支点垂直駆動型倒立振子の制御

—周期入力による漸近安定化—[†]

梶原 秀一*・橋本 幸男**・土谷 武士***

Control of a Virtically-Driven Inverted Pendulum

—Asymptotically Stabilization via Periodic Input—[†]

Hidekazu KAJIWARA*, Yukio HASHIMOTO** and Takeshi TSUCHIYA***

Periodic stimulation sometimes stabilizes mechanical systems dynamically. we have investigated a virtically-driven inverted pendulum from a view point of such a dynamic stabilization. First, the stability of the pendulum by the period input is analyzed, and it is shown that the system becomes the parametric excitation system, when period input which modulated the amplitude is added. Next, it is theoretically shown that the pendulum can be asymptotically stabilized, when the amplitude of the input is modulated in the timing which suppresses the parametric excitation. This timing can be realized by modulating the amplitude by the nonlinear feedback which consists of angle and an angular velocity of the pendulum in period doubling of the motion of the pendulum. Finally, the result of verifying the effectiveness by the real machine is shown.

Key Words: inverted pendulum, periodic input, mathieu's equation, parametric excitation

1. はじめに

非線形なシステムを平衡点のまわりで線形化して制御モデルを作り、線形レギュレータを設計して制御目的を達成することが多く行われてきた。しかし、非線形なシステムの中には線形近似モデルが不可制御となり線形制御が適用できず、従来知られている非線形制御でも十分な目的が達成できないものが存在する。著者らはこのようなシステムとして、支点を鉛直軸に拘束して動かす倒立振子の制御問題を取り上げ、周期的な入力により振子を安定化させる方法について検討してきた^{1),2)}。文献1)では支点を鉛直軸方向に動かす倒立振子は、平衡点近傍での線形近似モデルが不可制御となること、非線形制御により振子を安定化できるが、支点の位置が下方に大きく移動してしまい、現実にこのような制御が実現できないことを示した。さらに、このシステムを制御するアプローチとして、周期的な入力を加えることにより、振子を

動的に安定化させる方法が有効であることを報告した。文献2)では、文献1)では一定であった周期入力の振幅を、振子の状態量をフィードバックして変調することにより、振子を漸近的に安定化できることを明らかにした。本論文では文献2)の手法を実際に実機に適用し、その有効性を確認した結果について報告する。

支点を鉛直軸方向に動かす振子の制御問題は、これまでに柔軟構造物の振動制御に関する研究として、さまざまな方法が提案されてきた^{3)~5)}。谷ら³⁾は、支点を鉛直軸方向に動かす振子は、双線形システムであることを示し、2次形式状態フィードバックによる振子の制振制御について報告した。さらに、川辺ら⁴⁾はこのシステムにVSS制御を適用し、大振幅からでも振子を制振できるロバストな制御則を提案した。また、飯田ら⁵⁾はシステムの力学的エネルギーに基づくリアプノフ関数を用いて導出された制御則により、振子の制振と支点の位置制御を同時に実現できることを示した。従来の研究では、安定な平衡点へ振子を漸近的に安定化させる制御が主に議論されてきたようであるが、不安定な平衡点への制御はこれまであまり議論されていないようである。

本論文ではまず、倒立振子のダイナミクスを導出し、支点を周期的に上下させたときの振子の安定性を解析する。次に、周期入力を加えるとシステムはパラメータ励振系となることを示し、さらに、パラメータ励振を抑制するタイミングで振幅を変調すると、振子を漸近安定化できることを示す。最後に実際に倒立振子を製作して、本研究の手法を適用した結果

[†] 第31回SICE北海道支部学術講演会で一部発表(1999・2)

* 釧路工業高等専門学校電子工学科 釧路市大楽毛西 2-32-1

** 室蘭工業大学電気電子工学科 室蘭市水元町 27-1

*** 北海道大学大学院工学研究科 札幌市北区北 13 西 8

* Department of Electronic Engineering, Kushiro National College of Technology, 2-32-1, Nishi, Otonoshike, Kushiro

** Department of Electrical and Electronic Engineering, Muroran Institute of Tech., 27-1, Mizumoto-cho, Muroran

*** Graduate School of Engineering, Hokkaido university, Kita 13 Nishi 8, Kita-ku, Sapporo

(Received April 6, 2000)

(Revised October 10, 2000)

Fig. 1 Vertically-driven inverted pendulum system

について述べる。

2. 支点垂直駆動型倒立振子のモデルとダイナミクス

2.1 実験装置

Fig. 1 に製作した倒立振子の概略図を示す。振子の支点はモータに取り付けたアームを回転させて上下させる。振子の支点部と対向した位置にあるアーム末端部にはカウンターウェイトが取り付けられており、アームの重心位置とモータの回転軸を一致させて、モータの回転運動が滑らかになるようにしている。制御器には NEC 社製 PC9801DX を使い、制御プロセスは C 言語で記述し、制御周期は 20[msec] で行った。制御器の出力は 8 ビットの D/A 変換器を介して増幅器に送られモータを駆動する。モータと振子の回転角度はロータリーエンコーダにより観測し、角速度の観測値にはこの値の制御周期ごとの後退差分値を用いた。

なお、倒立振子のベース部を水平方向から $\phi = 0.02$ [rad] 傾けてあるが、これは振子の重心に加わる重力加速度を小さくして、実験を容易にするためである。倒立振子のベース部を傾けずに $\phi = 0$ とした場合、本システムは自由関節を持つ平面 2 関節アームとなる。このようなシステムについては、中村らが先駆的な研究を行っている^{6), 7)}。文献 6) では、周期入力により自由関節を安定な平衡点へ漸近安定化する方法が示されている。また文献 7) では、平均化法によりシステムの非線形挙動を解析し、振幅変調入力による制御法が解析的に構築されている。平面 2 関節アームとは異なり倒立振子の制御では重力の影響を考慮しなければならないが、文献 6), 7) で提案されている方法を直接利用することができないが、支点を鉛直軸方向に動かす倒立振子は、高い振動数で支点を上下させると、振子を不安定な平衡点まわりに安定化でき、その安定条件は平均化法により解析できることが知られている^{8), 9)}。このようなことから、本研究でも平均化法の考え方を利用して倒立振子の周期入力に対する挙動を解析し、不安定な平衡点へ振子を漸近的に安定化する方法を検討した。

2.2 倒立振子のダイナミクス

倒立振子の運動方程式を導出するために、Fig. 2 に示すように座標系を設定する。座標系の原点はモータ軸にとり、水

Fig. 2 Coordinate system of inverted pendulum system

平面から ϕ [rad] 傾いた平面上に x 軸, y 軸をとる。ここで、以下のように記号を定義する。

- θ_1 : アームの回転角
- θ_2 : 振子の回転角
- l_1 : アームの長さ
- l_2 : 振子の重心位置
- m : 振子の質量
- I_1 : アームのモータ軸まわりの慣性モーメント
- I_2 : 振子の重心まわりの慣性モーメント
- τ : モータの発生トルク
- g : 重力加速度

このとき、振子の運動エネルギー T は次のように表される。

$$T = \frac{1}{2} (I_1 + m l_1^2) \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} (I_2 + m l_2^2) \dot{\theta}_2^2 + m l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \quad (1)$$

厳密な運動エネルギーは、振子とアームが水平面から ϕ [rad] 傾きながら鉛直軸周りに回転するエネルギーも考えなければならないが、実験で使用している振子とアームは薄い板であり、このエネルギーは微小であるので、(1) 式ではこのエネルギーは考慮していない。

ポテンシャルエネルギー U はアームのベースが傾いていることにより、重心にかかる重力が $-mg \sin \phi$ となることから

$$U = m g l_1 \sin \phi \sin \theta_1 + m g l_2 \sin \phi \cos \theta_2 \quad (2)$$

となる。

(1), (2) 式をラグランジュの運動方程式に代入して、倒立振子の運動方程式を求めると以下の式が得られる。

$$\begin{aligned} (I_1 + m l_1^2) \ddot{\theta}_1 + m l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \\ - m l_1 l_2 \dot{\theta}_2^2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + m g l_1 \sin \phi \cos \theta_1 = \tau(3) \\ m l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_1 - \theta_2) + (I_2 + m l_2^2) \ddot{\theta}_2 \\ + m l_1 l_2 \dot{\theta}_1^2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m g l_2 \sin \phi \sin \theta_2 = 0(4) \end{aligned}$$

3. 周期入力による倒立振子の安定化

いま、アームを次式のような周期関数で上下させて、振子を安定化させることを考える。

$$\theta_1 = \alpha \cos(\omega t) \quad (5)$$

ただし, α は正の定数

上式を (4) 式に代入し, $|\theta_1|, |\theta_2| \ll 1$ として整理すると次式となる.

$$\begin{aligned}\ddot{\theta}_2 &= \lambda \{g \sin \phi - \alpha \omega^2 \cos(\omega t)\} \theta_2 \\ &\quad + \ell_1 \lambda \alpha^2 \omega^2 \cos(2\omega t) \\ \lambda &= \frac{m \ell_2}{I_2 + m \ell_2^2}\end{aligned}\quad (6)$$

今回製作した倒立振子は, アームを回転させることにより支点を上下させているため, 支点は y 軸方向以外にも x 軸方向に若干移動する. (6) 式と支点を直線的に上下させた場合の倒立振子のダイナミクス²⁾を比較すると, (6) 式の右辺第 2 項が支点を直線的に上下させた場合には現れない. よって, この項が支点が x 軸方向に移動することにより生じる項であることがわかる. 本章ではアームの回転角は小さく $\alpha \ll 1$, 右辺第 2 項の影響は小さいとして, この項を無視した次式を倒立振子の解析モデルとする.

$$\ddot{\theta}_2 = \lambda \{g \sin \phi - \alpha \omega^2 \cos(\omega t)\} \theta_2 \quad (7)$$

上式はパラメータ励振系である Mathieu 方程式と呼ばれ, その安定性は詳しく調べられていて, 高い振動数で支点を上下させると, 振子は不安定な平衡点まわりに安定化されることが知られている^{8), 9)}. 文献 8) では摂動法の考え方を利用して, Mathieu 方程式の安定条件を求める方法を紹介している. また文献 9) では, 振子の運動は支点を高い振動数で上下させたことにより生じる高周波の振動と, その振動の結果生じる平衡点まわりでの低周波の運動とが組み合わさったものであると考え, 高周波の振動に対しては時間平均を取り, 低周波の運動に対してのみ挙動の解析を行う平均化法の考え方を利用して, 振子の安定条件を導出する方法を紹介している. この方法は摂動法による解析方法に比べて, 簡単な方法であるにも関わらず, 得られる安定条件は同じであり, 解析した振子の挙動も直観的に理解しやすい. そこで, ここでは文献 9) の方法をもとに周期的な入力による振子の挙動を解析し, 次にその結果をもとに, 振幅を変調した周期入力により振子を漸近的に安定化する方法について検討する.

3.1 倒立振子の安定条件

支点を (5) 式で上下させて, 振子が平衡点まわりに安定化されるとき, (7) 式の周期解は, 支点を高い振動数で上下させたことにより生じる高周波の振動 ζ と, その振動の結果生じる平衡点のまわりでの低周波の運動 Θ から成るとして

$$\theta_2 = \Theta + \zeta \quad (8)$$

とおく. また, ζ の変化は (5) 式により生じるとして, 次式を仮定する.

$$\ddot{\zeta} = -\lambda \alpha \omega^2 \cos(\omega t) \Theta \quad (9)$$

上式をゆるやかに変動する Θ の変化を無視して積分すると

$$\zeta = \lambda \alpha \cos(\omega t) \Theta \quad (10)$$

となる.

(8) 式を (7) 式に代入し, (9) (10) 式の関係を利用して整理すると次式を得る.

$$\begin{aligned}\ddot{\Theta} &= \lambda g \sin \phi \Theta + \lambda^2 g \sin \phi \alpha \cos(\omega t) \Theta \\ &\quad - \lambda^2 \alpha^2 \omega^2 \cos^2(\omega t) \Theta\end{aligned}\quad (11)$$

上式の右辺第 2 項と第 3 項は周波数の高い成分であるから, これらの成分については時間平均をとり, 振子の周波数の低い運動に対する近似的な運動方程式として次式を採用する.

$$\begin{aligned}\ddot{\Theta} &= -\Omega \Theta \\ \Omega &= \frac{\lambda^2 \alpha^2 \omega^2}{2} - \lambda g \sin \phi\end{aligned}\quad (12)$$

このシステムの極は $\Omega > 0$ のとき $\pm i\sqrt{\Omega}$ となり, すべての極の実数部が 0 となることから, 振れ角 Θ は平衡点まわりで安定であることが分かる.

よって, (5) 式で支点を上下させた時, 振子が安定化される振幅 α と周期 ω は $\Omega > 0$ となる条件より次式で与えられる.

$$\alpha \omega > \sqrt{\frac{2g \sin \phi}{\lambda}} \quad (13)$$

3.2 振幅変調入力による振子の漸近安定化

前節では支点を周期的に上下させることにより, 振子を平衡点まわりに安定化できることを示した. ここでは, 一定の振幅ではなく, 振幅を変調した周期関数で支点を上下させて, 振子を制御することを考える.

$$\theta_1 = \alpha(1 + \varepsilon) \cos(\omega t) \quad (14)$$

ただし, α, ω は (13) 式を満たすように選ばれているとし, ε は時間的にゆるやかに変化する正の変数であると仮定する.

上式で支点を上下させたとき, $\varepsilon \ll 1$ とすると, 振子の挙動は (5) 式で支点を動かした場合と大きく変わらないと予想される. よって, 前節の解析をふまえ, (14) 式で支点を動かしたとき, 振子の運動は (8), (10) 式より

$$\theta_2 = \Theta + \lambda \alpha \cos(\omega t) \Theta \quad (15)$$

で表され, 周波数の低い運動 Θ は (12) 式の解として

$$\Theta = A \cos(\sqrt{\Omega} t) \quad (16)$$

で表されるとする. ただし, 振幅 A は時間的にゆるやかに変化する正の変数であると仮定する.

(14), (15) 式を (7) 式に代入し, 高周波成分については時間平均をとると, Θ に対する近似的な運動方程式

$$\begin{aligned}\ddot{\Theta} &= -(\Omega + \gamma \varepsilon) \Theta \\ \gamma &= \frac{\lambda^2 \alpha^2 \omega^2}{2}\end{aligned}\quad (17)$$

が得られる.

上式は ε を周期的に変化させると (7) 式と同様に Mathieu 方程式となることがわかる. ただし, 上式は (7) 式と異なり, 定数係数の符号が負であることから固有周期 $\sqrt{\Omega}$ の 2 倍の周期で ε を変化させるとパラメータ励振が起きるシステムであることが分かる. そこでここでは, 振子を漸近的に安定化させ

るために、パラメータ励振を抑制するタイミングでパラメータを変化させる制御方法を採用する¹⁰⁾。

いま、振子の周波数の低い運動をフィードバックして次式で ε を変化させるとする。

$$\varepsilon = \sigma \Theta \dot{\Theta} \quad (18)$$

ただし、 σ は正の定数で $\sigma \ll 1$ とする。

上式を(16)式の関係を利用して整理すると

$$\varepsilon = -\frac{\sigma\sqrt{\Omega}A^2}{2} \sin(2\sqrt{\Omega}t) \quad (19)$$

となり、(18)式は振子の周期の2倍で変化していることに相当する。

いま、リアプノフ関数の候補として次の正定関数を採用する。

$$V = \frac{1}{2}\Omega\Theta^2 + \frac{1}{2}\dot{\Theta}^2 \quad (20)$$

上式を時間について微分し、(17)、(18)式を考慮すると次式となる。

$$\dot{V} = -\gamma\sigma\Theta^2\dot{\Theta}^2 \leq 0 \quad (21)$$

よって、 $t \rightarrow \infty$ のとき、 $\Theta \rightarrow 0$ となることが分かる。

以上の解析より、振子の低周波運動の2倍の周期で、周期入力の変幅を変調することにより、振子を漸近的に安定化できることがわかる。

4. 実験

本章ではこれまでに述べた制御方法の有効性を確認するために、実機により検証を行った結果について述べる。

4.1 実験方法

実験ではアームを次式で上下させて振子の制御を行った。

$$\theta_1 = \alpha(1 + \beta AG_1 AG_2 \Theta \dot{\Theta}) \cos(\omega t) \quad (22)$$

ただし、 β は正の定数、 AG_1, AG_2 はそれぞれ $\Theta, \dot{\Theta}$ の振幅を1にする変数。

$\Theta, \dot{\Theta}$ は観測した振子の角度と角速度をカットオフ周波数0.5[Hz]のローパスフィルタに入力した時の出力である。また、上式では $\Theta, \dot{\Theta}$ にオートゲインコントロールをかけて、周期入力の変調度を一定としている。これは、振子の低振幅時に変調度が小さくなり、振子を制御できなくなるのを防ぐためである。

アームを(22)式で運動させる制御則は付録Aに示す方法を採用した。

実験装置の各パラメータをTable 1に示す。

4.2 実験結果

周波数2.5[Hz]の一定振幅で支点を上下させたときの振子の挙動をFig. 3(a)に、そのときのアームの回転角をFig. 3(b)に示す。同様に、振幅を変調した周期入力により振子を制御したときの結果をFig. 4に示す。どちらも振子の振れ角が0.6[rad]付近から制御を開始した場合である。一定振幅で支点を上下させた場合も、支点部の摩擦の影響により振子の振

Fig. 3 Time variation of pendulum by period input of which the amplitude is fixed

Fig. 4 Time variation of the pendulum by period input of which the amplitude is modulated

Table 1 Parameters of vertically-driven inverted pendulum

ℓ_1	0.15	ℓ_2	0.1
I_1	0.0028	I_2	0.0001
m	0.03	g	9.8

幅が減少しているが、振幅変調入力による制御の方が振子の収束速度が速く、効果的に制御則が働いていることがわかる。

5. おわりに

本論文では、支点を鉛直軸方向に拘束して動かす倒立振子の制御問題を取り上げ、振子の状態量をフィードバックしてパラメータ励振を抑制するタイミングで振幅を変調することにより、振子を不安定な平衡点へ漸近安定化できることを理論的に示した。さらに、その有効性を実験により確認した。

本論文では実験装置のベース部を傾け、倒立振子を制御対象として扱ったが、ベース部を傾けずに平面マニピュレータとして実験を行った場合でも、支点を上下に動かすことで安定な平衡点 ($\theta_2 = 0$) へ振子を漸近的に安定化することが可能であった。そこで、重力の影響を受けない平面マニピュレータの制御にも本研究の手法が適用できると考え、第3関節のみが自由関節である平面3関節マニピュレータの制御を取り上げ、自由関節の支点部を直線的に動かすことで、自由関節を目標姿勢角に漸近的に安定化できることをシミュレーションにより確認した¹¹⁾。このようなことから、今後は自由関節を持つ平面マニピュレータの制御に、本研究の手法を応用していきたいと考えている。

参考文献

- 1) 梶原, 橋本, 土谷, 松田: 支点が鉛直軸に拘束された倒立振子の制御—動的安定化—, 第25回計測自動制御学会北海道支部学術講演会論文集, 27/28(1994)
- 2) 梶原, 橋本: 周期入力による倒立振子の動的安定化, 第31回計測自動制御学会北海道支部学術講演会論文集, 57/58(1999)
- 3) 谷, 越後屋: 単振子の支点鉛直変動による振動制御, 日本機械学会論文集 (C), 59-564, 2439/2443(1993)
- 4) 川辺, 飯田, 吉田: 支点の鉛直変動による単振子の振動制御, 日本機械学会論文集 (C), 64-621, 1502/1507(1998)
- 5) 飯田, 吉田, 川辺: 支点鉛直変動型振り子系の安定化制御 (特に力学的エネルギーに基づくリアプノフ型関数を用いて), 日本機械学会論文集 (C), 65-633, 1829/1834(1999)
- 6) 中村, 岩本, 吉本: ドリフト項をもつ非ホロノミック機械の制御, 日本ロボット学会誌, 13-6, 830/837(1995)
- 7) 中村, 鈴木: 非ホロノミック機械系の平均化法による挙動解析と振幅変調制御—平面2R自由関節マニピュレータの位置制御—, 日本ロボット学会誌, 16-3, 407-416(1998)
- 8) 佐藤 力: 非線形振動論, 115/119, 朝倉書店 (1970)
- 9) 戸田盛和: 振動論, 40/42, 培風館 (1968)
- 10) 梶原, 橋本, 松田, 土谷: 引き込みを利用したブランコの振れ制御, 日本ロボット学会誌, 17-4, 64/69(1999)
- 11) 梶原, 橋本: 非駆動関節を有する水平3軸マニピュレータの制御—周期入力による漸近安定化—, 日本機械学会 ROBOMECH'99 講演論文集, 2A1-55-107(1999)

《付 録》

A. (22) 式の運動を実現する制御則

(3) 式において、モータの発生トルク τ は次式で表される。

$$\tau = -n^2 J_m \ddot{\theta}_1 - n^2 \left(D + \frac{K^2}{R} \right) \dot{\theta}_1 + \frac{nK}{R} v \quad (\text{A.1})$$

ただし、モータの電氣的時定数は機械系の時定数よりも小さいとし、電気系のダイナミクスを無視した。また、各記号は

J_m : 電機子慣性モーメント

D : 速度粘性摩擦定数

K : モータ定数

R : 電機子巻線抵抗

n : ギヤ比

v : 入力電圧

をそれぞれ表す。

上式を (3) 式に代入すると、倒立振子の運動方程式を実際に制御できるモータ電圧を入力として書き表すことができる。

$$J\ddot{\theta} + P + G = Qv \quad (\text{A.2})$$

ただし、

$$J = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{12} & J_{22} \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} Q_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$J_1 = I_1 + m\ell_1^2 + n^2 J_m$$

$$J_2 = m\ell_1\ell_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)$$

$$J_3 = I_2 + m\ell_2^2$$

$$P_1 = n^2 \left(D + \frac{K^2}{R} \right) \dot{\theta}_1 - m\ell_1\ell_2\ddot{\theta}_2^2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

$$P_2 = m\ell_1\ell_2\ddot{\theta}_1^2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

$$G_1 = mg \sin \phi \cos \theta_1$$

$$G_2 = -mg \sin \phi \sin \theta_2$$

$$Q_1 = \frac{nK}{R}$$

(A.2) 式を $\ddot{\theta}_1, \ddot{\theta}_2$ について解くと

$$\ddot{\theta}_1 = A_1 + B_1 v \quad (\text{A.3})$$

$$\ddot{\theta}_2 = A_2 + B_2 v \quad (\text{A.4})$$

ただし、

$$JJ = J_1 J_3 - J_2^2$$

$$A_1 = -\frac{J_3(P_1 + G_1) - J_2(P_2 + G_2)}{JJ}$$

$$A_2 = -\frac{J_1(P_2 + G_2) - J_2(P_1 + G_1)}{JJ}$$

$$B_1 = \frac{J_3 Q_1}{JJ}$$

$$B_2 = -\frac{J_2 Q_1}{JJ}$$

Table A.1 Parameters of motor and van der Pol's equation

R	7.8	N	100	D	7.5×10^{-5}	K	0.028
J_m	3.1×10^{-6}	ε	1.5	ω	15.7	γ	0.5
F	25	μ	0.68	K_p	1000	K_d	80

ここで u を新しい入力とし,

$$v = \frac{u - A_1}{B_1} \quad (\text{A.5})$$

として, 上式を (A.3) 式に代入すると次式を得る.

$$\ddot{\theta}_1 = u \quad (\text{A.6})$$

ここで, 目標軌道を θ_M とし, θ_M は時間について 2 回微分可能とする. モータの回転角 θ_1 を目標軌道 θ_M へ追従させるために入力 u を次式のように構成する.

$$u = \ddot{\theta}_M + K_d(\dot{\theta}_M - \dot{\theta}_1) + K_p(\theta_M - \theta_1) \quad (\text{A.7})$$

(A.7) 式を (A.6) 式に代入し, $e = \theta_M - \theta_1$ として整理すると次式となる.

$$\ddot{e} + K_d\dot{e} + K_p e = 0 \quad (\text{A.8})$$

よって, (A.8) 式が漸近安定になるように K_d, K_p を選んでおけば, $t \rightarrow \infty$ のとき $e \rightarrow 0$ となり, θ_1 の θ_M へ追従が実現できる. よって, アームの運動を (22) 式とするには目標軌道を次式とすればよいことがわかる.

$$\theta_M = \alpha(1 + \beta AG_1 AG_2 \Theta \dot{\Theta}) \cos(\omega t) \quad (\text{A.9})$$

しかし, (A.9) 式の関係を考慮して入力 u を構成すると, $\ddot{\Theta}, \ddot{\Theta}$ などの観測できない状態量が必要となり, 実際に制御入力を実現することが難しくなる. そこで, 本研究では非線形振動子の周期解を利用して目標軌道を次式のように構成した.

$$\theta_M = \mu x \quad (\text{A.10})$$

μ は正の定数, x は次式で与えられる van der Pol 方程式の解である.

$$\ddot{x} - \varepsilon(1 - \dot{x}^2)\dot{x} + \omega^2 x = FH \quad (\text{A.11})$$

$$H = (1 + \beta AG_1 AG_2 \Theta \dot{\Theta}) \sin(\omega t) \quad (\text{A.12})$$

ただし, ε は正の定数, AG_1, AG_2 はそれぞれ $\theta_2, \dot{\theta}_2$ の振幅を 1 にする変数である.

van der Pol 方程式に周期的な外力を加えると, その周期解は外力の周期と同期する引き込み現象が起きる¹⁰⁾. いま周期入力を (A.12) 式とすると, 周期解は次式となる.

$$x = \eta(1 + \beta AG_1 AG_2 \Theta \dot{\Theta}) \cos(\omega t) (\eta > 0) \quad (\text{A.13})$$

よって, (A.10) 式において μ を適当に調整すると目標軌道を (A.9) 式とできることがわかる. この場合, 入力 u は

$$u = \mu \ddot{x} + K_d(\mu \dot{x} - \dot{\theta}_1) + K_p(\mu x - \theta_1) \quad (\text{A.14})$$

となり, (A.11) 式の周期解により実際に入力を構成することができる. なお, 実験では van der Pol 方程式の解は制御周期ごとに 4 次の Runge-Kutta-Gill 法により計算した.

Table A.1 に, 実験で使用したモータと van der Pol 方程式の各パラメータを示す.

[著者紹介]

梶原 秀一 (正会員)

1995 年室蘭工業大学博士前期課程電気電子工学専攻修了. 現在釧路工業高等専門学校電子工学科助手. 制御工学, メカトロニクスなどの研究に従事, 日本ロボット学会, 日本機械学会の会員.

橋本 幸男 (正会員)

1979 年室蘭工業大学大学院修士課程電子工学専攻修了. 高校の非常勤講師等を経て 83 年室蘭工業大学電子工学科助手. 90 年より同大学電気電子工学科助手, 現在助教授. 制御工学, メカトロニクスなどの研究に従事. 工学博士, 日本ロボット学会の会員.

土谷 武士 (正会員)

1965 年北海道大学大学院修士課程電気工学専攻修了. 66 年同大学工学部電気工学科講師, 83 年同教授, 97 年より同大学大学院工学研究科教授. 制御工学, ロボット工学, パワーエレクトロニクスなどの研究に従事. 工学博士. システム制御情報学会, 日本機械学会, 電気学会, 日本ファジィ学会, 日本ロボット学会, IEEE の会員.