuous time linear system, it is shown that there is a discrete-time linear system whose input-output space is the left shift invariant subspace associated to the inner function. Using this lifting technique, a Schmidt pair of the operators are characterized as a solution to a discrete-time two-point boundary value problem. This results in a transcendental equation for singular values.

Key Words: Hankel operator, Hankel-Toeplitz operator, inner function, lifting technique, H^∞ control, infinite-dimensional system, Hamiltonian formula

1. はじめに

線形システム理論では, ハンケル作用素やテプリッツ作用素は重要な役割を果たしている. たとえば実現理論においてハンケル作用素の具体的表現であるハンケル行列が用いられている. また H^∞ 感度最小化問題²³⁾, 平衡打ち切り法¹⁸⁾, ハンケル近似^{6), 12)}などでの利用も重要である. 信号処理ではテプリッツ作用素の具体的表現であるテプリッツ行列が用いられる. その他にも H^∞ 混合感度最小化問題においては混合ハンケル・テプリッツ作用素が重要な役を果たす²⁴⁾.

無限次元系の H^∞ 制御問題や平衡打ち切り法を考えると, ハンケル作用素や混合ハンケル・テプリッツ作用素の特異値や特異ベクトルの計算が必要になってくる^{7), 17), 24)}. それらの作用素がコンパクト作用素であれば, ラゲール関数などの基底を用いて数値的な計算方法^{5), 14)}を適用することも可能ではある. しかし解析的な計算公式が得られるならば, それは応用および理論の両面で意味が深い. たとえば平衡打ち切り法では, 数値計算を用いると作用素をまず近似しなければならないので, 近似系の誤差には数値計算上の打ち切り誤差も考慮しなければならないからである. また厳密な公式は,

ハンケル作用素や混合ハンケル・テプリッツ作用素の構造を明らかにするものとして理論上の意義がある.

特異値を与える厳密な公式は, 単一むだ時間系の H^∞ 感度関数最小化問題^{2), 3), 25)}, 一般のインナー関数をもつ系の H^∞ 感度関数最小化問題^{13), 20), 22)}, H^∞ 混合感度最小化問題^{9), 24)}, 単一むだ時間系の近似問題⁸⁾, 有理比むだ時間を含む複数むだ時間系の近似問題¹⁶⁾で調べられてきた. 特に文献 25) ではハミルトン行列の指数関数を用いて特異値を表す超越方程式が導かれており, 以降のハミルトン行列を用いた公式の原形になっている. ハンケル作用素の特異値問題となる感度関数最小化問題では, 文献 22) において, ハミルトン行列公式を特定の基底を用いることなく導いている. 混合ハンケル・テプリッツ作用素の特異値問題となる混合感度最小化問題では, 文献 9) において, 文献 24) で得られた特異値公式をハミルトン行列公式に表現することに成功しているが, 完全に基底に依存しない導出ではない. のちに文献 10) において, 基底を用いない証明が与えられている.

本論文では, インナー関数に対する左シフト不変部分空間での有限次元連続時間線形系の入出力等価な離散時間系の記述を新たに与えることによって, ハンケル作用素や混合ハンケル・テプリッツ作用素の特異値を求める公式を導く. この入出力等価な離散時間系の記述は, インナー関数がむだ時間 e^{-sL} であるときには, サンプル値制御で提唱されているリフトされた系²¹⁾のことである. インナー関数がむだ時間でない場合にも同様の記述が可能になる. 本論文の方法による利点の一つは, 公式ならびにその導出には特別な基底が必要でないことである. その具体例を混合ハンケル・テプリッツ作

† 第 20 回 Dynamical System Theory シンポジウムで一部発表 (1997・11), 第 41 回自動制御連合講演会で一部発表 (1998・11), 第 22 回 Dynamical System Theory シンポジウムで一部発表 (1999・10)

* 大阪大学大学院工学研究科 吹田市山田丘 2-1

* Osaka University, Suita

(Received January 4, 2000)

(Revised July 16, 2000)

用素の特異値公式として与える. もう一つの利点は, 等価な離散時間系を用いることで, シュミット対を与える方程式の記述が簡明になり, 見通しのよい議論が可能になることである. 有理比むだ時間系のハンケル特異値について, 文献16)では積分作用素の性質から導いたが, 本論文の方法を用いることにより, 二点境界値問題との関連を明白にして, 特異値公式を導くことができる.

2. 数学的準備

ここでは, 関数空間とその上で働く作用素についての本論文での必要事項をまとめておく. 詳しくは, たとえば文献4), 11), 19)を参照されたい.

2.1 時間領域と周波数領域の信号空間

自乗可積分な $-\infty < t < \infty$ の時間の関数全体に内積

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)^T f(t) dt$$

を与えた空間を $L^2(-\infty, \infty)$ とする. 自乗可積分な $-\infty < \omega < \infty$ の周波数の関数全体に内積

$$\langle \hat{f}, \hat{g} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(j\omega)^H \hat{f}(j\omega) d\omega$$

を与えた空間を $L^2(j\mathbb{R})$ とする. ただし複素行列またはベクトル x について x^H はその共役転置を表す. プランシェレルの定理より, フーリエ変換 $\mathcal{F}: L^2(-\infty, \infty) \rightarrow L^2(j\mathbb{R})$ は, ユニタリー変換である.

空間 $L^2(-\infty, \infty)$ の部分空間として $t < 0$ で 0 となる時間の関数の空間 $L^2(0, \infty)$ と $t > 0$ で 0 となる時間の関数の空間 $L^2(-\infty, 0)$ を考える. ペーリー・ウィナーの定理によりフーリエ変換は $L^2(0, \infty)$ を H^2 に, $L^2(-\infty, 0)$ を H^2 にそれぞれ写す. ここで H^2 は $\text{Re } s > 0$ で解析的で

$$\|\hat{f}\| = \sup_{\nu > 0} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\nu + j\omega)^H \hat{f}(\nu + j\omega) d\omega \right)^{1/2}$$

が有限となる関数の全体である. H^2 は $\text{Re } s < 0$ で解析であることを除いて H^2 と同様に定められる. Π_+ を $L^2(j\mathbb{R})$ から H^2 への直交射影, Π_- を H^2 への直交射影とする. 空間 $L^2(-\infty, \infty)$ と $L^2(j\mathbb{R})$ はフーリエ変換により同一視されるので, Π_+ および Π_- は時間領域に対しても用いることにする.

2.2 乗法的作用素

有界な $-\infty < \omega < \infty$ の周波数の関数にノルムを

$$\|h\|_{\infty} = \text{ess sup } |h(j\omega)|$$

を定めた空間を L^{∞} とする. h が行列値をとるときには, 絶対値を最大特異値で置き換える. 作用素 $\Lambda_h: L^2(j\mathbb{R}) \rightarrow L^2(j\mathbb{R})$ を

$$(\Lambda_h \hat{f})(j\omega) = h(j\omega) \hat{f}(j\omega)$$

と定める. このとき $\|\Lambda_h\| = \|h\|_{\infty}$ が成り立っている. ここで Λ_h を $h \in L^{\infty}$ をシンボルにもつ乗法的作用素という.

ハーディ空間 H^{∞} は $\text{Re } s > 0$ で有界解析的な関数の空間

である. 右半面から虚軸への非接極限を考えることにより L^{∞} の部分空間と考えることができる. 空間 H^{∞} の関数をシンボルにもつ乗法的作用素は H^2 を不変にする.

パラコンジュゲイトは, $h^{\sim}(s) = \overline{h(-\bar{s})}^T$ で定義される. 乗法的作用素を考えると, $\Lambda_h^* = \Lambda_{h^{\sim}}$ である. また $h^{\sim} \in H^{\infty}$ であれば乗法的作用素 Λ_h は H^2 を不変にする.

2.3 インナー関数と左シフト不変部分空間

インナー関数は, $\phi(j\omega)\phi^{\sim}(j\omega) = 1$ を満たす関数 $\phi \in H^{\infty}$ である. 本論文では, インナー関数はスカラー値をとるものとする. もし $\phi \in H^{\infty}$ がインナー関数であれば, 乗法的作用素 Λ_{ϕ} は $L^2(j\mathbb{R})$ のユニタリー作用素である. 実際, $\Lambda_{\phi^{\sim}}\Lambda_{\phi} = \Lambda_{\phi}\Lambda_{\phi^{\sim}} = \Lambda_{\phi^{\sim}\phi} = I$ が成り立つ.

ここで Λ_{ϕ} は内積を保つので, $\Lambda_{\phi}H^2 \perp \Lambda_{\phi}H^2$ となる. そこで部分空間 $S = \Lambda_{\phi}H^2 \cap H^2$ を考える. H^2 において e^{-sL} , $L \geq 0$ をかける作用に関して閉じている部分空間をシフト不変部分空間という¹¹⁾. これは, 2.1節で述べたフーリエ変換を介して, (右に) L だけシフトする作用素に関して不変であることを意味する. 一方, S はシフト不変部分空間 $\Lambda_{\phi}H^2$ の直交補空間となっており, シフト作用素の双対作用素に関して不変な部分空間となっている. そこで S を左シフト不変部分空間とよぶことにする.

2.4 ハンケル作用素と混合ハンケル・テプリッツ作用素

ここでは, ハンケル作用素ならびに混合ハンケル・テプリッツ作用素について, それらの定義ならびに H^{∞} 制御問題, 近似問題との関係を再確認しておく.

伝達関数 $h \in L^{\infty}$ を与えるとき, これをシンボルとするハンケル作用素 $\Gamma_h: H^2 \rightarrow H^2$ を

$$\Gamma_h \hat{f} = \Pi_+ \Lambda_h|_{H^2} \hat{f}$$

と定義する. 双対作用素 $\Gamma_h^*: H^2 \rightarrow H^2$ は,

$$\Gamma_h^* \hat{f} = \Pi_- \Lambda_{h^{\sim}}|_{H^2} \hat{f}$$

となる. もし伝達関数 $h \in H^{\infty}$ のインパルス応答が $L^1(0, \infty) \cap L^2(0, \infty)$ に属すならば, 平衡実現 (または出力正規実現) の打ち切りによる近似系をハンケル作用素 Γ_h の特異値および特異ベクトルから計算することができる⁷⁾.

H^{∞} 感度最小化問題は, 次の下限を求める問題である²³⁾.

$$\inf \{ \|h - \phi q\|_{\infty} : q \in H^{\infty} \}. \quad (1)$$

ただし $h \in H^{\infty}$ は重み関数, $\phi \in H^{\infty}$ はインナー関数であるとする. 下限を与えるパラメータ q から最適補償器が求まる. 式(1)は, 次の下限

$$\inf \{ \|\phi^{\sim} h - q\|_{\infty} : q \in H^{\infty} \}$$

と等しい値をとる. この下限を求める問題をネハリ問題という. その下限はハンケル作用素 $\Gamma_{\phi h^{\sim}}$ のノルム $\|\Gamma_{\phi h^{\sim}}\|$ に等しい.

伝達関数 $h \in L^{\infty}$ を与えるとき, テプリッツ作用素 $\Theta_h: H^2 \rightarrow H^2$ を

$$\Theta_h \hat{f} = \Pi_+ \Lambda_h|_{H^2} \hat{f}$$

と定義する。\$H^\infty\$ 混合感度最小化問題は、次の下限を求める問題である。

$$\inf \left\{ \left\| \begin{bmatrix} w - \phi q \\ v \end{bmatrix} \right\|_\infty : q \in H^\infty \right\}. \quad (2)$$

ただし、\$w, v \in H^\infty\$ は重み関数から決まる固定した伝達関数、\$\phi\$ はインナー関数である。下限を与えるパラメータ \$q\$ から最適補償器が求まる。式 (2) は、混合ハンケル・テプリッツ作用素 \$Z: H^2 \rightarrow H^2_\perp \times H^2\$

$$Z\hat{f} = \begin{bmatrix} \Gamma_{\phi w}^* \hat{f} \\ \Theta_v \hat{f} \end{bmatrix} \quad (3)$$

のノルム \$\|Z\|\$ に等しい値をとる。

3. 左シフト不変部分空間でのリフティング

この節では、与えられたインナー関数に対応した左シフト不変部分空間を用いて、連続時間線形系は、入出力関係の等価な離散時間線形系として記述できることを示す。基本的な考え方は、すでに文献 15) において導かれているが、4節での理論展開に沿う形に述べるために、本論文では新たに定理として記述し直すことにする。

連続時間線形系

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x &= Ax + Bu, \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \quad (4)$$

を考える。ここで \$A \in \mathbb{R}^{n \times n}\$ とし、\$B, C, D\$ は適当なサイズの行列とする。伝達関数は、\$h(s) = D + C(sI - A)^{-1}B\$ である。もし \$A\$ が虚軸上に固有値をもたなければ、\$h \in L^\infty\$ となって、乗法的作用素 \$\Lambda_h: L^2(j\mathbb{R}) \rightarrow L^2(j\mathbb{R})\$ が定義できる。

スカラー値をとるインナー関数 \$\phi \in H^\infty\$ が与えられると、2.3節で述べたように左シフト不変部分空間 \$S = \Lambda_\phi H^2_\perp \cap H^2\$ が定まる。このとき \$H^2 = S \oplus \Lambda_\phi H^2\$ であるから、\$S, \Lambda_\phi S, \Lambda_\phi^2 S, \dots\$ は互いに直交する \$H^2\$ の部分空間である。もし左シフト不変部分空間 \$\bigoplus_{k=0}^\infty \Lambda_\phi^k S\$ が \$H^2\$ 全体に一致しないとすれば、その直交補空間 \$T\$ はシフト不変空間であるので、ビューリンの定理¹⁹⁾より、あるインナー関数 \$\psi\$ によって \$T = \Lambda_\psi H^2\$ と書くことができる。するとすべての \$k\$ について \$T \subset \Lambda_\phi^k H^2\$ であるので、\$\psi\$ は \$\phi^k\$ を割りきることになるが、これは \$\phi\$ が定数でなければ矛盾である。\$H^2_\perp\$ に対しても同様の考察をすることにより、任意の \$\hat{f} \in L^2(j\mathbb{R})\$ を

$$\hat{f} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Lambda_\phi^k \hat{f}_k, \quad \hat{f}_k \in S \quad (5)$$

のように、\$S\$ の要素を \$\Lambda_\phi\$ によってシフトした形の和に一意に表すことができることがわかる。系 (4) の入出力関係 \$\hat{y} = \Lambda_h \hat{u}\$ を考え、\$\hat{y}\$ と \$\hat{u}\$ を式 (5) にしたがって記述する。このとき \$S\$ に値をとる入力系列 \$(\dots, \hat{u}_{-1}, \hat{u}_0, \hat{u}_1, \dots)\$ に対して、\$S\$ に値をとる出力系列 \$(\dots, \hat{y}_{-1}, \hat{y}_0, \hat{y}_1, \dots)\$ が発生する離散時間系を考えることができる。本節で示すように、この

等価な入出力関係を与える離散時間系は、系 (4) の状態と同じ次元をもつ離散時間シフト不変線形系になる。

たとえば、インナー関数がむだ時間 \$\phi(s) = e^{-sL}\$ であるときには、左シフト不変部分空間 \$S\$ は、時間領域で \$L^2(0, L)\$ となるので、式 (5) を時間領域で表現すると、時間軸を \$L\$ ごとに区切った信号の集まりとして、\$L^2(-\infty, \infty)\$ を考えることになる。このとき入出力が等価となる離散時間系は、連続時間系をリフトした系としてサンプル値制御の分野で利用されている²¹⁾。インナー関数をむだ時間に限らなくとも、どのようなスカラー値をとるインナー関数に対しても、等価な離散時間系を考えることができる。このことをまず安定系について述べる。

《定理 1》 安定行列 \$A\$ をもつ連続時間線形系 (4) ならびにスカラー値をとるインナー関数 \$\phi \in H^\infty\$ を考え、\$S = \Lambda_\phi H^2_\perp \cap H^2\$ とする。作用素 \$\mathbf{A}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \mathbf{B}: S \rightarrow \mathbb{R}^n, \mathbf{C}: \mathbb{R}^n \rightarrow S, \mathbf{D}: S \rightarrow S\$ を

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\xi &= \phi^\sim(A)\xi, \\ \mathbf{B}\hat{u} &= \int_{-\infty}^0 e^{-A\tau} B (\mathcal{F}^{-1} \Lambda_{\phi^\sim} \hat{u})(\tau) d\tau, \\ (\mathbf{C}\xi)(s) &= C(sI - A)^{-1} \xi \\ &\quad - \phi(s) C(sI - A)^{-1} \phi^\sim(A) \xi, \\ (\mathbf{D}\hat{u})(s) &= h(s) \hat{u}(s) - \phi(s) C(sI - A)^{-1} \mathbf{B}\hat{u} \end{aligned}$$

と定めて離散時間系

$$\begin{aligned} \xi(k+1) &= \mathbf{A}\xi(k) + \mathbf{B}\hat{u}_k, \\ \hat{y}_k &= \mathbf{C}\xi(k) + \mathbf{D}\hat{u}_k \end{aligned} \quad (6)$$

を考える。このとき伝達関数 \$h(s) = D + C(sI - A)^{-1}B\$ による乗法的作用素の入出力関係 \$\hat{y} = \Lambda_h \hat{u}\$ は、式 (5) の表現を用いるとき、離散時間系 (6) の入出力関係に等価である。

(証明) 文献 15) の補題 3 では、式 (6) を \$k < 0, k = 0, k > 0\$ の場合に分けて、\$k = 0\$ のときのみ離散時間の状態方程式の形に記述し、\$k < 0, k > 0\$ の場合は、式 (6) を解いた形に記述している。\$k < 0, k > 0\$ の場合にも離散時間の状態方程式に直すと式 (6) を得る。□

パラコンジュゲイト \$h^\sim(s) = D^T - B^T(sI + A^T)^{-1}C^T\$ を考える。これは、線形系

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x &= -A^T x - C^T u, \\ y &= B^T x + D^T u \end{aligned} \quad (7)$$

の伝達関数でもある。行列 \$A\$ が安定であるとき、\$-A^T\$ は不安定である。作用素 \$\Lambda_{h^\sim}\$ に等価な離散時間系は次の定理で与えられる。

《定理 2》 反安定行列 \$-A^T\$ をもつ連続時間線形系 (7) ならびにスカラー値をとるインナー関数 \$\phi \in H^\infty\$ を考え、\$S = \Lambda_\phi H^2_\perp \cap H^2\$ とする。作用素 \$\mathbf{A}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \mathbf{B}: S \rightarrow \mathbb{R}^n, \mathbf{C}: \mathbb{R}^n \rightarrow S, \mathbf{D}: S \rightarrow S\$ を定理 1 のように定めて離散時間系

$$\begin{aligned} \zeta(k) &= \mathbf{A}^* \zeta(k+1) + \mathbf{C}^* \hat{u}_k, \\ \hat{y}_k &= \mathbf{B}^* \zeta(k+1) + \mathbf{D}^* \hat{u}_k \end{aligned} \quad (8)$$

を考える. このとき $h^\sim(s) = D^T - B^T (sI + A^T)^{-1} C^T$ による乗法的作用素の入出力関係 $\hat{y} = \Lambda_h^\sim \hat{u}$ は, 式 (5) の表現を用いるとき, 離散時間系 (8) の入出力関係に等価である.

(証明) 文献 15) の補題 4 から, 定理 1 と同じ理由でただちに導くことができる. ただし作用素については, 次の注意を参照されたい. $\square$

(注意) 定理 2 に表れる作用素 $A^* : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $B^* : \mathbb{R}^n \rightarrow S$, $C^* : S \rightarrow \mathbb{R}^n$, $D^* : S \rightarrow S$ を具体的に表すと

$$A^* \xi = \phi^\sim(A^T) \xi,$$

$$(B^* \xi)(s) = B^T (sI + A^T)^{-1} \phi^\sim(A^T) \xi - \phi(s) B^T (sI + A^T)^{-1} \xi,$$

$$C^* \hat{u} = \int_0^\infty e^{A^T \tau} C^T (F^{-1} \hat{u})(\tau) d\tau,$$

$$(D^* \hat{u})(s) = h^\sim(s) \hat{u}(s) + B^T (sI + A^T)^{-1} C^* \hat{u}$$

が成り立つ.

4 節で述べるように, ハンケル作用素, 混合ハンケル・テプリッツ作用素の特異値を求めるためには, 離散時間系 (6) と (8) を連立させて, 二点境界値問題を解く必要がある. そのために文献 15) で用いられた次の補題が重要になる. 参照のために記載する.

[補題 1]¹⁵⁾ 安定行列 A をもつ伝達関数 $h(s) = D + C(sI - A)^{-1} B$, スカラー値をとるインナー関数 $\phi \in H^\infty$ を考え, $S = \Lambda_\phi H^2 \cap H^2$ とする. $\sigma > 0$ は行列 D の特異値ではないとすると, 離散時間系 (6), (8) の連立方程式

$$\begin{aligned} \xi(1) &= A\xi(0) + B\hat{f}_0, & \zeta(0) &= A^*\zeta(1) + C^*\hat{g}_0, \\ \sigma\hat{g}_0 &= C\xi(0) + D\hat{f}_0, & \sigma\hat{f}_0 &= B^*\zeta(1) + D^*\hat{g}_0 \end{aligned}$$

を考える. 行列

$$\begin{aligned} A_d &= \text{diag}\{A, -A^T\}, & B_d &= \text{diag}\{B, C^T\}, \\ D_d &= \text{diag}\{D, D^T\}, & J &= \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix}, \\ K &= (\sigma J - D_d)^{-1} C_d, & H &= A_d + B_d K \end{aligned}$$

を定義して,

$$\eta(k) = \begin{bmatrix} \xi(k) \\ \zeta(k) \end{bmatrix}, \quad k = 0, 1, \quad \hat{u} = \begin{bmatrix} \hat{f}_0 \\ \hat{g}_0 \end{bmatrix}$$

と定める. もし ϕ が行列 $-A$ と H の固有値において解析的であれば, 連立方程式の解は $\eta(0) \in \mathbb{R}^{2n}$ をパラメータとして

$$\begin{aligned} \eta(1) &= \phi^\sim(H)\eta(0), \\ \hat{u}(s) &= K(sI - H)^{-1}\eta(0) \\ &\quad - \phi(s)K(sI - H)^{-1}\phi^\sim(H)\eta(0) \end{aligned}$$

で与えられる.

4. ハンケル作用素と混合ハンケル・テプリッツ作用素の特異値

この節では, 3 節で述べたリフトされた系を用いて, ハン

ケル作用素, 混合ハンケル・テプリッツ作用素の特異値公式を与える.

4.1 有理比むだ時間系の近似問題

スカラー値をとるインナー関数 $\phi \in H^\infty$, 入出力数がそれぞれ m_b, m_c と共通であるプロパーな安定伝達関数 $h_k \in H^\infty$ ($k = 0, 1, \dots, r$) を考える. ここで $h_k(s) = D_k + C_k(sI - A_k)^{-1} B_k$, $A_k \in \mathbb{R}^{n_k \times n_k}$ とし, A_k はすべて安定行列であるとする. このとき伝達関数

$$\psi = h_0 + \phi h_1 + \dots + \phi^r h_r \quad (9)$$

を考える. $\phi(s) = e^{-sL}$ のときには, 有理比むだ時間系である. 本節では, ハンケル作用素 Γ_ψ の特異値を求める公式を示す. この問題はすでに文献 16) で解かれているが, 左シフト不変部分空間でのリフティングを用いて公式を導出することにより, 二点境界値問題との関連がより明確になる.

まず以下の行列を定義する. ただし I_m は m 次の単位行列, $0_{p,q}$ は $p \times q$ 次の零行列, $\otimes$ はクロネッカ積を表す. ここで $k = 0, \dots, r-1$ について

$$\tilde{A}_k = I_{k+2} \otimes A_k = \text{diag}\{A_k, A_k, \dots, A_k\}, \quad (10)$$

$$\tilde{B}_k = \begin{bmatrix} 0_{n_k, (r-k)m_b} & 0_{n_k, km_b} \\ \phi^\sim(A_k)^{r-k-1} B_k & \dots & B_k & 0_{n_k, km_b} \\ 0_{km_c, (r-k)m_b} & I_k \otimes B_k \end{bmatrix},$$

$$\tilde{C}_k = \begin{bmatrix} C_k \phi^\sim(A_k)^{r-k-1} \\ \vdots \\ C_k \\ 0_{km_c, n_k} & I_k \otimes C_k \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0_{(r-k)m_c, n_k} \\ 0_{km_c, n_k} \end{bmatrix},$$

$$\tilde{D}_k = \begin{bmatrix} 0_{(r-k)m_c, km_b} & 0_{(r-k)m_c, (r-k)m_b} \\ I_k \otimes D_k & 0_{km_c, (r-k)m_b} \end{bmatrix}$$

とし, $k = r$ については,

$$\tilde{A}_r = I_r \otimes A_r, \quad \tilde{B}_r = I_r \otimes B_r,$$

$$\tilde{C}_r = I_r \otimes C_r, \quad \tilde{D}_r = I_r \otimes D_r$$

とする. 以上の行列を用いて

$$\tilde{A} = \text{diag}\{\tilde{A}_0, \tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_r\},$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} \tilde{B}_0 \\ \tilde{B}_1 \\ \vdots \\ \tilde{B}_r \end{bmatrix}, \quad \tilde{C} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_0 & \tilde{C}_1 & \dots & \tilde{C}_r \end{bmatrix},$$

$$\tilde{D} = \sum_{k=1}^r \tilde{D}_k = \begin{bmatrix} D_r & & & 0 \\ D_{r-1} & D_r & \dots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ D_1 & D_2 & \dots & D_r \end{bmatrix}$$

と定める. このとき

$$\begin{aligned} \tilde{D} + \tilde{C}(sI - \tilde{A})^{-1}\tilde{B} \\ = \begin{bmatrix} h_r(s) & & & 0 \\ h_{r-1}(s) & h_r(s) & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ h_1(s) & h_2(s) & \cdots & h_r(s) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

であることに注意する. また $\tilde{A}$ はブロック対角行列であり, A_k に対応したブロック行 (またはブロック列) は $k = 0, 1, \dots, r-1$ のとき $k+2$ 本, $k=r$ のとき r 本ある. ここで

$$p_k = 1 + \sum_{j=0}^{k-1} (j+2) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}, \quad 0 \leq k \leq r,$$

$$q_k = \sum_{j=0}^k (j+2) = \frac{(k+2)(k+3)}{2} - 1, \quad 0 \leq k < r,$$

$$q_r = \sum_{j=0}^{r-1} (j+2) + r = \frac{(r+1)(r+2)}{2} + r - 1$$

とおく. 行列 $\tilde{A}$ において, p_k ブロック行 (または列) は, 最初に行列 A_k の表れるブロック行 (または列) であり, q_k ブロック行 (または列) は, 最後に行列 A_k の表れるブロック行 (または列) である. また行列

$$\tilde{A} = \text{diag}\{A_0, A_1, \dots, A_r\}$$

を定める. $\tilde{A}$ と同じブロック行構造, $\tilde{A}$ と同じブロック列構造をもつ行列 $\tilde{E}, \tilde{F}$ を次のように定める. $\tilde{E}$ は, $\tilde{A}$ の A_k に対応するブロック行は, p_k ブロック列のみ単位行列 I_{n_k} であり, それ以外は零行列である行列とする. $\tilde{F}$ は, q_k ブロック列のみ単位行列 I_{n_k} であり, それ以外は零行列である行列とする.

線形行列方程式の唯一解として $P_{k\ell}$ ならびに $Q_{k\ell}$ を

$$A_k P_{k\ell} + P_{k\ell} A_\ell^T + B_k B_\ell^T = 0,$$

$$A_k^T Q_{k\ell} + Q_{k\ell} A_\ell + C_k^T C_\ell = 0$$

と定める ($k, \ell = 0, 1, \dots, r$). これらを用いて $\tilde{P}$ を $\tilde{A}$ と同じブロック構造をもつ行列として以下のように定める. その (q_k, q_ℓ) ブロックは, $0 \leq \ell \leq r$ について

$$\begin{cases} \phi^\sim(A_k)^{r-k-1} P_{k\ell} \phi^\sim(A_\ell^T)^{r-\ell}, & 0 \leq k < r, \\ P_{r\ell} \phi^\sim(A_\ell^T)^{r-\ell}, & k = r \end{cases}$$

であり, それ以外のブロックは零行列である. また $\tilde{Q}$ も $\tilde{A}$ と同じブロック構造をもつ行列として, その (p_k, p_ℓ) ブロックは, $0 \leq \ell \leq r$ について

$$\begin{cases} \phi^\sim(A_k^T)^{r-k-1} Q_{k\ell} \phi^\sim(A_\ell)^{r-\ell}, & 0 \leq k < r, \\ Q_{r\ell} \phi^\sim(A_\ell)^{r-\ell}, & k = r \end{cases}$$

であり, それ以外のブロックは零行列である. さらに行列

$$\tilde{B}^T = \begin{bmatrix} B_0^T \phi^\sim(A_0^T)^{r-1} & \cdots & B_{r-1}^T & B_r^T \end{bmatrix},$$

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} C_0 \phi^\sim(A_0)^{r-1} & \cdots & C_{r-1} & C_r \end{bmatrix},$$

$$J = \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix}$$

を定め, “シフト行列”, すなわち

$$S_k = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{S}_k = S_k \otimes I_{n_k}$$

を定める. ただしその次数は, $k = 0, \dots, r-1$ のときには $k+2$ 次, $k=r$ のときには r 次とする. そして

$$\tilde{S} = \text{diag}\{\tilde{S}_0, \tilde{S}_1, \dots, \tilde{S}_r\}$$

とおく. $\tilde{S}$ も $\tilde{A}$ のブロック構造に対応している. 以上の行列を用いて Γ_ψ のハンケル特異値ならびに特異ベクトルは次のように与えることができる.

《定理3》作用素 $\Gamma_\psi^* \Gamma_\psi$ の真性スペクトル半径を σ_{ess}^2 ($\sigma_{\text{ess}} \geq 0$) とする. 正数 σ を $\sigma > \sigma_{\text{ess}}$ であり, 行列 $\tilde{D}$ の特異値ではないとする. そして

$$K = (\sigma J - \tilde{D})^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{C} & 0 \\ 0 & \tilde{B}^T \end{bmatrix},$$

$$H = \begin{bmatrix} \tilde{A} & 0 \\ 0 & -\tilde{A}^T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{B} & 0 \\ 0 & -\tilde{C}^T \end{bmatrix} K,$$

$$N_1 = \begin{bmatrix} I & -\frac{1}{\sigma} \tilde{P} \\ 0 & \tilde{S} \end{bmatrix}, \quad N_2 = \begin{bmatrix} \tilde{S}^T & 0 \\ -\frac{1}{\sigma} \tilde{Q} & I \end{bmatrix}$$

とする. ϕ および $\phi^\sim$ は A と H の固有値で解析的であるとする. このとき σ がハンケル作用素 Γ_h の特異値であるためには

$$\det(N_1 - N_2 \phi^\sim(H)) = 0 \quad (11)$$

であることが必要十分である. さらに式 (11) を満たす σ に対して $\eta \neq 0$ を

$$(N_1 - N_2 \phi^\sim(H)) \eta = 0 \quad (12)$$

と選び,

$$\hat{f}_{-\infty:-(r+1)}(s) \quad (13)$$

$$= -\frac{1}{\sigma} \tilde{B}^T (sI + \tilde{A}^T)^{-1} \begin{bmatrix} 0 & \tilde{F} \end{bmatrix} \eta,$$

$$\begin{bmatrix} \hat{f}_{-r:-1}(s) \\ \hat{g}_{0:r-1}(s) \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$= K(sI - H)^{-1} \eta - \phi(s) K(sI - H)^{-1} \phi^\sim(H) \eta,$$

$$\hat{g}_{r:\infty}(s) \quad (15)$$

$$= \frac{1}{\sigma} \tilde{C} (sI - \tilde{A})^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{E} & 0 \end{bmatrix} \phi^\sim(H) \eta$$

と定める. そして $\hat{f}_k \in S$, $\hat{g}_k \in S$ を

$$\hat{f}_{-\infty:-(r+1)} = \sum_{k=-\infty}^{-(r+1)} \Lambda_\phi^{k+r} \hat{f}_k,$$

$$\hat{g}_{r:\infty} = \sum_{k=r}^{\infty} \Lambda_{\phi}^{k-r} \hat{g}_k,$$

$$\hat{f}_{-r:-1} = \begin{bmatrix} \hat{f}_{-1} \\ \vdots \\ \hat{f}_{-r} \end{bmatrix}, \quad \hat{g}_{0:r-1} = \begin{bmatrix} \hat{g}_{r-1} \\ \vdots \\ \hat{g}_0 \end{bmatrix}$$

を用いて定め、式(5)によって、 $\hat{f} \in H^2, \hat{g} \in H^2$ を定める。
すると $(\hat{f}, \hat{g})$ は、特異値 σ に対するシュミット対である。

(証明) まずハンケル作用素の作用 $\hat{y} = \Gamma_{\phi^k h_k} \hat{u}$ を、定理1を用いて表現すると、

$$\xi_k(t+1) = \begin{cases} \mathbf{A}_k \xi_k(t) + \mathbf{B}_k \hat{u}_{t-k}, & t < k, \\ \mathbf{A}_k \xi_k(t), & t \geq k, \end{cases} \quad (16)$$

$$\hat{y}_t = \begin{cases} \mathbf{C}_k \xi_k(t) + \mathbf{D}_k \hat{u}_{t-k}, & 0 \leq t < k, \\ \mathbf{C}_k \xi_k(t) = \mathbf{C}_k \mathbf{A}_k^{t-k} \xi_k(k), & t \geq k \end{cases}$$

である。ただし

$$\xi_k(k-r) = \sum_{t=-\infty}^{-r-1} \mathbf{A}_k^{-t-r-1} \mathbf{B}_k \hat{u}_t \quad (17)$$

に注意する。双対作用素についても $\hat{y} = \Gamma_{\phi^k h_k}^* \hat{u}$ を、定理2を用いて表現すると、

$$\zeta_k(t) = \begin{cases} \mathbf{A}_k^* \zeta_k(t+1) + \mathbf{C}_k^* \hat{u}_{t-k}, & t < k, \\ \mathbf{A}_k^* \zeta_k(t+1), & t \geq k, \end{cases} \quad (18)$$

$$\hat{y}_t = \begin{cases} \mathbf{B}_k^* \zeta_k(t) + \mathbf{D}_k^* \hat{u}_{t-k}, & 0 \leq t < k, \\ \mathbf{B}_k^* \zeta_k(t) = \mathbf{B}_k^* \mathbf{A}_k^{*(t-k)} \zeta_k(k), & t \geq k \end{cases}$$

である。ただし

$$\zeta_k(r-k) = \sum_{t=r}^{\infty} \mathbf{A}_k^{*(t-r)} \mathbf{C}_k^* \hat{u}_t \quad (19)$$

に注意する。そこで以下のようにベクトルを重ねて表現する。
 $0 \leq k < r$ について、

$$\tilde{\xi}_k(0) = \begin{bmatrix} \xi_k(k) \\ \vdots \\ \xi_k(0) \\ \mathbf{A}_k^{r-k-1} \xi_k(k-r) \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\zeta}_k(1) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_k^{*(r-k-1)} \zeta_k(r-k) \\ \zeta_k(0) \\ \vdots \\ \zeta_k(-k) \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\xi}_k(1) = \begin{bmatrix} \xi_k(k+1) \\ \vdots \\ \xi_k(1) \\ \xi_k(0) \end{bmatrix}, \quad \tilde{\zeta}_k(0) = \begin{bmatrix} \zeta_k(0) \\ \zeta_k(-1) \\ \vdots \\ \zeta_k(-k-1) \end{bmatrix}$$

および $k=r$ について

$$\tilde{\xi}_r(0) = \begin{bmatrix} \xi_r(r-1) \\ \vdots \\ \xi_r(1) \\ \xi_r(0) \end{bmatrix}, \quad \tilde{\xi}_r(1) = \begin{bmatrix} \xi_r(r) \\ \vdots \\ \xi_r(2) \\ \xi_r(1) \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\zeta}_r(1) = \begin{bmatrix} \zeta_r(0) \\ \zeta_r(-1) \\ \vdots \\ \zeta_r(-r+1) \end{bmatrix}, \quad \tilde{\zeta}_r(0) = \begin{bmatrix} \zeta_r(-1) \\ \zeta_r(0) \\ \vdots \\ \zeta_r(-r) \end{bmatrix}$$

とおく。系 $(\tilde{\mathbf{A}}_k, \tilde{\mathbf{B}}_k, \tilde{\mathbf{C}}_k, \tilde{\mathbf{D}}_k)$ に定理1を適用して得られた系を $(\tilde{\mathbf{A}}_k, \tilde{\mathbf{B}}_k, \tilde{\mathbf{C}}_k, \tilde{\mathbf{D}}_k)$ とすると、式(16)は、

$$\tilde{\xi}_k(1) = \tilde{\mathbf{A}}_k \tilde{\xi}_k(0) + \tilde{\mathbf{B}}_k \hat{u}_{-r-1}, \quad (20)$$

$$\hat{y}_{0:r-1} = \tilde{\mathbf{C}}_k \tilde{\xi}_k(1) + \tilde{\mathbf{D}}_k \hat{u}_{-r-1}, \quad (21)$$

$$\hat{y}_t = \mathbf{C}_k \mathbf{A}_k^{t-k} \xi_k(k), \quad t \geq r \quad (22)$$

と表現できる。同様に、式(18)は、

$$\tilde{\zeta}_k(0) = \tilde{\mathbf{A}}_k^* \tilde{\zeta}_k(1) + \tilde{\mathbf{C}}_k^* \hat{u}_{0:r-1}, \quad (23)$$

$$\hat{y}_{-r:-1} = \tilde{\mathbf{B}}_k^* \tilde{\zeta}_k(0) + \tilde{\mathbf{D}}_k^* \hat{u}_{0:r-1}, \quad (24)$$

$$\hat{y}_t = \mathbf{B}_k^* \mathbf{A}_k^{*(-t-k-1)} \zeta_k(-k), \quad t < -r \quad (25)$$

と表現できる。ここで系 $(\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}, \tilde{\mathbf{C}}, \tilde{\mathbf{D}})$ に定理1を適用して得られた系を $(\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}, \tilde{\mathbf{C}}, \tilde{\mathbf{D}})$ として、

$$\tilde{\xi}(t) = \begin{bmatrix} \tilde{\xi}_0(t) \\ \tilde{\xi}_1(t) \\ \vdots \\ \tilde{\xi}_r(t) \end{bmatrix}, \quad \tilde{\zeta}(t) = \begin{bmatrix} \tilde{\zeta}_0(t) \\ \tilde{\zeta}_1(t) \\ \vdots \\ \tilde{\zeta}_r(t) \end{bmatrix}, \quad t = 0, 1$$

とおく。そしてハンケル作用素 $\Gamma_{\psi} = \sum_{k=0}^r \Gamma_{\phi^k h_k}$ について、シュミット対の式

$$\sigma \hat{g} = \Gamma_{\psi} \hat{f}, \quad \sigma \hat{f} = \Gamma_{\psi}^* \hat{g} \quad (26)$$

を記述する。式(20),(21),(23),(24)は、

$$\tilde{\xi}(1) = \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\xi}(0) + \tilde{\mathbf{B}} \hat{f}_{-r-1}, \quad (27)$$

$$\sigma \hat{g}_{0:r-1} = \tilde{\mathbf{C}} \tilde{\xi}(0) + \tilde{\mathbf{D}} \hat{f}_{-r-1}, \quad (28)$$

$$\tilde{\zeta}(0) = \tilde{\mathbf{A}}^* \tilde{\zeta}(1) + \tilde{\mathbf{C}}^* \hat{g}_{0:r-1}, \quad (29)$$

$$\sigma \hat{f}_{-r:-1} = \tilde{\mathbf{B}}^* \tilde{\zeta}(1) + \tilde{\mathbf{D}}^* \hat{g}_{0:r-1} \quad (30)$$

となる。また式(22),(25)は、

$$\sigma \hat{g}_t = \sum_{k=0}^r \mathbf{C}_k \mathbf{A}_k^{t-k} \xi_k(k), \quad t \geq r, \quad (31)$$

$$\sigma \hat{f}_t = \sum_{k=0}^r \mathbf{B}_k^* \mathbf{A}_k^{*(-t-k-1)} \zeta_k(-k), \quad t < -r \quad (32)$$

である。さらに式(17),(19)より

$$\xi_k(k-r) = \sum_{t=-\infty}^{-r-1} \mathbf{A}_k^{-t-r-1} \mathbf{B}_k \hat{f}_t, \quad (33)$$

$$\zeta_k(r-k) = \sum_{t=r}^{\infty} \mathbf{A}_k^{*(t-r)} \mathbf{C}_k^* \hat{g}_t \quad (34)$$

である。つまり式 (26) は、式 (27)–(34) に等価であることがわかる。まず条件 (11) の必要性を考える。補題 1 を式 (27)–(30) に適用すると、 $\eta^T = \begin{bmatrix} \tilde{\xi}(0)^T & \tilde{\zeta}(0)^T \end{bmatrix}$ として、式 (14) および $(\phi^\sim(H)\eta)^T = \begin{bmatrix} \tilde{\xi}(1)^T & \tilde{\zeta}(1)^T \end{bmatrix}$ が成り立つことがわかる。行列 $\tilde{E}$ の定義から、 $\begin{bmatrix} \tilde{E} & 0 \end{bmatrix} \phi^\sim(H)\eta$ は、 $\xi_k(k+1) = \phi^\sim(A_k)\xi_k(k)$ ($0 \leq k < r$) と $\xi_r(r)$ が並ぶベクトルである。すると式 (31) から、式 (13) が成り立つ。ただし式 (22) を満たす $\hat{y}_t$ について、

$$\sum_{t=r}^{\infty} \phi(s)^{t-r} \hat{y}_t(s) = C_k (sI - A_k)^{-1} \phi^\sim(A_k)^{r-k} \xi_k(k)$$

であることを用いた。同様に行列 $\tilde{F}$ の定義を確認すると、式 (15) が成り立つことがわかる。このとき式 (34) から、 $0 \leq k < r$ について

$$\begin{aligned} & A_k^{*(r-k-1)} \zeta_k(r-k) \\ &= A_k^{*(r-k-1)} \sum_{\ell=0}^r \sum_{t=r}^{\infty} A_k^{*(t-r)} C_k^* C_\ell A_\ell^{t-\ell} \xi_\ell(\ell) \\ &= \sum_{\ell=0}^r A_k^{*(r-k-1)} \sum_{t=0}^{\infty} A_k^{*t} C_k^* C_\ell A_\ell^t A_\ell^{r-\ell} \xi_\ell(\ell) \\ &= \sum_{\ell=0}^r \phi^\sim(A_k^T)^{r-k-1} Q_{k\ell} \phi^\sim(A_\ell)^{r-\ell} \xi_\ell(\ell) \end{aligned} \quad (35)$$

であることがわかる。ただし

$$\sum_{t=0}^{\infty} A_k^{*t} C_k^* C_\ell A_\ell^t A_\ell^{r-\ell} \xi_\ell = Q_{k\ell} \xi_\ell$$

を用いた。また $k=r$ については、

$$\zeta_r(0) = \sum_{\ell=0}^r Q_{r\ell} \phi^\sim(A_\ell)^{r-\ell} \xi_\ell(\ell) \quad (36)$$

である。同様に式 (34) から、 $0 \leq k < r$ について

$$\begin{aligned} & A_k^{r-k-1} \xi_k(k-r) \\ &= \sum_{\ell=0}^r \phi^\sim(A_k)^{r-k-1} P_{k\ell} \phi^\sim(A_\ell^T)^{r-\ell} \zeta_\ell(-\ell) \end{aligned}$$

であり、 $k=r$ について

$$\xi_r(0) = \sum_{\ell=0}^r P_{r\ell} \phi^\sim(A_\ell^T)^{r-\ell} \zeta_\ell(-\ell) \quad (37)$$

である。すると式 (35)–(37) ならびにベクトル $\tilde{\xi}(1)$, $\tilde{\xi}(0)$, $\tilde{\zeta}(1)$, $\tilde{\zeta}(0)$ の定義から、式 (12) が成り立つことがわかる。つまり式 (11) は σ が特異値であるために必要である。逆に式 (11) が成り立つとき、式 (12) によって $\eta \neq 0$ を定め、式 (13)–(15) によって、 $\hat{f} \in H^2$, $\hat{g} \in H^2$ を定める。補題 1 より $\hat{f}$, $\hat{g}$ は式 (27)–(30) を満たす。また式 (13) は、式 (32) に、式 (15) は、式 (31) に、それぞれ一致している。最後に式 (12) より、式 (33), (34) が成り立つ。ゆえに $\hat{f}$, $\hat{g}$ は式 (26) を満たすのでシュミット対である。□

4.2 混合感度最小化問題

2.4 節で述べたように、式 (2) の値を求める混合感度最小化問題は、式 (3) の作用素 Z のノルムを求めることに帰着される。 Z^*Z の真性スペクトル半径を ρ_e として、 $\|Z\| > \sqrt{\rho_e}$ であれば、 $\|Z\|$ は Z の最大特異値に等しい。真性スペクトル半径の求め方は、文献 24) に述べられている。

作用素 $Z_2: H^2 \rightarrow S \times H^2$ を

$$Z_2 \hat{f} = \begin{bmatrix} \Pi_S \Lambda_w|_{H^2} \hat{f} \\ \Theta_v \hat{f} \end{bmatrix} \quad (38)$$

で定義する。ただし $S = \Lambda_\phi H_-^2 \cap H^2$ は、インナー関数 ϕ に対する左シフト不変部分空間、 Π_S は $S \subset L^2(j\mathbb{R})$ への直交射影である。容易にわかるように $Z_2^* Z_2 = Z^* Z$ であるので、 Z の特異値と Z_2 の特異値は一致する。そこで以下 Z_2 の最大特異値を求めることにする。

安定有理伝達関数 w と v の実現をそれぞれ

$$\begin{aligned} w(s) &= D_w + C_w (sI - A_w)^{-1} B_w, \\ v(s) &= D_v + C_v (sI - A_v)^{-1} B_v \end{aligned}$$

とおく。ここで $A_w \in \mathbb{R}^{n_w \times n_w}$, $A_v \in \mathbb{R}^{n_v \times n_v}$ は安定行列とする。また $n = n_w + n_v$ として

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} A_w & 0 \\ 0 & A_v \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_w \\ B_v \end{bmatrix}, \\ C &= \begin{bmatrix} C_w & 0 \\ 0 & C_v \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} D_w \\ D_v \end{bmatrix} \end{aligned}$$

とおく。 (A, B, C, D) は $[w(s)^T \ v(s)^T]^T$ の n 次の実現になっている。 $\sigma > \sigma_{\max}(D)$ であれば、行列 K_σ とハミルトン行列 $H_\sigma \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ を

$$\begin{aligned} K_\sigma &= \begin{bmatrix} -D & \sigma I \\ \sigma I & -D^T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & B^T \end{bmatrix} \\ H_\sigma &= \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & -A^T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & -C^T \end{bmatrix} K_\sigma \end{aligned}$$

と定義する。また $\sigma > \|v\|_\infty$ であれば、行列 $K_{v,\sigma}$ とハミルトン行列 $H_{v,\sigma} \in \mathbb{R}^{2n_2 \times 2n_2}$ を

$$\begin{aligned} K_{v,\sigma} &= \begin{bmatrix} -D_v & \sigma I \\ \sigma I & -D_v^T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} C_v & 0 \\ 0 & B_v^T \end{bmatrix} \\ H_{v,\sigma} &= \begin{bmatrix} A_v & 0 \\ 0 & -A_v^T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_v & 0 \\ 0 & -C_v^T \end{bmatrix} K_{v,\sigma} \quad (39) \end{aligned}$$

と定義する。 $\sigma > \|v\|_\infty$ であるので $K_{v,\sigma}$ が定義可能であること、また $H_{v,\sigma}$ が虚軸上に固有値をもたないことがわかる。そこで $H_{v,\sigma}$ の安定部分空間を $\text{ran}[I \ X_\sigma]^T$, $X_\sigma \in \mathbb{R}^{n_v \times n_v}$ とする。式 (39) に応じて $H_{v,\sigma}$ のブロック分割を H_{ij} ($i, j = 1, 2$) とすれば、 X_σ はリッカチ方程式

$$X_\sigma H_{11} - H_{22} X_\sigma + X_\sigma H_{12} X_\sigma - H_{21} = 0$$

の安定化解である。そして行列

$$M_\sigma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & -X_\sigma & 0 & I \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

を定義する.

次の仮定は事前に確認することはできないが, 二点境界値問題として補題1を適用しようとするれば必要になる. ハンケル作用素, 混合ハンケル・テプリッツ作用素の特異値のハミルトン行列公式では, この種類の仮定が必要となっている(9), (13), (20), (22)).

[仮定1] 正数 $\sigma > \max\{\sigma_{\max}(D), \|v\|_\infty\}$ は, ハミルトン行列 $H_\sigma, H_{v,\sigma}$ の固有値においてインナー関数 ϕ が解析的であるように選ばれているとする.

以上の準備のもとに式(38)の作用素 Z_2 のシュミット対

$$\sigma \hat{g} = Z_2 \hat{f}, \quad \sigma \hat{f} = Z_2^* \hat{g}, \quad (40)$$

$$\hat{f} \in H^2, \quad \hat{g} = \begin{bmatrix} \hat{g}_w \\ \hat{g}_v \end{bmatrix}, \quad \hat{g}_w \in S, \quad \hat{g}_v \in H^2$$

を特徴付けることにする. ここで, $H^2 \subset L^2(j\mathbb{R})$ の元については, 式(5)の記法にしたがって, $\hat{f} = \sum_{k=0}^\infty \Lambda_\phi^k \hat{f}_k$, $\hat{g} = \sum_{k=0}^\infty \Lambda_\phi^k \hat{g}_k$, $\hat{g}_v = \sum_{k=0}^\infty \Lambda_\phi^k \hat{g}_{v,k}$ と表示する. さらに $\hat{f}_{1:\infty} = \sum_{k=1}^\infty \Lambda_\phi^{k-1} \hat{f}_k \in H^2$, $\hat{g}_{v,1:\infty} = \sum_{k=1}^\infty \Lambda_\phi^{k-1} \hat{g}_{v,k} \in H^2$ と書く. つまり $\hat{f} = \hat{f}_0 + \Lambda_\phi \hat{f}_{1:\infty}$, $\hat{g}_v = \hat{g}_{v,0} + \Lambda_\phi \hat{g}_{v,1:\infty}$ が成り立っている.

《定理4》 式(38)の作用素 Z_2 は,

$$\|Z_2\| > \max\{\sqrt{\rho_e}, \sigma_{\max}(D)\}$$

を満たすとする. インナー関数は, $-A$ の固有値で解析的であるとする. このとき $\|Z_2\| := \sigma_o$ が, 仮定1を満たすとするならば,

$$\sigma_o = \max\{\sigma : \det M_\sigma \phi^\sim(H_\sigma) N = 0\}$$

が成り立つ. さらに

$$M_{\sigma_o} \phi^\sim(H_{\sigma_o}) N \zeta = 0$$

を満たす $\zeta \neq 0$ を選び,

$$\eta(0) = N \zeta, \quad \eta(1) = \phi^\sim(H_{\sigma_o}) \eta(0),$$

$$\eta_v(1) = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \eta(1)$$

とおく. このとき $\sigma = \sigma_o$ に対するシュミット対(40)は,

$$\begin{bmatrix} \hat{f}_0(s) \\ \hat{g}_0(s) \end{bmatrix} = K_{\sigma_o} (sI - H_{\sigma_o})^{-1} \eta(0) \quad (41)$$

$$-\phi(s) K_{\sigma_o} (sI - H_{\sigma_o})^{-1} \eta(1),$$

$$\begin{bmatrix} \hat{f}_{1:\infty}(s) \\ \hat{g}_{v,1:\infty}(s) \end{bmatrix} = K_{v,\sigma_o} (sI - H_{v,\sigma_o})^{-1} \eta_v(1) \quad (42)$$

によって与えられる.

(証明) 伝達関数 $w(s)$ および $v(s)$ から定理1で求めた離散時間系をそれぞれ (A_w, B_w, C_w, D_w) , (A_v, B_v, C_v, D_v)

とする. まず必要性を示す. $\sigma > \max\{\sigma_{\max}(D), \|v\|_\infty\}$ は, 仮定1を満たす Z_2 の特異値であるとし, シュミット対(40)を考える. 式(40)のうち Z_2 に関する式を定理1にしたがって記述すると

$$\xi_w(1) = A_w \xi_w(0) + B_w \hat{f}_0, \quad \xi_w(0) = 0,$$

$$\sigma \hat{g}_{w,0} = C_w \xi_w(0) + D_w \hat{f}_0,$$

$$\xi_v(k+1) = A_v \xi_v(k) + B_v \hat{f}_k, \quad \xi_{s,v}(0) = 0,$$

$$\sigma \hat{g}_{v,k} = C_v \xi_v(k) + D_v \hat{f}_k$$

である. 一方, 式(40)のうち Z_2^* に関する式を定理2にしたがって記述すると

$$\zeta_w(0) = A_1^* \zeta_w(1) + C_1^* \hat{g}_{w,0}, \quad \zeta_w(1) = 0,$$

$$\zeta_v(k) = A_2^* \zeta_v(k+1) + C_2^* \hat{g}_{v,k},$$

$$\sigma \hat{f}_0 = B_1^* \zeta_w(1) + D_1^* \hat{g}_{w,0} + B_2^* \zeta_v(1) + D_2^* \hat{g}_{v,0},$$

$$\sigma \hat{f}_k = B_2^* \zeta_v(k+1) + D_2^* \hat{g}_{v,k}, \quad k > 0$$

である. ここで

$$\eta(k) = \begin{bmatrix} \xi_w(k) \\ \xi_v(k) \\ \zeta_w(k) \\ \zeta_v(k) \end{bmatrix}, \quad \eta_v(k) = \begin{bmatrix} \xi_v(k) \\ \zeta_v(k) \end{bmatrix} \quad (43)$$

と定めて, 補題1を適用すれば,

$$\eta(1) = \phi^\sim(H_\sigma) \eta(0), \quad (44)$$

$$\eta_v(k) = \phi^\sim(H_{v,\sigma})^{k-1} \eta_v(1), \quad k > 0,$$

式(41), および $k \geq 1$ について

$$\begin{bmatrix} \hat{f}_k(s) \\ \hat{g}_{v,k}(s) \end{bmatrix} = K_{v,\sigma_o} (sI - H_{v,\sigma_o})^{-1} \eta_v(k) \quad (45)$$

$$-\phi(s) K_{v,\sigma_o} (sI - H_{v,\sigma_o})^{-1} \eta_v(k+1)$$

を得る. 式(45)から式(42)を得る. $\hat{f}, \hat{g} \in H^2$ より $k \rightarrow 0$ のとき $\eta_v(k) \rightarrow 0$ である. したがって $\eta_v(1)$ は $\phi^\sim(H_{v,\sigma})$ の離散時間系としての安定固有空間に属している. それは, $H_{v,\sigma}$ の連続時間系としての安定固有空間に等しいので,

$$\begin{bmatrix} -X_\sigma & I \end{bmatrix} \eta_v(1) = 0$$

が成り立つ. 境界条件 $\xi_w(0) = 0$, $\xi_v(0) = 0$, $\zeta_w(1) = 0$ と式(44)より

$$\left(\begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & -X_\sigma & 0 & I \end{bmatrix} \phi^\sim(H_\sigma) \right) \times \eta(0) = 0$$

である. これより $\zeta(0) = [\zeta_w(0)^T \zeta_v(0)^T]^T$ とおくと

$$M_\sigma \phi^\sim(H_\sigma) N \zeta(0) = 0 \quad (46)$$

が成り立っている. $\zeta(0) \neq 0$ なので $\det M_\sigma \phi^\sim(H_\sigma) N = 0$ を満たす. 次に十分性を示す. $\det M_\sigma \phi^\sim(H_\sigma) N = 0$ を満たす $\sigma > 0$ を考える. すると式(46)を満たす $\zeta(0) \neq 0$ がある.

$\xi_w(0) = 0, \xi_v(0) = 0$ において、式 (43) の左式に基づいて $\eta(0)$ を定める。このとき、補題 1 より Z_2 ならびに Z_2^* の離散時間系表現は、 $\eta(0)$ を初期値にして一意解をもち、そのようにして構成された $\hat{f}, \hat{g}$ は定理のように記述されるシュミット対である。ゆえに σ は Z_2 の、したがって Z の特異値である。 $\square$

(注意) 定理 4 は、文献 24) で得られている超越方程式と同じであり、文献 9) で得られているハミルトン行列を用いた方程式を座標変換行列を用いずに表現したものである。なお、基底を用いない特異値公式の導出は、文献 10) ですでに得られている。

5. おわりに

本論文では、連続時間系が与えられたとき、スカラー値をとるインナー関数に対して定まる左シフト不変部分空間に入出力値をとる等価な離散時間系（リフトされた系）を構成した。リフトされた系を用いて、ハンケル作用素、混合ハンケル・テプリッツ作用素の特異値を求める超越方程式を導き、特異ベクトルの公式を与えた。この方法の特徴は、基底を用いずとも特異値公式を導出できること、シュミット対の方程式を離散時間系の二点境界値問題として与えることができるので、離散時間線形系の扱いの類推によって、理論を展開できる簡明さがあることである。

参考文献

- 1) H. Dym, T.T. Georgiou and M.C. Smith: Explicit formulas for optimally robust controllers for delay systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-40-4**, 656/669 (1995)
- 2) D.S. Flamm and S.K. Mitter: H^∞ sensitivity minimization for delay systems, *Systems & Control Letters*, **9**, 17/24 (1987)
- 3) C. Foias, A. Tannenbaum and G. Zames: Weighted sensitivity minimization for delay systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-31-8**, 763/767 (1988)
- 4) B.A. Francis: *A Course in H_∞ Control Theory*, Springer-Verlag (1987)
- 5) C. Glader, G. Högnäs, P.M. Mäkilä and H.T. Toivonen: Approximation of delay systems, *Int. J. Control*, **53-2**, 369/390 (1991)
- 6) K. Glover: All optimal Hankel-norm approximation of linear multivariable systems and their L^∞ -error bounds, *Int. J. Control*, **39-6**, 1115/1193 (1984)
- 7) K. Glover, R.F. Curtain and J.R. Partington: Realisation and approximation of linear infinite dimensional systems with error bounds, *SIAM J. Control and optimization*, **26**, 863/898 (1988)
- 8) K. Glover, J. Lam and J.R. Partington: Rational approximation of a class of infinite-dimensional systems I: singular values of Hankel operators, *Mathematics of Control, Signals, and Systems*, **3**, 325/344 (1990)
- 9) 平田健太郎, 山本裕, A. Tannenbaum, 片山徹: 無限次元 2 ブロック H^∞ 問題に対する解法—安定プラントの場合—計測自動制御学会論文集, **32-10**, 1416/1424 (1996)
- 10) K. Hirata, Y. Yamamoto and A.R. Tannenbaum: A Hamiltonian-based Solution to the two-block H^∞ problem for general plants in H^∞ and rational weights, *Systems & Control Letters*, **40-2**, 83/96 (2000)
- 11) K. Hoffman: *Banach Spaces of Analytic Functions*, Prentice-Hall (1962)
- 12) S.Y. Kung and D.W. Lin: Optimal Hankel norm model reductions: multivariable systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-26**, 832/852 (1981)
- 13) T.A. Lypchuk, M.C. Smith and A. Tannenbaum: Weighted sensitivity minimization: general plants in H_∞ and rational weights, *Linear Algebra & its Applications*, **109**, 71/90 (1988)
- 14) P.M. Mäkilä: Approximation of stable systems by Laguerre filters, *Automatica*, **26-2**, 333/345 (1990)
- 15) Y. Ohta: Hankel singular values and vectors of a class of infinite dimensional systems: exact Hamiltonian formulas for control and approximation problems, *Mathematics of Control, Signals, and Systems*, **12-4**, 361/375 (1999)
- 16) Y. Ohta and A. Kojima: Formulas for Hankel singular values and vectors for a class of input delay systems, *Automatica*, **35-2**, 201/215 (1999)
- 17) H. Özbay and A. Tannenbaum: A skew Toeplitz approach to the H^∞ optimal control of multivariable distributed systems, *SIAM Journal Control and Optimization*, **28-3**, 653/670 (1990)
- 18) L. Pernebo and L.M. Silverman: Model reduction via balanced state space representation, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-27-2**, 382/387 (1982)
- 19) W. Rudin: *Real and Complex Analysis*, Third Edition, McGraw-Hill (1987)
- 20) M.C. Smith: Singular values and vectors of a class of Hankel operators, *Systems & Control Letters*, **12**, 301/308 (1989)
- 21) Y. Yamamoto: A function space approach to sampled data control systems and tracking problems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-39-4**, 703/714 (1994)
- 22) Y. Yamamoto, K. Hirata and A. Tannenbaum: Some remarks on Hamiltonians and the infinite-dimensional one block H^∞ problem, *Systems & Control Letters*, **29**, 111/117 (1996)
- 23) G. Zames: Feedback and optimal sensitivity: Model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximate inverses, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-26-2**, 301/320 (1981)
- 24) G. Zames and S.K. Mitter: A note on essential spectra and norms of mixed Hankel-Toeplitz operators, *Systems & Control Letters*, **10**, 159/165 (1988)
- 25) K. Zhou and P.P. Khargonekar: On the weighted sensitivity minimization problem for delay systems, *Systems & Control Letters*, **8**, 307/312 (1987)

[著者紹介]

太田 快人 (正会員)

1980 年大阪大学工学部電子工学科卒業。83 年大阪大学大学院工学研究科電子工学専攻後期課程中退。同年大阪大学工学部電子工学科助手、現在大阪大学大学院工学研究科電子制御機械工学専攻教授、この間 86 年から 88 年米国マサチューセッツ工科大学情報と決定システム研究所客員研究員。99 年より *European Journal of Control* の Associate Editor。制御理論の研究に従事（工学博士）。