受動性理論による一般的な非線形システムの動的フィードバック制御†

伊藤 和幸*・志水 清孝**

Dynamic Feedback Control of General Nonlinear Systems via Passivity Theory

Kazuyuki ITO* and Kiyotaka SHIMIZU**

This paper is concerned with stabilizing dynamic feedback control of general nonlinear systems. Control inputs of velocity type are utilized as dynamic feedback control. Two dynamic feedback laws which are proposed can globally asymptotically stabilize general nonlinear systems.

Key Words: passivity theory, dynamic feedback, non affine nonlinear systems, globally asymptotically stabilizing control, control inputs of velocity type

1. はじめに

受動性理論は、近年文献 1) をきっかけに非線形系の解析および設計の道具として再び注目され始め、現在数多くの研究成果が報告されている 4)~8)。

文献 5) において Non Affine 非線形システムに対する受動性理論の適用が研究されており、静的なフィードバック則と動的なフィードバック則が提案されている。しかし、静的なフィードバック則は最後に非線形連立方程式を解くことが必要とされており、特殊な Non Affine 非線形システムでなければ実際に静的なフィードバック制御則をうることは困難である。そこで本論文では動的なフィードバック制御 (速度型制御入力 3)) を考える。方法 1 ではある仮定のもとで Non Affine 非線形システムを大域的漸近安定にすることができる動的フィードバック制御則を提案し、方法 2 ではこの仮定が満たされない場合のアプローチを提案する。

2. 受動性理論

一般的な非線形システム

$$\Sigma: \begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)) \\ y(t) &= h(x(t), u(t)) \end{aligned} \quad (2.1)$$

を考える。ここで $x(t) \in R^n$ は状態ベクトル、 $u(t) \in R^m$ は制御入力ベクトル、 $y(t) \in R^m$ は出力ベクトルである。 $f: R^n \times R^m \rightarrow R^n, h: R^n \times R^m \rightarrow R^m$ は連続微分可能で、一般性を失うことなく $f(0, 0) = 0, h(0, 0) = 0$ とし、システム Σ の原点での安定性を考える。

【定義 1】 (passive)¹⁾ システム Σ が受動的であるとは、 C^0 の準正定関数 $S: R^n \rightarrow R^1 (S(0) = 0)$ が存在して、任意の $u(t), x_0 = x(0)$ に対して

$$S(x(t)) - S(x_0) \leq \int_0^t y^T(\tau) u(\tau) d\tau \quad (2.2)$$

がなりたつことである。ただし、ここでの $x(t)$ は

$x(t) = \Phi(t; x_0, u)$ で、システム Σ の x_0 を初期値、 u を入力とする解軌道である。また $S(x(t))$ は蓄積関数と呼ばれる。 $S(x(t))$ が C^1 の正定関数ならば (2.2) は

$$\dot{S}(x(t)) \leq y^T(t) u(t) \quad (2.3)$$

と等価となる。

受動性を論じる際にはつぎの定義が重要である。

【定義 2】 (zero state observable and zero state detectable)⁷⁾

$$u(t) = 0, y(t) = 0, \forall t \geq 0 \Rightarrow x(t) = 0, \forall t \geq 0$$

がなりたつとき、 Σ は零状態可観測である。

$$u(t) = 0, y(t) = 0, \forall t \geq 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

がなりたつとき、 Σ は零状態可検出である。

このときつぎの補題をうる。

【補題 1】¹⁾ Σ は正定かつプロパーな蓄積関数 $S(x)$ を持つ受動システムとし、また零状態可検出とする。このときこの系は出力フィードバック $u = -\phi(y)$ により原点は大域的漸近安定となる。ただし、関数 $\phi: R^m \rightarrow R^m$ は連続微分可能で、 $\phi(0) = 0, y^T \phi(y) > 0, \forall y \neq 0$ を満たす関数である。

3. 受動性理論による動的フィードバック制御 -1

一般的な非線形システム

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \quad (3.1)$$

を考える。ここで $x(t) \in R^n$ は状態ベクトル、 $u(t) \in R^m$ は制御入力ベクトルで、一般性を失うことなく $0 = f(0, 0)$ とし、システム (3.1) の原点での安定性を考える。

目的は (3.1) に動的フィードバック (速度型制御入力) $\dot{u}(t) = v(t)$ を施し、システム

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \quad (3.2a)$$

$$\dot{u}(t) = v(t) \quad (3.2b)$$

の原点 $x = 0, u = 0$ を大域的漸近安定にすることである。ここで (3.1) をつぎのように変形する^{5), 8)}。

$$\dot{x}(t) = f_0(x(t)) + G(x(t), u(t))u(t) \quad (3.3)$$

関数 $G(x, u)$ は滑らかな関数である。つぎの仮定をおく。

【仮定 1】 (3.1) の自由システム $\dot{x} = f(x, 0) \triangleq f_0(x)$ において、正定かつプロパーな C^1 関数 $V(x)$ が存在し、 $V_x(x)f_0(x) \leq 0, \forall x \in R^n$ がなりたつ。

【仮定 2】 システム

† 第 28 回制御理論シンポジウムで一部発表 (1999・5)

* 横河電機 (株) R & D IT プロジェクトセンター 武蔵野市中町 2-9-32

** 慶應義塾大学理工学部 横浜市港北区日吉 3-14-1

* R & D IT Project Center, Yokogawa Electric Corporation, Tokyo

** Faculty of Science and Technology, Keio University, Yokohama

(Received June 27, 2000)

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0(x) + G(x, u)u \\ -R^{-1}(V_x(x)G(x, u))^T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} O \\ R^{-1} \end{bmatrix} \nu \quad (3.4)$$

において, $\nu(t) = 0, u(t) = 0, \forall t \geq 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$

がなりたつ。ただし, R は正定行列である。

仮定2をつぎのようにいうこともできる。

[仮定2'] システム $\dot{x} = f_0(x), \forall t \geq 0$ において、

$$0 = -(V_x(x)G(x, 0))^T, \forall t \geq 0 \quad (3.5)$$

ならば, $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ がなりたつ。

このとき, つぎの定理がなりたつ。

《定理1》 仮定1, 仮定2または仮定2' がなりたつとする。このときつぎのような閉ループ系

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) = f_0(x) + G(x, u)u \quad (3.6a)$$

$$\dot{u}(t) = -R^{-1}(V_x(x(t))G(x(t), u(t)))^T - R^{-1}\phi(u(t)) \quad (3.6b)$$

の原点 $x = 0, u = 0$ は大域的漸近安定である。ただし, 関数 ϕ は

$$\phi(0) = 0, u^T \phi(u) > 0, \forall u \neq 0 \quad (3.7)$$

を満たすものとし, R は正定行列である。

(証明) システム (3.2) に対して仮想的に出力ベクトル $y(t) \in R^m$ を考え, それが $y = u$ の場合を考える。そのときシステム (3.2) は

$$\dot{x}(t) = f_0(x(t)) + G(x(t), u(t))u(t) \quad (3.8a)$$

$$\dot{u}(t) = v(t) \quad (3.8b)$$

$$y(t) = u(t) \quad (3.8c)$$

となる。このシステムに対し正定かつプロパーな蓄積関数 $S(x, u)$ を考え, つぎのように与える。

$$S(x, u) = V(x) + \frac{1}{2}u^T R u \quad (3.9)$$

(3.9) を時間微分すると

$$\begin{aligned} \dot{S}(x, u) &= V_x(x)\{f_0(x) + G(x, u)u\} + u^T R v \\ &= V_x(x)f_0(x) + u^T \{(V_x(x)G(x, u))^T + Rv\} \end{aligned} \quad (3.10)$$

となる。ここで $\nu = (V_x(x)G(x, u))^T + Rv$ なる変換を考えると, (3.8) は

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0(x) + G(x, u)u \\ -R^{-1}(V_x(x)G(x, u))^T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} O \\ R^{-1} \end{bmatrix} \nu \quad (3.11)$$

$$y = u$$

となり, (3.10) は

$$\dot{S}(x, u) = V_x(x)f_0(x) + u^T \nu \quad (3.12)$$

となる。このとき仮定1と $y = u$ であることを考慮すると $\dot{S}(x, u) \leq y^T \nu$ となり (3.11) は受動的となる。さらに仮定2(2') より (3.11) は零状態可検出である。以上より補題1により (3.11) は静的出力フィードバック $\nu = -\phi(y)$ によって原点 $x = 0, u = 0$ が大域的漸近安定となる。 $y(t) = u(t)$ であることを考えれば, 定理1をうる。■

(注意) 定理1は文献5)の定理4.1を含む。

つぎに関数 $\phi(u)$ について考える。(3.7)を満たす関数 $\phi(u)$ としては, $\phi(u) = Ku, K > 0$ とするなどの設定方法が考えられる。そこでまず以下のような命題を与え, その命題を利用した $\phi(u)$ の設定方法の考察をする。

[命題1] 定理1がなりたつとする。このとき

$$\begin{aligned} \int_0^\infty [-V_x(x(t))f_0(x(t)) + u(t)^T \phi(u(t))] dt \\ = V(x(0)) + \frac{1}{2}u(0)^T R u(0) \end{aligned} \quad (3.13)$$

がなりたつ。

(証明) 定理1において, 蓄積関数 $S(x, u)$ は (3.9) で与えられ, $\lim_{T \rightarrow \infty} S(x(T), u(T)) = 0$ が保証されている。また

$$\begin{aligned} \dot{S}(x, u) &= V_x(x)\{f_0(x) + G(x, u)u\} \\ &\quad + u^T R\{-R^{-1}(V_x(x)G(x, u))^T - R^{-1}\phi(u)\} \\ &= V_x(x)f_0(x) - u^T \phi(u) \end{aligned} \quad (3.14)$$

であるから, 等式 (3.13) の左辺を計算すると,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty [-V_x(x(t))f_0(x(t)) + u(t)^T \phi(u(t))] dt \\ = \int_0^\infty [-\dot{S}(x(t), u(t))] dt \\ = S(x(0), u(0)) - \lim_{T \rightarrow \infty} S(x(T), u(T)) \\ = V(x(0)) + \frac{1}{2}u^T(0)Ru(0) \end{aligned} \quad (3.15)$$

となる。つまり命題1をうる。■

この命題1で重要なのは, 初期点 $x(0), u(0)$ 固定のもとで (3.13) の左辺は関数 ϕ に依存するのに対し, 右辺は定数ということである。つまり $\phi(u)$ を大きく (たとえば K を大きく) 設定すれば, $-V_x(x(t))f_0(x(t))$ と $u(t)^T \phi(u(t))$ の2つのスカラー変数はより速く0に収束するということが期待できる。これは $\phi(u)$ の決め方の一つの指針となる。

以上のような $\phi(u)$ の機能を5節の数値例で具体的に示す。

4. 受動性理論による動的フィードバック制御-2

この節では, 前節で提案した定理1が適用できないときのアプローチを提案する。具体的には定理1で用意されている仮定1が満たされないときのアプローチである。本節ではAffine非線形システムをフィードバック等価変換し受動化する方法¹⁾を応用する。

まずシステム (3.2) をつぎのように書き換え, 出力関数も考えたつぎのようなシステムを考える。

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{u}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x(t), u(t)) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} O \\ I \end{bmatrix} v(t) \quad (4.1a)$$

$$y(t) = h(x(t), u(t)) \quad (4.1b)$$

ここで $y(t) \in R^m$ は任意設定可能 (仮想的) な出力ベクトルである。このシステム (4.1) は制御入力ベクトル v , 出力ベクトル y , 状態ベクトル x, u のAffine非線形システムとみることができる。したがって文献1)で述べられているようなフィードバック等価変換が適用可能である。まず以下の仮定をおく。

[仮定3a]

$h_u(x, u)$ がすべての $x \in R^n, u \in R^m$ において正則である。

[仮定3b]

$\tilde{G}_1(x, u), \tilde{G}_2(x, u), \dots, \tilde{G}_m(x, u)$ は完備である。ただし, $\tilde{G}_i(x, u), i = 1, 2, \dots, m$ は以下のように定義される。

$$[\tilde{G}_1(x, u)\tilde{G}_2(x, u)\dots\tilde{G}_m(x, u)] = \begin{pmatrix} O \\ I \end{pmatrix} h_u(x, u)^{-1}$$

仮定3がなりたつとき座標変換

$$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = T \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \psi(x, u) \\ h(x, u) \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

が存在して ($z \in R^n$), さらにフィードバック

$$v = h_u(x, u)^{-1}\{-h_x(x, u)f(x, u) + \bar{v}\} \quad (4.3)$$

により, (4.1)をつぎのような normal form²⁾ にフィードバック等価変換できる.

$$\dot{z}(t) = \bar{f}(z(t), y(t)) = \bar{f}_0(z(t)) + \bar{G}(z(t), y(t))y(t) \quad (4.4a)$$

$$\dot{y}(t) = \bar{v}(t) \quad (4.4b)$$

(4.1)が大域的弱最小位相系¹⁾ならば, (4.4)は仮定1を満たす. したがってこのとき等価変換とフィードバックにより得られたシステム(4.4)をシステム(3.3)と(3.1b)に対応させれば定理1が適用できる. 数値例で以上のようなアプローチの有効性を示す.

5. 数値例

5.1 3節の方法

一般的な (Non Affine) 非線形システム

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1^3 + x_1 e^{x_2} u^2 \\ \dot{x}_2 &= x_2^2 u \end{aligned} \quad (5.1)$$

を考える. まず, (3.3)のように変形する.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -x_1^3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 e^{x_2} u \\ x_2^2 \end{bmatrix} u$$

ここで $V(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2$ とすると,

$$V_x(x)f_0(x) = -x_1^4 \leq 0$$

より仮定1を満たす. さらに(3.5)に対応する系は

$$\dot{x}_1 = -x_1^3, \quad \dot{x}_2 = 0, \quad \forall t \geq 0$$

において

$$0 = -x_2^3, \quad \forall t \geq 0$$

となり, 仮定2'を満たすことがわかる.

以上より定理1が適用でき, 閉ループ系 ($R=1$)

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1^3 + x_1 e^{x_2} u^2 \\ \dot{x}_2 &= x_2^2 u \\ \dot{u} &= -x_1^2 e^{x_2} u - x_2^3 - \phi(u) \end{aligned} \quad (5.2)$$

の原点 $x=0, u=0$ は大域的漸近安定である.

つぎに命題1を用いて $\phi(u)$ の機能を調べてみる. 命題1よりつぎの関係が得られる.

$$\int_0^\infty [x_1^4(t) + u(t)\phi(u(t))]dt = \frac{1}{2}x_1^2(0) + \frac{1}{2}x_2^2(0) + \frac{1}{2}u(0)^2 \quad (5.3)$$

この等式は左辺 $\phi(u)$ に関係なく常になりたつため, $u\phi(u)$ の値が大きくなるように $\phi(u)$ を設定したとき, $x_1(t), u(t)$ の原点への収束速度は増す. $u\phi(u)$ の値を大きくというのは $\phi(u) = ku, k > 0$ とした場合なら k を大きくすることを意味する. また当然等式(5.3)の右辺の値が小さいほうがその効果は増すため, $u(0) = 0$ とすることが望ましいこともわかる. 以上のような機能が $\phi(u)$ の機能である.

5.2 4節の方法

一般的な (Non Affine) 非線形システム

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= (2x_1 - x_2)u \\ \dot{x}_2 &= -x_1^4 - (x_1 - x_2)u + u^2 \end{aligned} \quad (5.4)$$

を考える. このシステムの自由システム ($u=0$) は $\dot{x}_1 = 0, \dot{x}_2 = -x_1^4$ となり, $\lim_{t \rightarrow \infty} x_2(t) = -\infty$ となり仮定1を満たさない. そこで, 4節で提案したアプローチを適用してみる.

まず, (5.4)を(4.1a)のように書き換える.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2x_1 - x_2)u \\ -x_1^4 - (x_1 - x_2)u + u^2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v \quad (5.5)$$

まずこのシステムに対して出力関数を $y = x_1^2 + u$ とすると, 仮定3がなりたち, 等価座標変換

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ y \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 - x_2 \\ x_1^2 + u \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

と状態フィードバック

$$v = -2x_1(2x_1 - x_2)u + \bar{v} \quad (5.7)$$

により, (5.5)は

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \begin{bmatrix} -z_1^3 - z_1^2 z_2 \\ -z_1^3 - 2z_1^2 z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z_1 + z_2 \\ z_1 + 2z_2 + 2z_1^2 - y \end{bmatrix} y \\ \dot{y} &= \bar{v} \end{aligned} \quad (5.8)$$

と等価変換される. $V(z) = \frac{1}{2}z_1^2 + \frac{1}{2}z_2^2$ を考えると,

$$\begin{aligned} V_z(z)\bar{f}_0(z) &= z_1(-z_1^3 - z_1^2 z_2) + z_2(-z_1^3 - 2z_1^2 z_2) \\ &= -z_1^2 \{(z_1 + z_2)^2 + z_2^2\} \leq 0 \end{aligned} \quad (5.9)$$

となるから, 仮定1を満たし, また仮定2(2')も満たす.

以上より, 定理1が適用できて ($R=1$),

$$\bar{v} = -z_1(z_1 + z_2) - z_2(z_1 + 2z_2 + 2z_1^2 - y) - \phi(y) \quad (5.10)$$

とすると, 閉ループ系(5.8)の原点 $z=0, y=0$ は大域的漸近安定である. したがって逆変換

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ u \end{bmatrix} = T^{-1} \begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_1 - z_2 \\ y - z_1^2 \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

により, $\bar{v}$ をもとの座標に戻して(5.7)からうる

$$\begin{aligned} v &= -2x_1(2x_1 - x_2)u + (x_1 - x_2)(-x_1^2 + u) \\ &\quad - 5x_1^2 + 6x_1x_2 - 2x_2^2 - \phi(y) \\ &\text{where } y = x_1^2 + u \end{aligned}$$

を(5.5)に施せば, (5.5)の原点 $x=0, u=0$ は大域的漸近安定となる.

参考文献

- 1) C.I.Byrnes, A.Isidori and J.C.Willems: Passivity, feedback equivalence, and global stabilization of minimum phase nonlinear systems, IEEE Trans. Automat. Contr., Vol.AC-36, 1228/1240 (1991)
- 2) A.Isidori: Nonlinear Control Systems, Third Edition. New York: Springer-Verlag (1995)
- 3) K.Shimizu, H.Nukumi and S.Ito: Direct Steepest Descent Control of Nonlinear Dynamical Systems, in A.J.Krener and D.Q.Mayne (eds.), Nonlinear Control System Design, 801/806 (1995)
- 4) 申, 田村: 受動性理論による相対次数1の非線形系の大域的ロバスト安定化, 計測自動制御学会論文集, 34, 577/583 (1998)
- 5) W.Lin: Global Asymptotic Stabilization of General Nonlinear Systems with Stable Free Dynamics via Passivity and Bounded Feedback, Automatica, Vol.32, No.6, 915/924 (1996)
- 6) W.Lin: Global Robust Stabilization of Minimum-phase Nonlinear Systems with Uncertainty, Automatica, Vol.33, No.3, 453/462 (1997)
- 7) A.Van der Schaft: L_2 -Gain and Passivity Techniques in Nonlinear Control, Springer-Verlag (1996)
- 8) R.Sepulchre, M.Jankovic and P.Kokotovic: Constructive Nonlinear Control, Communication and Control Engineering, Springer (1997)