ディスクリプタシステムに対する非標準 H_∞ 制御問題[†]

宮崎 孝*・細江 繁幸*

Non-Standard H_∞ Control Problem for Descriptor Systems[†]

Takashi MIYAZAKI* and Shigeyuki HOSOE*

In this paper a non-standard H_∞ control problem is considered for a generalized plant represented by a descriptor form. This allows that the plant may have invariant zeros at infinity and non-proper. We use properties of a J-lossless matrix and a J-spectral factorization. It is shown that the solvability of the problem is equivalent to the solvability of two generalized Riccati equations. A parametrization is given for all compensators that are not necessarily proper. An existence condition of the proper controllers is considered.

Key Words: descriptor systems, H_∞ control, generalized Riccati equation, J-spectral factorization

1. はじめに

標準問題と呼ばれる H_∞ 制御問題²⁾では、一般化制御対象にいくつかの仮定を設けている。この条件を満たさない非標準問題に関する研究が行なわれている^{1), 5)~9)}。これらは、虚軸上あるいは無限遠点での零点の条件をゆるめるものである。文献5)では1ブロック問題に関して一般化代数リカッチ方程式(以下ではGAREと略す)によるJ-lossless分解による解を示した。4ブロック問題に関しては、文献6)は行列不等式、文献7)は一般化固有値問題による零点補償器、文献8)は一般化固有値問題によるJ-lossless分解、文献9)はGAREによるスペクトル分解により問題を解いている。これらの研究では、制御対象は状態空間によるものだが解を求める中間表現として、ディスクリプタシステム^{17), 19), 20)}(以下ではDSと略す)を使っている。また、文献3), 4)では、線形行列不等式により零点の条件によらない可解性を示している。

本研究では、一般化制御対象そのものがDSで表現された場合の無限遠点での零点の条件を設けない非標準問題を考える。DSに対する H_∞ 制御に関して文献10)では、標準問題に対してGAREによるJ-スペクトル分解により解を導いている。本研究では、DSの利点のうち特にノンプロパーな制御対象が表現できる点を意識し、閉ループ系の一部がノンプロパーとなることを許す問題を考える。これは、ノンプロパーな重み関数を不安定重みに置き換えれば文献11)で扱われている状態空間表現に関係する。文献12)では、不安定重みが

ある場合を文献10)の結果を使いDSに拡張している。本論文では、文献12)と異なりノンプロパーな重み関数の構造は仮定せず、一般的な制御対象に対しプロパー性を要求しない問題を考える。ただし、ノルム条件から生じるプロパー性の要求のため、プロパー化に関連する仮定を制御対象に設けている。また、実装される制御系のプロパー性に関しても考察する。プロパー性を要求しない問題は、DSに対する線形行列不等式による解法^{13), 14)}によっても直接には扱えない。

本論文は、状態空間に対する非標準問題に関する文献1)のJ-lossless行列に基づく伝達関数での解の表現を利用し、後述のDSのJ-スペクトル分解を求め制御器を得る。このJ-スペクトル分解は2つの一般化リカッチ方程式(generalized algebraic Riccati equation, 以下ではGAREと略す)²³⁾の解により求まり、このGAREの可解性が H_∞ 制御の可解性と等価であることが示される(文献9), 10)では本研究と表現の異なるGAREが使われている)。このGAREの解を用いて、プロパーとは限らない範囲でのすべての補償器が表現される。プロパーな解の存在性をその後述べる。

本論文での記号の意味はつぎのとおりである。

$$\left[\begin{array}{c|c} -sE + A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] := C(sE - A)^{-1}B + D.$$

$$A^\#(s) := A^T(-s), \quad J := \text{diag}(I, -I).$$

RH_∞ : 安定かつプロパーな有理関数行列の集合

$$\text{BH}_\infty := \{f \in \text{RH}_\infty \mid \|f\|_\infty < 1\}$$

$\mathcal{C}$: 複素数の集合, $\mathcal{C}_+ := \{x \in \mathcal{C} \mid \text{Re } x > 0\}$

$$\Omega := \{x \in \mathcal{C} \mid \text{Re } x = 0\}$$

$$M = [M_{ij}], \quad i, j = \{1, 2\} \text{ に対して,}$$

[†] 第42回自動制御連合講演会で発表(1999・11)

* 名古屋大学工学部 名古屋市千種区不老町

* Faculty of Engineering, Nagoya University, Furouchou, Chikusa-ku, Nagoya

(Received October 10, 2000)

(Revised May 21, 2001)

$$\text{HM}(M; S) := (M_{11}S + M_{12})(M_{21}S + M_{22})^{-1}$$

$$\text{LFT}(M; S) := M_{11} + M_{12}S(I - M_{22}S)^{-1}M_{21}$$

$-sE + A$ が指数安定:

$$\det(-sE + A) \neq 0, \forall s \in \mathcal{C}_+ \cup \Omega$$

J-lossless 行列 $\Theta(s)$: $\Theta^\#(s)J\Theta(s) = J$ かつ

$$\Theta^*(s)J\Theta(s) \leq J, \forall s \in \mathcal{C}_+ \cup \Omega$$

また, DS に関する基本的事項は文献(17), (19), (20)を参照.

2. 問題設定

ディスクリプタ形式で表現された連続時間線形時不変な一般化制御対象を

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} \\ &= \left[\begin{array}{cc|cc} -sE + A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{array} \right] \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} \end{aligned}$$

とおく. ここで, $w \in \mathcal{C}^{p_1}$ は外部入力, $u \in \mathcal{C}^{p_2}$ は制御入力, $z \in \mathcal{C}^{q_1}$ は被制御量, $y \in \mathcal{C}^{q_2}$ は観測出力である. また, $E \in \mathbf{R}^{n \times n}$ とする. この制御対象につぎの仮定を設ける.

[仮定 1] $\det(-sE + A) \neq 0$

[仮定 2]

$$\text{rank} \begin{bmatrix} -sE + A & B_2 \end{bmatrix} = n, \forall s \in \mathcal{C}_+ \cup \Omega$$

[仮定 3]

$$\text{rank} \begin{bmatrix} -sE^T + A^T & C_2^T \end{bmatrix} = n, \forall s \in \mathcal{C}_+ \cup \Omega$$

[仮定 4]

$$\text{rank} \{-s\mathbf{E}_{12} + \mathbf{A}_{12}\} = n + p_2, \forall s \in \Omega,$$

$$-s\mathbf{E}_{12} + \mathbf{A}_{12} := \begin{bmatrix} -sE + A & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix}$$

[仮定 5]

$$\text{rank} \{-s\mathbf{E}_{21}^T + \mathbf{A}_{21}^T\} = n + q_2, \forall s \in \Omega,$$

$$-s\mathbf{E}_{21} + \mathbf{A}_{21} := \begin{bmatrix} -sE + A & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{bmatrix}$$

仮定 1 はレギュラー性, 仮定 2, 3 は指数モードの可安定性の条件である. 仮定 4, 5 では無限遠点での仮定をしないため G_{12}, G_{21} が真にプロパーな場合に対応できる.

ディスクリプタ表現を用いているために, 重み関数などによるプロパーでない一般化制御対象にも適用できるが, そのためインパルスモードの可制御性, 可観測性に関連する仮定をおく必要がある. このために, つぎの準備をする.

一般に列フルノーマルランクなペンシル $-sE_g + A_g$ において, つぎのクロネッカー標準形

$$\begin{aligned} V(-sE_g + A_g)U \\ = \begin{bmatrix} -sE_\eta + A_\eta & 0 & 0 \\ 0 & -sI + A_f & 0 \\ 0 & 0 & -sE_\infty + I \end{bmatrix} \quad (1) \end{aligned}$$

へ変換する正則行列 V, U が存在する²¹⁾. ここで, $-sE_\eta + A_\eta$ は $\forall s \in \mathcal{C} \cup \{\infty\}$ において列フルランク, A_f は固有値が $-sE_g + A_g$ の有限零点からなるジョルダン行列, E_∞ はジョルダン型のベキ零行列である. 数値的な解法については文献(15)を参照. このとき, 列フルランクなペンシル $-sE_g + A_g$ の固有値を $-sI + A_f, -sE_\infty + I$ の固有値により定義する. また, つぎの構造

$$A_g \Xi_f = E_g \Xi_f A_f, \quad E_g \Xi_\infty = A_g \Xi_\infty E_\infty$$

をもつ $\begin{bmatrix} \Xi_f & \Xi_\infty \end{bmatrix}$ により張られる空間を $-sE + A$ の固有空間と定義する.

以上の事実を $-s\mathbf{E}_{12} + \mathbf{A}_{12}$ に適用し, (1) 式の変換をおこない, さらに右辺の左上 2 ブロック行列を正則行列 V_g, U_g により

$$V_g \begin{bmatrix} -sE_\eta + A_\eta & 0 \\ 0 & -sI + A_f \end{bmatrix} U_g = \begin{bmatrix} -sI + \Lambda_p \\ \Gamma_p \end{bmatrix}$$

とする. よって, $E_\infty = N_p$ とおくことにより正則行列によるつぎの変形ができる.

$$\begin{aligned} V_p(-s\mathbf{E}_{12} + \mathbf{A}_{12}) \begin{bmatrix} U_{pa} & U_{pb} \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} -sI_{r_1} + \Lambda_p & 0 \\ 0 & -sN_p + I_{r_2} \\ \Gamma_p & 0_{r_3 \times r_2} \end{bmatrix}, \quad (2) \end{aligned}$$

$$V_p = \begin{bmatrix} V_{pa} \\ V_{pb} \\ V_{pc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{p11} & V_{p12} \\ V_{p21} & V_{p22} \\ V_{p31} & V_{p32} \end{bmatrix},$$

$$r_3 := q_1 - p_2, \quad r_1 + r_2 = n + p_2$$

制御対象に対して, つぎのフルランク性の仮定をおく.

[仮定 6] $\text{rank}\{V_{p32}\} = r_3$

クロネッカー標準形の一意性と構成の仕方より $\text{Im} V_{pc}^T$ は一意にきまるので, 仮定 6 は V_p の選び方に依存しない条件である.

この仮定は, $G_{11} + G_{12}K$ をプロパーとする有理関数行列 (プロパーとは限らない) K が存在する十分条件となっている. 実際に, 仮定 6 から下の K が定義でき (2) 式から

$$\begin{aligned} G_{11} + G_{12} \left[\begin{array}{ccc|c} -sE + A & B_2 & 0 & B_1 \\ \hline C_1 & D_{12} & V_{p32}^T & D_{11} \\ 0 & I & 0 & 0 \end{array} \right] \\ = \left[\begin{array}{ccc|c} -sI + \Lambda_p - V_{p12}V_{p32}^T(V_{p32}V_{p32}^T)^{-1}\Gamma_p & * \\ \hline V_{p32}^T(V_{p32}V_{p32}^T)^{-1}\Gamma_p & * \end{array} \right] \end{aligned}$$

と変形できプロパーとなる. また, (E, A, B_2) がインパルス可制御であれば, この仮定は成り立つことが示せる. 同様に, G_{21} に関して

$$\begin{aligned} V_z(-s\mathbf{E}_{21} + \mathbf{A}_{21}) \begin{bmatrix} U_{za} & U_{zb} \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} -sI_{r_4} + \Lambda_z^T & 0 \\ 0 & -sN_z^T + I_{r_5} \\ \Gamma_z^T & 0_{r_6 \times r_5} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\mathbf{V}_z = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{za} \\ \mathbf{V}_{zb} \\ \mathbf{V}_{zc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{z11} & V_{z12} \\ V_{z21} & V_{z22} \\ V_{z31} & V_{z32} \end{bmatrix},$$

$$r_6 := p_1 - q_2, r_4 + r_5 = n + q_2$$

と変形でき,

〔仮定 7〕 $\text{rank}\{V_{z32}\} = r_6$

を仮定する. (E, A, C_2) がインパルス可観測であれば, この仮定は成り立つ.

このシステムに対する H_∞ 制御問題はつぎのように定式化できる.

〔定義〕 (H_∞ 制御問題) 出力フィードバック $u = K(s)y$ によりノルム条件

$$\Phi := G_{11} + G_{12}K(I - G_{22}K)^{-1}G_{21} \in \mathbf{BH}_\infty$$

を満たし閉ループ系を指数安定とする補償器 $K(s)$ を求める.

ここでは, 指数モードの安定性だけを考え, 閉ループ系がインパルスモードを持ち Φ 以外の伝達関数が非プロパーとなる場合を許している. これは, 閉ループ系全体がインパルスモードを持たないことを要求した場合, 解の存在条件が厳しくなりディスクリプタシステムを用いた利点がいかされないことが多いためである.

たとえば, 実プラント $P = \frac{1}{s-1/3}$ に対する混合感度問題を考える. 感度関数に対する重み関数を $W_S = \frac{1}{2}$ に, 相補感度関数に対する重み関数を $W_T = \frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{3}s + \frac{1}{3}$ と実プラントの相対次数以上の多項式に選び, 一般化制御対象を

$$G = \begin{bmatrix} 0 & -W_T P \\ W_S & -W_S P \\ 1 & -P \end{bmatrix}$$

とする. コントローラを K とすると, $\Phi^T = \left[\frac{-W_T P K}{1+PK} \frac{W_S}{1+PK} \right]$ となる. K の相対次数を適当に選べば, Φ はプロパーとなる. もし, 通常と同じように内部安定条件としてプロパー性を要求するならば, $\frac{W_T P}{1+PK}$ もプロパーとする必要がある. しかし, この伝達関数と Φ を同時にプロパーとする K は, 存在しない. このため, 従来の方法では解がないこととなる.

プロパー化のための仮定をおくが, Φ だけのプロパー化であるため, (E, A, B_2) のインパルス可制御性, (E, A, C_2) のインパルス可観測性ではなく, これよりゆるい仮定 6, 7 を設けている. 先ほどの例題においては, 一般化制御対象は,

$$G = \left[\begin{array}{ccc|cc} -s + \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ \hline \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \quad (3)$$

となり, y からインパルス可観測となっていないが, 仮定 7 は, 満たされていることがわかる. また, 仮定 5 において, 無限遠点での不変零点をもち非標準問題ともなっている.

実際にプロパー性が問題となるのは G_{22} と K によるフィー

ドバック系である. 多くの場合 G_{22} は実プラントでありプロパーである. しかし, 上記の問題設定では補償器 K がプロパーとは限定していないことに注意されたい. プロパーな補償器の存在性については, 5 節で議論する.

3. J-スペクトル分解と H_∞ 制御問題の解

一般化制御対象の要素を用いて行列

$$H = \begin{bmatrix} G_{12}^\# & G_{22}^\# \\ 0 & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I - G_{11}G_{11}^\# & -G_{11}G_{21}^\# \\ -G_{21}G_{11}^\# & -G_{21}G_{21}^\# \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} G_{12} & 0 \\ G_{22} & -I \end{bmatrix}$$

を定義する. 付録 B で示すように $\bar{K}(s)$ が指数安定かつ $\bar{K}^{-1}(s)$ が指数安定となる H^{-1} の J-スペクトル分解

$$H^{-1} = \bar{K}J\bar{K}^\# \quad (4)$$

を求めることにより H_∞ 補償器を求めることができる.

以下の議論で必要となる一般化リカッチ方程式 (GARE) について考える.

$$-s\mathbf{E}_p + \mathbf{A}_p := \begin{bmatrix} -s\mathbf{E}_{12} + \mathbf{A}_{12} & 0_{(n+q_1) \times r_3} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}_p^T := \begin{bmatrix} 0_{r_3 \times (n+p_2)} & I_{r_3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_p := \mathbf{C}_p \mathbf{C}_p^T,$$

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{1a} & \mathbf{B}_{1b} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 0 & B_1 \\ I_{q_1} & D_{11} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P}_p := -\mathbf{B}_1 \mathbf{J} \mathbf{B}_1^T$$

という構造を持った行列に対してつぎの一般化 Riccati 方程式 (GARE) ²³⁾

$$\mathbf{X}^T \mathbf{A}_p + \mathbf{A}_p^T \mathbf{X} + \mathbf{X}^T \mathbf{P}_p \mathbf{X} + \mathbf{Q}_p = 0,$$

$$\mathbf{X}^T \mathbf{E}_p = \mathbf{E}_p^T \mathbf{X} \geq 0 \quad (5)$$

を定義する. この GARE の解 $\mathbf{X} \in \mathbf{R}^{(n+q_1) \times (n+q_1)}$ で

$$\det\{-s\mathbf{E}_p + \mathbf{A}_p + \mathbf{P}_p \mathbf{X}\} \neq 0, \quad \forall s \in \mathcal{C}_+ \cup \Omega,$$

$$\ker\{\mathbf{X}\} \supset \text{Im} \begin{bmatrix} U_{pb} \\ 0_{r_3 \times r_2} \end{bmatrix} \quad (6)$$

を満たすとき $\mathbf{X} \in \text{Gric}\{\mathbf{E}_p, \mathbf{A}_p, \mathbf{P}_p, \mathbf{Q}_p\}$ と表わすことにする. ここで, $\text{Im}\{U_{pb}\}$ は $-s\mathbf{E}_{12} + \mathbf{A}_{12}$ の無限固有空間である. また, ペンシル $-s\mathbf{E}_p + \mathbf{A}_p$ は, 正方だがレギュラーで無いことに注意. ただし, これらの行列により構成されるハミルトンペンシルは, レギュラーとなる. GARE の可解条件や解法については, 文献 23) を参照されたい.

つぎの補題が成り立つ.

〔補題 1〕 (文献 23)) $\mathbf{X} \in \text{Gric}\{\mathbf{E}_p, \mathbf{A}_p, \mathbf{P}_p, \mathbf{Q}_p\}$ が存在するならば, その $\mathbf{X}$ に対して,

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_a E & 0_{(n+q_1) \times p_2} & \mathbf{X}_c \\ X_1 E & 0_{n \times p_2} & X_3 \\ X_2 E & 0_{q_1 \times p_2} & X_4 \end{bmatrix},$$

$$E^T X_1 E \geq 0, X_1 = X_1^T, E^T X_3 = 0$$

を満たす $X_1 \in \mathbf{R}^{n \times n}, X_2 \in \mathbf{R}^{q_1 \times n}, X_3 \in \mathbf{R}^{n \times r_3}, X_4 \in \mathbf{R}^{q_1 \times r_3}$ が存在する. $\square$

$\mathbf{X}$ の場合と同様に,

$$-s\mathbf{E}_z^T + \mathbf{A}_z^T := \begin{bmatrix} -s\mathbf{E}_{21}^T + \mathbf{A}_{21}^T & 0_{(n+p_1) \times r_6} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}_1^T = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{1a}^T & \mathbf{C}_{1b}^T \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1^T & 0 \\ \mathbf{D}_{11}^T & \mathbf{I}_{p_1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_z := \mathbf{C}_1^T \mathbf{J} \mathbf{C}_1, \mathbf{Q}_z := \text{block-diag} \{0_n, 0_{q_2}, \mathbf{I}_{r_6}\}$$

とおくと, $\mathbf{Y} \in \text{Gric} \{\mathbf{E}_z^T, \mathbf{A}_z^T, \mathbf{P}_z, \mathbf{Q}_z\}$ が定義できる. $\mathbf{Y}$ が存在するとき補題1と同様に

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_a E^T & 0_{(n+p_1) \times q_2} & \mathbf{Y}_c \\ \mathbf{Y}_1 E^T & 0_{n \times q_2} & \mathbf{Y}_3 \\ \mathbf{Y}_2 E^T & 0_{p_1 \times q_2} & \mathbf{Y}_4 \end{bmatrix}$$

となる $\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_4$ が存在する.

このGAREを用いて(4)式のJ-スペクトル分解を求める.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}_2 & \mathbf{D}_{21} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I}_{p_2} & 0_{p_2 \times r_3} & 0_{p_2 \times q_1} & 0 \\ \mathbf{C}_2 & \mathbf{D}_{22} & 0 & 0 & \mathbf{D}_{21} \end{bmatrix}$$

とおくと, H^{-1} は

$$H^{-1} = \left[\begin{array}{cc|c} -s\mathbf{E}_p + \mathbf{A}_p & -\mathbf{B}_1 \mathbf{J} \mathbf{B}_1^T & \mathbf{B}_1 \mathbf{J} \mathbf{D}_{21}^T \\ -\mathbf{Q}_p & -s\mathbf{E}_p^T - \mathbf{A}_p^T & \mathbf{C}_2^T \\ \hline \mathbf{C}_2 & -\mathbf{D}_{21} \mathbf{J} \mathbf{B}_1^T & \mathbf{D}_{21} \mathbf{J} \mathbf{D}_{21}^T \end{array} \right]$$

と表現できる.

[補題2] $\mathbf{X} \in \text{Gric} \{\mathbf{E}_p, \mathbf{A}_p, \mathbf{P}_p, \mathbf{Q}_p\}$ と $\mathbf{Y} \in \text{Gric} \{\mathbf{E}_z^T, \mathbf{A}_z^T, \mathbf{P}_z, \mathbf{Q}_z\}$ が存在し,

$$\det \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & X_1 E \\ Y_1 E^T & \mathbf{I}_n \end{bmatrix} \neq 0, \quad (7)$$

$$\begin{bmatrix} E^T X_1 E & E^T X_1 E Y_1 E^T \\ E Y_1 E^T X_1 E & E Y_1 E^T \end{bmatrix} \geq 0 \quad (8)$$

が成り立つとする. このとき,

$$\begin{bmatrix} X_4^T \\ W_p^T \end{bmatrix} W_p = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I}_{p_2} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} Y_4^T \\ W_z^T \end{bmatrix} W_z = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I}_{q_2} \end{bmatrix}$$

を満たす $W_p \in \mathbf{R}^{q_1 \times p_2}, W_z \in \mathbf{R}^{p_1 \times q_2}$ が存在し $H^{-1}(s)$ を

$$H^{-1}(s) = \bar{K}(s) \mathbf{J} \bar{K}^\#(s),$$

とJ-スペクトル分解するつぎの安定な $\bar{K}(s)$ が存在する.

$$\begin{aligned} \bar{K}(s) &:= \left[\begin{array}{c|c} \frac{-s\mathbf{E}_p + \mathbf{A}_p - \mathbf{B}_1 \mathbf{J} \mathbf{B}_1^T \mathbf{X}}{\mathbf{C}_2 - \mathbf{D}_{21} \mathbf{J} \mathbf{B}_1^T \mathbf{X}} & \mathbf{B}_K \mathbf{W} \\ \hline \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{array} \right] \\ &= \begin{bmatrix} \bar{K}_{11} & \bar{K}_{12} \\ \bar{K}_{21} & \bar{K}_{22} \end{bmatrix}, \quad (9) \end{aligned}$$

$$\mathbf{B}_K := \begin{bmatrix} -Z_b E Z_{pa} & \mathbf{B}_1 - Z_b E Z_{pb} \\ \mathbf{I}_{q_1} & \mathbf{D}_{11} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} Z_{pa} & Z_{pb} \end{bmatrix} := \mathbf{Y}_a^T \mathbf{C}_1^T - \mathbf{Y}_1 E^T \mathbf{X}_a^T \mathbf{B}_1,$$

$$\mathbf{W} := \begin{bmatrix} W_p \bar{\Delta}_z^{1/2} & 0 \\ 0 & W_z \bar{\Delta}_p^{1/2} \end{bmatrix},$$

$$Z_b^{-1} := \mathbf{I}_n - E \mathbf{Y}_1 E^T \mathbf{X}_1,$$

$$\bar{\Delta}_p^{-1} := \mathbf{I}_{q_2} + W_z^T \mathbf{B}_{1b}^T \mathbf{X}_c \mathbf{X}_c^T \mathbf{B}_{1b} W_z,$$

$$\bar{\Delta}_z^{-1} := \mathbf{I}_{p_2} + W_p^T \mathbf{C}_{1a} \mathbf{Y}_c \mathbf{Y}_c^T \mathbf{C}_{1a}^T W_p.$$

また, $\bar{K}^{-1}(s)$ も安定である.

(証明) 付録A参照. $\square$

この補題よりつぎの定理が導かれる.

《定理1》 仮定1から7が満たされるシステムに対する H_∞ 制御問題の解が存在する必要十分条件は, 補題2の(7), (8)式を満たす $\mathbf{X} \in \text{Gric} \{\mathbf{E}_p, \mathbf{A}_p, \mathbf{P}_p, \mathbf{Q}_p\}$ と $\mathbf{Y} \in \text{Gric} \{\mathbf{E}_z^T, \mathbf{A}_z^T, \mathbf{P}_z, \mathbf{Q}_z\}$ が存在することである. このとき, すべての制御器の集合は,

$$\{Q \in \mathbf{B} \mathbf{H}_\infty \mid \det(\bar{K}_{21} Q + \bar{K}_{22}) \neq 0\}$$

を用いて $K = \text{HM}(\bar{K}; Q)$ と表わすことができる.

証明は, 付録BとCで示す.

4. 例題

(3)式の一般化制御対象を例に, 前節の定理によりコントローラを求めてみることにする.

$$-s\mathbf{E}_p + \mathbf{A}_p = \begin{bmatrix} -s + \frac{1}{3} & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P}_p = \text{diag}(0, 0, 0, -1, -\frac{3}{4}), \quad \mathbf{Q}_p = \text{diag}(0, 0, 0, 0, 1)$$

であり,

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \frac{25}{54} & 0 & -\frac{2}{9} & 0 & 0 \\ -\frac{2}{9} & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ -\frac{13}{54} & 0 & \frac{1}{18} & 0 & 0 \\ -\frac{4}{9} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

は, $\text{Gric} \{\mathbf{E}_p, \mathbf{A}_p, \mathbf{P}_p, \mathbf{Q}_p\}$ の解となる. 同様に,

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \frac{8}{9} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{8}{9} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

は, $\text{Gric} \{\mathbf{E}_z^T, \mathbf{A}_z^T, \mathbf{P}_z, \mathbf{Q}_z\}$ の解となる. これらの値は(7), (8)式を満たす. これによりコントローラは, つぎのようになる.

$$\text{LFT} \left(\left[\begin{array}{cc|cc} -s - \frac{721}{429} & -1 & \frac{216}{143} & -\frac{204}{143} \\ \frac{17}{9} & -s - \frac{5}{3} & 0 & 2 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{array} \right]; Q \right).$$

ここで, $Q \in \mathbf{BH}_\infty$ は自由パラメータである.

5. プロパーな解

前節までで求めた制御器は, 一般にはプロパーとならない. この節では, プロパーな補償器の存在条件について考察する.

$$K(s) = \text{HM}(\bar{K}; Q), \forall Q \in \mathbf{BH}_\infty$$

であるので, プロパーな補償器の存在を示すために $Q = \text{HM}(\bar{K}_p; \bar{Q}) \in \mathbf{BH}_\infty$ かつ

$$K = \text{HM}(\bar{K}\bar{K}_p; \bar{Q}) = \text{LFT}(\hat{K}; \bar{Q})$$

で $\hat{K}$ がプロパーとなる $\bar{K}_p$ とプロパーな $\bar{Q}$ が存在するか考える. ただし, 一般の問題を扱うのは困難なため以下では,

G_{11} がプロパー

である場合のみを考えることにする. また, 簡単のため制御対象の伝達関数の実現はつぎの条件

$$G_{11}(\infty) = D_{11}, \quad (10)$$

$$\text{rank} \begin{bmatrix} E & B_1 & B_2 \end{bmatrix} = \mathbf{R}^n, \quad (11)$$

$$\text{rank} \begin{bmatrix} E^T & C_1^T & C_2^T \end{bmatrix} = \mathbf{R}^n \quad (12)$$

を満たしていると仮定する. この条件を満たす実現は常に存在するため一般性は失われない¹⁶⁾.

以下では, 付録の (A.1) 式をさらに変形することで求める (9) 式とは異なる $\bar{K}$ の実現

$$\bar{K} = \left[\begin{array}{cc|cc} -sE + \hat{A} & \hat{B}_2 & 0 & \hat{B}_1 \\ \hline \hat{C}_1 & \hat{D}_{12} & I_{p_2} & \hat{D}_{11} \\ 0 & I_{p_2} & 0 & 0 \\ \hline \bar{C}_2 & D_{22} & 0 & \hat{D}_{21} \end{array} \right]$$

をもちいて議論を進める. ここで

$$\hat{A} := A + B_1 \mathbf{B}_{1b}^T \mathbf{X}_a E + E Z_a^T Z_{pa} W_p W_p^T \bar{C}_1,$$

$$\bar{C}_1 := C_1 - X_2 E + D_{11} \mathbf{B}_{1b}^T \mathbf{X}_a E,$$

$$\hat{B}_1 := (B_1 \Delta_p^{-1} - E Z_a^T Z_{pa} W_p W_p^T D_{11} \Delta_p^{-1}) W_z \bar{\Delta}_p^{1/2},$$

$$\hat{B}_2 := B_2 + E Z_a^T Z_{pa} W_p W_p^T D_{12},$$

$$\hat{C}_1 := \bar{\Delta}_z^{-1/2} W_p^T \bar{C}_1, \quad \bar{C}_2 := C_2 + D_{12} \mathbf{B}_{1b}^T \mathbf{X}_a E,$$

$$\hat{D}_{11} := \bar{\Delta}_z^{-1/2} W_p^T D_{11} \Delta_p^{-1} W_z \bar{\Delta}_p^{1/2},$$

$$\hat{D}_{12} := \bar{\Delta}_z^{-1/2} W_p^T D_{12}, \quad \hat{D}_{21} := D_{21} \Delta_p^{-1} W_z \bar{\Delta}_p^{1/2},$$

$$\Delta_p^{-1} := I + \mathbf{B}_{1b}^T \mathbf{X}_c \mathbf{X}_c^T \mathbf{B}_{1b}, \quad Z_a^{-1} := I_n - E^T X_1 E Y_1$$

である.

$\bar{K}_p$ を適当な定数 $F_e \in \mathbf{R}^{p_2 \times n}$, $F_p \in \mathbf{R}^{p_2 \times n}$, $F_z \in \mathbf{R}^{n \times q_2}$, $\hat{E}^+ \in \mathbf{R}^{n \times n}$ により,

$$\bar{K}_p = \bar{K}^{-1} \left[\begin{array}{cc|cc} -s\hat{E} + \hat{A}_p & \hat{B}_2 & F_z & \\ \hline \hat{F}_k & \hat{W}_k & 0 & \\ \hline \bar{C}_2 + D_{22}\hat{F}_k & D_{22}\hat{W}_k & -I & \end{array} \right],$$

$$\hat{E} := E + \hat{B}_2 F_e, \quad \hat{A}_p := \hat{A} + \hat{B}_2 F_p,$$

$$\hat{F}_k := F_p - F_e \hat{E}^+ \hat{A}_p, \quad \hat{W}_k := I - F_e \hat{E}^+ \hat{B}_2$$

と定める. このとき,

$$\text{HM}(\bar{K}_p; \bar{Q}) = \text{LFT}(\hat{K}_p; \bar{Q}),$$

$$\hat{K}_p = \left[\begin{array}{c|cc} -s\hat{E} + \hat{A} & \hat{B}_1 & \hat{B}_2 \\ \hline \hat{C}_1 & -\hat{D}_{11} & -\hat{D}_{12}\hat{W}_k \\ \hline \hat{C}_2 & -\hat{D}_{21} & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} \hat{K}_{p11} & \hat{K}_{p12} \\ \hat{K}_{p21} & 0 \end{array} \right],$$

$$\left[\begin{array}{c} -s\hat{E} + \hat{A} \\ \hline \hat{C}_1 \\ \hline \hat{C}_2 \end{array} \right]$$

$$:= \left[\begin{array}{cc} -sE + \hat{A} + F_z \bar{C}_2 & 0 \\ \hline \frac{F_z \bar{C}_2}{\bar{C}_1} & -s\hat{E} + \hat{A} + \hat{B}_2 F_p \\ \hline \bar{C}_2 & -\bar{C}_1 - \hat{D}_{12} \hat{F}_k \end{array} \right],$$

$$\left[\begin{array}{cc} \hat{B}_1 & \hat{B}_2 \end{array} \right] := \left[\begin{array}{cc} -\hat{B}_1 - F_z \hat{D}_{21} & 0 \\ \hline -F_z \hat{D}_{21} & \hat{B}_2 \end{array} \right]$$

となる. また, つぎの行列を定義する.

$$\hat{A}_k := \hat{A}_p + F_z \bar{C}_2 + F_z D_{22} \hat{F}_k.$$

付録Dで, $\hat{K}_p$ がプロパーかつ安定で, $-s\hat{E} + \hat{A}_k$ がインパルスモードを持たないように, $F_e, F_p, F_z, \hat{E}^+$ を選ぶことができることを示す. このとき $\bar{K}\bar{K}_p$ を LFT 形式に変換すると

$$\hat{K} = \left[\begin{array}{c|cc} -s\hat{E} + \hat{A}_k & -F_z & \hat{B}_2 + F_z D_{22} \hat{W}_k \\ \hline \hat{F}_k & 0 & \hat{W}_k \\ \hline \bar{C}_2 + D_{22} \hat{F}_k & -I & D_{22} \hat{W}_k \end{array} \right]$$

となり $\hat{K}$ はプロパーとなる.

つぎに, $\text{LFT}(\hat{K}_p; \bar{Q}) \in \mathbf{BH}_\infty$ となるプロパーな $\bar{Q}$ が存在する条件を導こう. このために

$$\left[\begin{array}{cc} -s\hat{E} + \hat{A}_p & \hat{B}_2 \\ \hline -\hat{C}_1 - \hat{D}_{12} \hat{F}_k & -\hat{D}_{12} \hat{W}_k \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} I & 0 \\ \hline -F_p + sF_e & I \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} I & 0 \\ \hline \hat{D}_{12} F_e \hat{E}^+ & I \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} -sE + \hat{A} & \hat{B}_2 \\ \hline -\hat{C}_1 & -\hat{D}_{12} \end{array} \right]$$

などから

$$\left[\begin{array}{cc} -s\hat{E} + \hat{A} & \hat{B}_2 \\ \hline \hat{C}_1 & -\hat{D}_{12} \hat{W}_k \end{array} \right], \quad \left[\begin{array}{cc} -s\hat{E} + \hat{A} & \hat{B}_1 \\ \hline \hat{C}_2 & -\hat{D}_{21} \end{array} \right]$$

は指数安定であることに注意する. したがって $\hat{K}_p$ がプロパーかつ安定であるので

$$\|\hat{K}_{p11}(\infty) + \hat{K}_{p12}(\infty) S \hat{K}_{p21}(\infty)\|_\infty < 1 \quad (13)$$

となる $S \in \mathbf{R}^{p_2 \times q_2}$ が存在するならば, $\hat{K}_p(s)$ に状態空間表現に対しての結果 (loop-shifting²²⁾, almost disturbance

decoupling⁶⁾) より $\|LFT(\hat{K}_p; \bar{Q})\|_\infty < 1$ となるプロパーな $\bar{Q}$ が存在する. よって, (13) 式がプロパーなコントローラが存在するための十分条件を与える. 特に $G_{11}(s)$ が厳密にプロパーであれば, $\hat{K}_{p11}$ も厳密にプロパーとなり (13) 式を満たす S は常に存在する. (13) 式の $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, F_e, F_p, F_z$ などに依存しない形での表現に関しては考慮中である.

6. 結 論

本論文では, 無限遠点の零点を許すディスクリプタシステムに対する非標準 H_∞ 制御問題の可解性の必要十分条件が二つの一般化リカッチ方程式の可解性に等価であることを示した. また, プロパーとは限らない範囲での補償器のパラメータライゼーションをおこなった. さらにプロパーな補償器の存在性に関する考察をした.

参 考 文 献

- 宮崎, 細江, 章: 一般化制御対象が無限遠点に零点をもつ場合の H_∞ 制御問題, 計測自動制御学会論文集, **30**-5, 545/553 (1994)
- J. Doyle, K. Glover, P.P. Khargoneker and B.A. Francis: State Space Solutions to Standard H_2 and H_∞ Control Problems, IEEE Trans., **AC-34**-8, 831/847 (1989)
- P. Gahinet: A New Parametrization of H_∞ Suboptimal Controllers, Int. J. Control, **59**-4, 1031/1051 (1994)
- T. Iwasaki and R.E. Skelton: All Controllers for the General H_∞ Control Problem - LMI Existence Conditions and State Space Formulas -, Automatica, **30**, 1307/1317 (1994)
- S. Hara, T. Sugie and R. Kondo: H_∞ Control Problem with $j\omega$ -axis Zeros, Automatica, **28**-1, 55/70 (1992)
- A.A. Stoorvogel: The H_∞ Control Problem, Prentice Hall (1992)
- B.R. Copeland and M.G. Safonov: A Zero Compensation Approach to Singular H_2 and H_∞ Problems, Int. J. Robust and Nonlinear Control, **5**, 71/106 (1995)
- X. Xin and H. Kimura: Descriptor-Form Approach to Non-Standard H_∞ Control Problems based on Chain-Scattering Representation, Proc. 1st ASCC, 25/28 (1994)
- K. Kuriyama: Studies on Extended H_∞ Control Theory, Doctoral Dissertation, Chiba University (1995)
- K. Takaba, N. Morihira and T. Katayama: H_∞ Control for Descriptor Systems - A J-Spectral Factorization Approach -, Proc. 33rd IEEE CDC, 2251/2256 (1994)
- 美多, 析, 富山, B.D.O. Anderson: 拡張 H_∞ 制御- H_∞ サーボ問題と推定問題の統一的解法 -, 計測自動制御学会論文集, **33**-7, 656/664 (1997)
- 川本, 片山: 非プロパーな重み関数を用いた厳密にプロパーな H_∞ 制御器の設計法, 第27回制御理論シンポジウム資料, 1/4 (1998)
- I. Masubuchi, Y. Kamitane, A. Ohara and N. Suda: H_∞ Control for Descriptor Systems - A Matrix Inequalities Approach -, Automatica, **33**-4, 669/673 (1997)
- 宮崎, 武田, 細江: ディスクリプタシステムに対する H_∞ 制御問題の LMI による解法, 計測自動制御学会論文集, **34**-8, 1013/1018 (1998)
- P. Van Dooren: The Computation of Kronecker's Canonical Form of a Singular Pencil, Linear Algebra and its Applications, **27**, 103/140 (1979)
- José Grimm: Realization and Canonicity for Implicit Systems, SIAM J. Control and Optimization, **26**-6, 1331/1347 (1988)
- F.L. Lewis: A Survey of Linear Singular Systems, Circuits Syst. Signal Process., **5**-1, 3/36 (1986)
- L. Dai: Singular Control Systems, Lecture Notes in Control and Information Sciences, **118**, Springer Verlag (1989)
- 池田: Descriptor 形式に基づくシステム理論, 計測と制御, **24**-7, 597/604 (1985)
- 汐月: 表現手法としてのディスクリプタシステム - その可能性を探る, システム/制御/情報, **39**-5, 219/224 (1995)
- F.R. Gantmacher: The Theory of Matrices Vol. I and II, Chelsea (1959)
- M.G. Safonov and D.J.N. Limebeer: Simplifying the H_∞ Theory via Loop Shifting, Proc. IEEE CDC, 1399/1404 (1988)
- 宮崎, 細江: 無限遠点に零点をもつディスクリプタシステムに対する J スペクトル分解と一般化リカッチ方程式, 計測自動制御学会論文集, **35**-6, 723/731 (1999)

《付 録》

A. 補題2の証明

$\Delta_X := X_4^T X_4$ を定義すると, GARE より $\mathbf{X}_c^T \mathbf{B}_1 \mathbf{J} \mathbf{B}_1^T \mathbf{X}_c = I_{r_3}$ であるので, $\Delta_p := I_{p_1} - \mathbf{B}_{1b}^T \mathbf{X}_c \Delta_X^{-1} \mathbf{X}_c^T \mathbf{B}_{1b} > 0$ となる. このとき, GARE の解 $\mathbf{X}$ を用いて

$$H^{-1} = \left[\begin{array}{cc|cc} -s\mathbf{E}_p + \tilde{\mathbf{A}}_p & -\tilde{\mathbf{B}}_1 \tilde{\mathbf{J}} \tilde{\mathbf{B}}_1^T & \tilde{\mathbf{B}}_1 \tilde{\mathbf{J}} \tilde{\mathbf{D}}_{21}^T \\ 0 & -s\mathbf{E}_p^T - \tilde{\mathbf{A}}_p^T & \tilde{\mathbf{C}}_2^T \\ \hline \tilde{\mathbf{C}}_2 & -\tilde{\mathbf{D}}_{21} \tilde{\mathbf{J}} \tilde{\mathbf{B}}_1^T & \tilde{\mathbf{D}}_{21} \tilde{\mathbf{J}} \tilde{\mathbf{D}}_{21}^T \end{array} \right]$$

と変換できる. ここで,

$$\left[\begin{array}{c} \tilde{\mathbf{A}}_p \\ \tilde{\mathbf{C}}_2 \end{array} \right] := \left[\begin{array}{c} \mathbf{A}_p \\ \mathbf{C}_2 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{D}_{21} \end{array} \right] \mathbf{J} \mathbf{B}_1^T \mathbf{X},$$

$$\left[\begin{array}{c} \tilde{\mathbf{B}}_1 \\ \tilde{\mathbf{D}}_{21} \end{array} \right] := \left[\begin{array}{c} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{D}_{21} \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} \mathbf{W}_p & 0 \\ 0 & \Delta_p^{1/2} \end{array} \right]$$

である. これにより, 極の部分の分解ができていることがわかる. さらに,

$$\mathbf{T}_k^{-1} := \left[\begin{array}{ccc} I_n & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{W}_p^T & 0 \\ 0 & 0 & I \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} I + \mathbf{B}_{1b} \mathbf{B}_{1b}^T \mathbf{X}_c \mathbf{X}_c^T \\ -\mathbf{X}_c^T \end{array} \right]$$

を定義すると

$$\left[\begin{array}{cc} \tilde{\mathbf{A}}_p & \tilde{\mathbf{B}}_1 \\ \tilde{\mathbf{C}}_2 & \tilde{\mathbf{D}}_{21} \end{array} \right] := \left[\begin{array}{cc|cc} \mathbf{T}_k^{-1} & 0 & \tilde{\mathbf{A}}_p & \tilde{\mathbf{B}}_1 \\ -\mathbf{D}_{21} \mathbf{J} \mathbf{B}_1^T \mathbf{X}_c \mathbf{X}_c^T & I_{p_2+q_2} & \tilde{\mathbf{C}}_2 & \tilde{\mathbf{D}}_{21} \end{array} \right]$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc} \tilde{\mathbf{A}} & \mathbf{B}_2 & 0 & 0 & \tilde{\mathbf{B}}_1 \\ \tilde{\mathbf{C}}_1 & \tilde{\mathbf{D}}_{12} & 0 & I_{p_2} & \tilde{\mathbf{D}}_{11} \\ 0 & 0 & I_{r_3} & 0 & -\tilde{\mathbf{F}} \\ 0 & I_{p_2} & 0 & 0 & 0 \\ \hline \tilde{\mathbf{C}}_2 & \mathbf{D}_{22} & 0 & 0 & \tilde{\mathbf{D}}_{21} \end{array} \right],$$

$$H^{-1} = \left[\begin{array}{cc|cc} -s\mathbf{E}_p + \tilde{\mathbf{A}}_p & -\tilde{\mathbf{B}}_1 \tilde{\mathbf{J}} \tilde{\mathbf{B}}_1^T & \tilde{\mathbf{B}}_1 \tilde{\mathbf{J}} \tilde{\mathbf{D}}_{21}^T \\ 0 & -s\mathbf{E}_p^T - \tilde{\mathbf{A}}_p^T & \tilde{\mathbf{C}}_2^T \\ \hline \tilde{\mathbf{C}}_2 & -\tilde{\mathbf{D}}_{21} \tilde{\mathbf{J}} \tilde{\mathbf{B}}_1^T & \tilde{\mathbf{D}}_{21} \tilde{\mathbf{J}} \tilde{\mathbf{D}}_{21}^T \end{array} \right]$$

と変換できる。ここで、

$$\bar{A} := A + B_1 B_{1b}^T X_a E,$$

$$\bar{C}_1 := W_p^T (C_1 - X_2 E + D_{11} B_{1b}^T X_a E),$$

$$\bar{C}_2 := C_2 + D_{21} B_{1b}^T X_a E, \quad \bar{B}_1 := B_1 \Delta_p^{-1/2},$$

$$\bar{D}_{11} := W_p^T D_{11} \Delta_p^{-1/2}, \quad \bar{D}_{21} := D_{21} \Delta_p^{-1/2},$$

$$\bar{F} := X_c^T B_{1b} \Delta_p^{1/2}, \quad \bar{D}_{12} := W_p^T D_{12}$$

である。この実現は

$$\begin{bmatrix} \bar{G}_{11} & \bar{G}_{12} \\ \bar{G}_{21} & \bar{G}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -sE + \bar{A} & \bar{B}_1 & B_2 \\ \bar{C}_1 & \bar{D}_{11} & \bar{D}_{12} \\ \bar{C}_2 & \bar{D}_{21} & D_{22} \end{bmatrix}$$

を用いて H^{-1} が,

$$H^{-1} = \Pi_a \bar{\Psi} \Pi_a^\#, \quad \Pi_a^{-1} := \begin{bmatrix} -\bar{G}_{12} & 0 \\ -\bar{G}_{22} & I \end{bmatrix}$$

$$\bar{\Psi} := \begin{bmatrix} I & \bar{G}_{11} \\ 0 & \bar{G}_{21} \end{bmatrix} J \begin{bmatrix} I & 0 \\ \bar{G}_{11}^\# & \bar{G}_{21}^\# \end{bmatrix}$$

と表現できることを示している。

この $\bar{\Psi}$ をさらに、 Π_b^{-1} が指数安定となるよう $\bar{\Psi} = \Pi_b J \Pi_b^\#$ と J スペクトル分解する。

$$-sE_z + \bar{A}_z := \begin{bmatrix} -sE + \bar{A} & \bar{B}_1 \\ \bar{C}_2 & \bar{D}_{21} \\ 0 & 0_{r_6 \times p_1} \end{bmatrix},$$

$$\bar{C}_1 := \begin{bmatrix} \bar{C}_1 & \bar{D}_{11} \\ 0 & I_{p_1} \end{bmatrix}, \quad \bar{P}_z := \bar{C}_1^T J \bar{C}_1$$

を定義する。

ここで、 $\bar{Y} \in \text{Gric} \{E_z^T, \bar{A}_z^T, \bar{P}_z, Q_z\}$ を

$$\bar{Y} = \begin{bmatrix} \bar{Y}_a E^T & 0_{(n+p_1) \times q_2} & \bar{Y}_c \end{bmatrix}$$

$$\bar{C}_1^T = \begin{bmatrix} \bar{C}_{1a}^T & \bar{C}_{1b}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{1a}^T & 0 \\ \bar{D}_{11}^T & I_{p_1} \end{bmatrix}$$

と分割する。また、

$$\begin{bmatrix} \bar{Y}_4^T \\ \bar{W}_z^T \end{bmatrix} \bar{W}_z = \begin{bmatrix} 0 \\ I_{q_2} \end{bmatrix}$$

を満たす $\bar{W}_z \in \mathbf{R}^{p_1 \times q_2}$ が存在する。

$$\begin{bmatrix} -sE + \bar{A} & \bar{B} \\ \bar{C} & \bar{D} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} -sE + \bar{A} & 0 & \bar{B}_1 \\ \bar{C}_1 & I_{q_1} & \bar{D}_{11} \\ \bar{C}_2 & 0 & \bar{D}_{21} \end{bmatrix},$$

$$\bar{W} := \text{block-diag} \{ \bar{\Delta}_z^{1/2}, \bar{W}_z \}$$

$$\bar{\Delta}_Y := \bar{Y}_4^T \bar{Y}_4, \quad \bar{\Delta}_z := I_{p_2} - \bar{C}_{1a} \bar{Y}_c \bar{\Delta}_Y^{-1} \bar{Y}_c^T \bar{C}_{1a}^T$$

と定義すると参考文献 23) の結果より

$$\Pi_b = \left[\begin{array}{c|c} -sE + \bar{A} & (\bar{B} - E \bar{Y}_a^T \bar{C}^T) J \bar{W} \\ \hline \bar{C} & \bar{D} J \bar{W} \end{array} \right]$$

が求められる。

以上により、 $H^{-1} = \bar{K} J \bar{K}^\#$ の J スペクトル分解が次式の $\bar{K}(s)$ により求まる。

$$\bar{K}(s) = \Pi_a \Pi_b J = \left[\begin{array}{c|c} -sE_p + \bar{A}_p & \bar{B}_1 \\ \hline \bar{C}_2 & \bar{D}_{21} \end{array} \right]. \quad (\text{A.1})$$

ここで、

$$\begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{D}_{21} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \bar{B}_1 - E \bar{Y}_a^T \bar{C}_1^T \\ \bar{D}_{21} \end{bmatrix} \bar{W}.$$

である。また、逆システムは

$$\bar{K}(s)^{-T} = \Pi_a^{-T} \Pi_b^{-T} J = \left[\begin{array}{c|c} -sE_z^T + \hat{A}_z^T & \bar{C}_1^T \bar{W}^T J \\ \hline -\hat{B}_z^T & -\bar{D}_{12}^T \bar{W}^T J \end{array} \right],$$

$$\hat{A}_z^T := \bar{A}_z^T + \bar{P}_z \bar{Y}, \quad \hat{B}_z^T := \bar{B}_z^T + \bar{D}_{12}^T J \bar{C}_1 \bar{Y},$$

$$\begin{bmatrix} \bar{B}_z^T & \bar{D}_{12}^T \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} B_2^T & D_{22}^T & 0_{p_2 \times r_6} & \bar{D}_{12}^T & 0 \\ 0 & -I_{q_2} & 0 & 0 & 0_{q_2 \times p_1} \end{bmatrix}$$

であり安定である。

以下では、 $\bar{K}(s)$ が補題の実現を持つことを示す。 $\mathbf{Y} \in \text{Gric} \{E_z^T, \bar{A}_z^T, \bar{P}_z, Q_z\}$ が存在し、(7) と (8) 式が成り立つとき、

$$\bar{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 Z_a E^T & 0 & Y_3 \\ \Delta_p^{1/2} Z_{pb}^T Z_a E^T & 0 & \Delta_p^{1/2} Y_4 \end{bmatrix}$$

とおくと

$$\bar{Y} \in \text{Gric} \{E_z^T, \bar{A}_z^T, \bar{P}_z, Q_z\},$$

$$\bar{T}_a (\bar{A}_z^T + \bar{P}_z \bar{Y}) = (\bar{A}_z^T + \bar{P}_z \mathbf{Y}) \bar{T}_b$$

が示される。ここで、

$$\bar{T}_a := \begin{bmatrix} Z_a & -Z_a E^T Z_{zb} \Delta_p^{1/2} \\ 0 & \Delta_p^{1/2} \end{bmatrix},$$

$$\bar{T}_b := \begin{bmatrix} Z_b^T + \hat{\Delta}_{34} Z_{pa}^T E^T Z_b^T & 0 & \hat{\Delta}_{34} \mathbf{C}_{1a} \mathbf{Y}_c \\ 0 & I_{q_2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{r_3} \end{bmatrix},$$

$$Z_{zb} := \mathbf{X}_a^T \mathbf{B}_{1b} - X_1 E \mathbf{Y}_a^T \mathbf{C}_{1b}^T, \quad \hat{\Delta}_{34} := X_3 \Delta_X^{-1} X_4^T$$

である。このことから、

$$\bar{\Delta}_Y = I_{r_6} + \mathbf{Y}_c^T \mathbf{C}_{1a}^T W_p W_p^T \mathbf{C}_{1a} \mathbf{Y}_c,$$

$$\bar{\Delta}_z^{-1} = I_{p_2} + W_p^T \mathbf{C}_{1a} \mathbf{Y}_c \mathbf{Y}_c^T \mathbf{C}_{1a}^T W_p,$$

$$\bar{\Delta}_p^{-1} = W_z^T \Delta_p^{-1} W_z, \quad \bar{W}_z = \Delta_p^{-1/2} W_z \bar{\Delta}_p^{1/2}$$

が示される. さらに, 正則行列により

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}_k & 0 \\ \mathbf{D}_{21}\mathbf{B}_1^T\mathbf{X}\mathbf{Q}_p & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -s\mathbf{E}_p + \bar{\mathbf{A}}_p & \bar{\mathbf{B}}_1 \\ \bar{\mathbf{C}}_2 & \bar{\mathbf{D}}_{21} \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} -s\mathbf{E}_p + \mathbf{A} - \mathbf{B}_1\mathbf{J}\mathbf{B}_1^T\mathbf{X} & \mathbf{B}_k\mathbf{W} \\ \mathbf{C}_2 - \mathbf{D}_{21}\mathbf{J}\mathbf{B}_1^T\mathbf{X} & \mathbf{D}_{21}\mathbf{W} \end{bmatrix}$$

となり補題が証明される.

B. 定理1の十分条件の証明

定理1の十分条件を証明する.

まず, H_∞ 制御問題の解の構造を示すため, 次式を満たすフルノーマルランクな有理関数行列 $G_{12}^+, G_{12}^-, G_{21}^+, G_{21}^-$ を定義する.

$$G_{21} \begin{bmatrix} G_{21}^+ & G_{21}^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{q_2} & 0_{q_2 \times (p_1 - q_2)} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} G_{12}^+ \\ G_{12}^- \end{bmatrix} G_{12} = \begin{bmatrix} I_{p_2} \\ 0_{(q_1 - p_2) \times p_2} \end{bmatrix}.$$

また, つぎの行列を定義する.

$$F^T(s) := \begin{bmatrix} F_1^T & F_2^T & F_3^T & F_4^T \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} G_{12}^+ & G_{12}^+ G_{11} \\ G_{22} G_{12}^+ & G_{22} G_{12}^+ G_{11} - G_{21} \\ G_{12}^- & G_{12}^- G_{11} \\ (G_{11} G_{21}^+)^{\#} & (G_{21}^+)^{\#} \end{bmatrix}.$$

このとき, つぎの補題が成り立つ.

[補題3] (文献1))

$$\Theta := \begin{bmatrix} \Theta_1 & F_3^{\#} & \Theta_3 & F_4^{\#} \end{bmatrix}$$

が J-lossless かつ

$$\tilde{K} := \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} J \begin{bmatrix} \Theta_1 & \Theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{K}_{11} & \tilde{K}_{12} \\ \tilde{K}_{21} & \tilde{K}_{22} \end{bmatrix}$$

が指数安定で $\tilde{K}^{-1}$ も指数安定となるように $\Theta_1, \Theta_3, G_{12}^+, G_{12}^-, G_{21}^+, G_{21}^-$ を選べるならば, H_∞ 制御問題は可解である. このとき, すべての制御器の集合は,

$$\{Q \in \mathbf{BH}_\infty \mid \det(\tilde{K}_{21}Q + \tilde{K}_{22}) \neq 0\}$$

を用いて $K(s) = \mathbf{HM}(\tilde{K}; Q)$ と表わすことができる. ■

証明のためには補題3の条件を満たすように Θ を構成すればよい. このために, $\bar{K}(s)$ が指数安定かつ $\bar{K}^{-1}(s)$ が指数安定となる H^{-1} の J-スペクトル因子を用いて

$$\begin{bmatrix} \Theta_1 & \Theta_3 \end{bmatrix} \\ = JF^{-1} \begin{bmatrix} \bar{K} \\ 0 \end{bmatrix} \\ = \left[\begin{array}{cc|c} s\mathbf{E}_z^T + \mathbf{A}_z^T & \mathbf{P}_z & \mathbf{C}_1^T \mathbf{J} \mathbf{D}_{12} \\ -\mathbf{Q}_z & s\mathbf{E}_z - \mathbf{A}_z & -\mathbf{B}_2 \\ 0 & \mathbf{J} \mathbf{C}_1 & \mathbf{D}_{12} \end{array} \right] \bar{K} \\ = \left[\begin{array}{cc|c} -s\mathbf{E}_\Theta + \mathbf{A}_\Theta & \mathbf{B}_{\Theta 1} & \mathbf{B}_{\Theta 3} \\ \mathbf{C}_\Theta & \mathbf{D}_{\Theta 1} & \mathbf{D}_{\Theta 3} \end{array} \right]$$

と Θ_1, Θ_3 を求める. ここで,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}_2^T & \mathbf{D}_{12}^T \end{bmatrix} \\ := \left[\begin{array}{ccc|cc} B_2^T & D_{22}^T & 0 & D_{12}^T & 0 \\ 0 & -I_{q_2} & 0_{q_2 \times r_6} & 0 & 0_{q_2 \times p_1} \end{array} \right],$$

$$\begin{bmatrix} -s\mathbf{E}_\Theta + \mathbf{A}_\Theta \\ \mathbf{C}_\Theta \end{bmatrix} \\ := \left[\begin{array}{cc|c} -s\mathbf{E}_z^T - \bar{\mathbf{A}}_z^T & 0 \\ 0 & -s\mathbf{E}_p + \bar{\mathbf{A}}_p \\ \hline \mathbf{C}_1^T \bar{\mathbf{Y}} & \mathbf{B}_1^T \bar{\mathbf{X}} \end{array} \right],$$

$$\bar{\mathbf{A}}_p := \mathbf{A}_p + \mathbf{P}_p \mathbf{X}, \quad \bar{\mathbf{X}} := \begin{bmatrix} \mathbf{X}_a E & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{A}}_z^T := \mathbf{A}_z^T + \mathbf{P}_z \mathbf{Y}, \quad \bar{\mathbf{Y}} := \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_a E^T & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}_{\Theta 1} & \mathbf{B}_{\Theta 3} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \mathbf{C}_K^T \mathbf{W} \\ \mathbf{B}_K \mathbf{W} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}_K^T := \mathbf{C}_1^T + \begin{bmatrix} Z_a E^T (\mathbf{X}_1 E \mathbf{Y}_a^T \mathbf{C}_1^T - \mathbf{X}_a^T \mathbf{B}_1) \\ 0_{p_1 \times (p_1 + q_1)} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}_{\Theta 1}^T \\ \mathbf{D}_{\Theta 3}^T \end{bmatrix} := \mathbf{W}^T \left(\begin{bmatrix} -\mathbf{C}_{1a} \mathbf{Y}_c \mathbf{Y}_c^T \mathbf{C}_1^T \\ \mathbf{B}_{1b}^T \mathbf{X}_c \mathbf{X}_c^T \mathbf{B}_1 \end{bmatrix} - \mathbf{J} \right)$$

である. この Θ_1, Θ_3 を用いて補題3の Θ を

$$\Theta = \begin{bmatrix} \Theta_1 & \Theta_2 & \Theta_3 & \Theta_4 \end{bmatrix}$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} -s\mathbf{E}_\Theta + \mathbf{A}_\Theta & \mathbf{B}_\Theta \\ \hline \mathbf{C}_\Theta & \mathbf{D}_\Theta \end{array} \right],$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}_\Theta \\ \mathbf{D}_\Theta \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{\Theta 1} & \mathbf{B}_{\Theta 2} & \mathbf{B}_{\Theta 3} & \mathbf{B}_{\Theta 4} \\ \mathbf{D}_{\Theta 1} & \mathbf{D}_{\Theta 2} & \mathbf{D}_{\Theta 3} & \mathbf{D}_{\Theta 4} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}_{\Theta 2} & \mathbf{D}_{\Theta 4} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} -\mathbf{B}_1^T \mathbf{X}_c & \mathbf{C}_1 \mathbf{Y}_c \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}_{\Theta 2} & \mathbf{B}_{\Theta 4} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 0_{(n+p_1) \times r_3} & \mathbf{B}_{\Theta 4a} \\ \mathbf{B}_{\Theta 2b} & 0_{(n+q_1) \times r_6} \end{bmatrix}$$

と構成する. ここで, $\mathbf{B}_{\Theta 2b}, \mathbf{B}_{\Theta 4a}$ はそれぞれ,

$$E^T \tilde{\mathbf{X}}_a^T \mathbf{B}_{\Theta 2b} + E^T \mathbf{X}_a^T \mathbf{P}_p \mathbf{X}_c = 0,$$

$$\tilde{\mathbf{X}}_a := (I - \mathbf{X}_c \mathbf{X}_c^T \mathbf{B}_1 \mathbf{J} \mathbf{B}_1^T) \mathbf{X}_a,$$

$$E \tilde{\mathbf{Y}}_a^T \mathbf{B}_{\Theta 4a} + E \mathbf{Y}_a^T \mathbf{P}_z \mathbf{Y}_c = 0,$$

$$\tilde{\mathbf{Y}}_a := (I + \mathbf{Y}_c \mathbf{Y}_c^T \mathbf{C}_1^T \mathbf{J} \mathbf{C}_1) \mathbf{Y}_a$$

を満たす行列とする. $\mathbf{B}_{\Theta 2b}$ の存在性は

$$E^T \tilde{\mathbf{X}}_a^T \mathbf{A}_p + \mathbf{A}_p^T \tilde{\mathbf{X}}_a E + E^T \tilde{\mathbf{X}}_a^T \mathbf{P}_p \tilde{\mathbf{X}}_a E \\ + E^T \mathbf{X}_a^T \mathbf{P}_p \mathbf{X}_c \mathbf{X}_c^T \mathbf{P}_p \mathbf{X}_a E = 0$$

より示される. $B_{\Theta 4a}$ も同様である.

$$\mathbf{P}_{\Theta} := \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{Y}}_a E^T & 0 \\ 0 & \tilde{\mathbf{X}}_a E \end{bmatrix} \\ \times \begin{bmatrix} I_n & 0 & X_1 E & 0 \\ Y_1 E^T & 0_{n \times p_1} & I_n & 0_{n \times q_1} \end{bmatrix}$$

とおくと, J-lossless であるための十分条件である

$$\mathbf{P}_{\Theta}^T \mathbf{A}_{\Theta} + \mathbf{A}_{\Theta}^T \mathbf{P}_{\Theta} + \mathbf{C}_{\Theta}^T \mathbf{J} \mathbf{C}_{\Theta} = 0,$$

$$\mathbf{P}_{\Theta}^T \mathbf{B}_{\Theta} + \mathbf{C}_{\Theta}^T \mathbf{J} \mathbf{D}_{\Theta} = 0, \quad \mathbf{D}_{\Theta}^T \mathbf{J} \mathbf{D}_{\Theta} = J,$$

$$\mathbf{E}_{\Theta}^T \mathbf{P}_{\Theta} = \mathbf{P}_{\Theta}^T \mathbf{E}_{\Theta} \geq 0$$

が成り立ち Θ は J-lossless となる. また,

$$\begin{bmatrix} G_{11}^{\#} & -I_{p_1} \\ G_{12}^{\#} & 0 \end{bmatrix} \Theta_2 = 0, \quad \begin{bmatrix} -I_{q_1} & G_{11} \\ 0 & G_{21} \end{bmatrix} \Theta_4 = 0$$

がしめせるので, 構成した Θ は補題 3 の条件を満たす.

C. 定理 1 の必要条件の証明

定理 1 の必要条件を証明する.

$$\mathbf{V}_p^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{V}_{p11} & \bar{V}_{p12} & \bar{V}_{p13} \\ 0 & \bar{V}_{p22} & \bar{V}_{p23} \end{bmatrix}$$

とおく. 適当な $\bar{F}_p$ に対して, つぎの行列を定義する.

$$G_{12}^{\perp} := \left[\begin{array}{ccc|c} -sE + A & B_2 & \bar{V}_{p11} \bar{F}_p + \bar{V}_{p13} & 0 \\ C_1 & D_{12} & \bar{V}_{p23} & -I \\ 0 & 0 & I & 0 \end{array} \right]$$

このとき, 仮定 2 の (E, A, B_2) の指数可安定性と仮定 6 から $G_{12}^{\perp}(s)$ は虚軸上および無限遠点でフルランクとなる.

$$G_{12}^{\perp} \begin{bmatrix} I & G_{11} & G_{12} \end{bmatrix} \\ = \left[\begin{array}{ccc|c} -sI + \Lambda_p - \bar{F}_p \Gamma_p & (\bar{F}_p \mathbf{V}_{pc} - \mathbf{V}_{pa}) \mathbf{B}_1 & 0 \\ -\Gamma_p & \mathbf{V}_{pc} \mathbf{B}_1 & 0 \end{array} \right]$$

である. よって, 虚軸上および無限遠点で

$$G_{12}^{\perp} (I - \Phi \Phi^{\#}) (G_{12}^{\perp})^{\#} > 0 \quad (\text{C.1})$$

であるので $R_p = \mathbf{V}_{pc} \mathbf{B}_1 \mathbf{J} \mathbf{B}_1^T \mathbf{V}_{pc}^T > 0$ が成り立つ. よって, 以下では一般性を失うことなく $R_p = I$ として議論を進める.

一方仮定 4, G_{12} の虚軸上の零点の仮定より, つぎの相似変換が存在する.

$$\begin{bmatrix} T_{pu} & 0 \\ T_{ps} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -sI + \Lambda_p \\ \Gamma_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{T}_{pu} & \bar{T}_{ps} \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} -sI + \tilde{\Lambda}_{pu} & 0 \\ * & -sI + \tilde{\Lambda}_{ps} \\ \tilde{\Gamma}_{pu} & 0 \end{bmatrix}$$

ここで, $\tilde{\Lambda}_{ps}$ は安定であり $(-\tilde{\Lambda}_{pu}^T, \tilde{\Gamma}_{pu}^T)$ は可安定である. よって, $-\tilde{\Lambda}_{pu} + \tilde{F}_{pu} \tilde{\Gamma}_{pu}$ が安定となる $\tilde{F}_{pu}$ が存在する. ここで,

$$\bar{F}_p = \mathbf{V}_{pa} \mathbf{B}_1 \mathbf{J} \mathbf{B}_1^T \mathbf{V}_{pc}^T + \bar{T}_{pu} \bar{F}_{pu} \text{ とおくと}$$

$$G_{12}^{\perp} \begin{bmatrix} I & G_{11} \end{bmatrix} \\ = \left[\begin{array}{c|c} -sI + \tilde{\Lambda}_{pu} - \tilde{F}_{pu} \tilde{\Gamma}_{pu} & \mathbf{B}_{12}^{\perp} \\ \hline -\tilde{\Gamma}_{pu} & \mathbf{V}_{pc} \mathbf{B}_1 \end{array} \right],$$

$$\mathbf{B}_{12}^{\perp} := \tilde{F}_{pu} \mathbf{V}_{pc} \mathbf{B}_1 - \mathbf{V}_{pu} \mathbf{B}_1,$$

$$\mathbf{V}_{pu} := T_{pu} \mathbf{V}_{pa} (I - \mathbf{B}_1 \mathbf{J} \mathbf{B}_1^T \mathbf{V}_{pc}^T \mathbf{V}_{pc})$$

である. この実現と (C.1) 式からハミルトン行列

$$\begin{bmatrix} -sI + \tilde{\Lambda}_{pu} & -\tilde{P}_{pu} \\ \tilde{\Gamma}_{pu}^T \tilde{\Gamma}_{pu} & -sI - \tilde{\Lambda}_{pu}^T \end{bmatrix}$$

は虚軸上に固有値を持たないことが示せる. ここで, $\tilde{P}_{pu} := \mathbf{V}_{pu} \mathbf{B}_1 \mathbf{J} \mathbf{B}_1^T \mathbf{V}_{pu}^T$ である. また, $(-\tilde{\Lambda}_{pu}^T, \tilde{\Gamma}_{pu}^T)$ は可安定であるので通常のリカッチ方程式

$$\tilde{\Lambda}_{pu} \tilde{X}_{pu} + \tilde{X}_{pu} \tilde{\Lambda}_{pu}^T + \tilde{X}_{pu} \tilde{\Gamma}_{pu}^T \tilde{\Gamma}_{pu} \tilde{X}_{pu} + \tilde{P}_{pu} = 0$$

で $-\tilde{\Lambda}_{pu}^T = -\tilde{\Lambda}_{pu}^T - \tilde{\Gamma}_{pu}^T \tilde{\Gamma}_{pu} \tilde{X}_{pu}$ の安定化解 $\tilde{X}_{pu}$ が存在する. 同様に G_{21}^T に関してもリカッチ方程式

$$\tilde{\Lambda}_{zu}^T \tilde{Y}_{zu} + \tilde{Y}_{zu} \tilde{\Lambda}_{zu} + \tilde{Y}_{zu} \tilde{\Gamma}_{zu}^T \tilde{\Gamma}_{zu} \tilde{Y}_{zu} + \tilde{P}_{zu} = 0$$

が定義でき, $-\tilde{\Lambda}_{zu}^T = -\tilde{\Lambda}_{zu}^T - \tilde{\Gamma}_{pu} \tilde{\Gamma}_{pu}^T \tilde{Y}_{zu}$ の安定化解 $\tilde{Y}_{zu}$ が存在する.

$$\mathcal{G} := \left[\begin{array}{c|c} -sI + \mathcal{A} & I \\ \hline C & 0 \end{array} \right], \quad \mathcal{A} := \begin{bmatrix} \hat{\Lambda}_{zu} & 0 \\ 0 & -\hat{\Lambda}_{pu}^T \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{P} := \begin{bmatrix} \tilde{Y}_{pu} & T_{zu} V_{z11} E^T V_{p11}^T T_{pu}^T \\ T_{pu} V_{p11} E V_{z11}^T T_{zu} & \tilde{X}_{pu} \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{C}^T := \begin{bmatrix} (\tilde{Y}_{zu} \tilde{\Gamma}_{zu} \mathbf{V}_{zc} + \mathbf{V}_{zu}) \mathbf{C}_1^T \\ (\tilde{X}_{pu} \tilde{\Gamma}_{pu} \mathbf{V}_{pc} + \mathbf{V}_{pu}) \mathbf{B}_1 \end{bmatrix}$$

を定義する. ただし, 添字 z に関する行列 $\{*\}_{z*}$ に関しては G_{21}^T に対して $\{*\}_{p*}$ と同様に定義することにする. このとき,

$$\mathcal{P} \mathcal{A} + \mathcal{A}^T \mathcal{P} + \mathcal{C}^T \mathcal{J} \mathcal{C} = 0$$

となる. また, Φ のプロパー性と閉ループ系の内部安定性より

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{G}^*(j\omega) \begin{bmatrix} I & -\Phi \\ -\Phi^* & I \end{bmatrix} \mathcal{G}(j\omega) d\omega$$

が証明できる. $(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ は可観測であることが示せ, Φ のノルム条件から次式が成り立つ.

$$\mathcal{P} > 0. \quad (\text{C.2})$$

$$\mathbf{X} := \begin{bmatrix} I & 0 & P_{13} \\ 0 & I & P_{23} \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \mathbf{V}_p \begin{bmatrix} \hat{X} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \Gamma_p & 0 & I \end{bmatrix} \mathbf{U}_p^{-1},$$

$$\begin{bmatrix} P_{13} \\ P_{23} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{pa} \\ \mathbf{V}_{pb} \end{bmatrix} \mathbf{P}_p \mathbf{V}_{pc}^T, \quad \hat{X} := T_{pu}^T \tilde{X}_{pu}^{-1} T_{pu},$$

$$\mathbf{U}_p = \begin{bmatrix} U_{pa} & U_{pb} & 0 \\ 0 & 0 & I_{r_3} \end{bmatrix}$$

とおくと構成の仕方および (C.2) 式から, $\mathbf{X} \in \text{Gric}\{\mathbf{E}_p, \mathbf{A}_p, \mathbf{P}_p, \mathbf{Q}_p\}$ が示される.

$\text{Gric}\{\mathbf{E}_z^T, \mathbf{A}_z^T, \mathbf{P}_z, \mathbf{Q}_z\}$ に関しても同様である. (7) と (8) 式に関しても, (C.2) 式から証明される.

D. $\hat{K}$ の構成

まず, G に関するワイエルストラス標準形²¹⁾を求める.

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} V_{wf} \\ V_{w\infty} \end{bmatrix} (-sE + A) \begin{bmatrix} U_{wf} & U_{w\infty} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -sI + \Lambda & 0 \\ 0 & -sN + I \end{bmatrix}, \\ & \begin{bmatrix} V_{wf} \\ V_{w\infty} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{1f} & B_{2f} \\ B_{1\infty} & B_{2\infty} \end{bmatrix}, \\ & \begin{bmatrix} U_{wf}^T \\ U_{w\infty}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1^T & C_2^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1f}^T & C_{2f}^T \\ C_{1\infty}^T & C_{2\infty}^T \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

ここで, $\begin{bmatrix} V_{wf}^T & V_{w\infty}^T \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} U_{wf} & U_{w\infty} \end{bmatrix}$ は正則行列, N はベキ零行列である. さらに $(N, C_{1\infty})$ の $T_o = \begin{bmatrix} \tilde{T}_o & \tilde{T}_{uo} \end{bmatrix}$, $T_o^{-T} = \begin{bmatrix} \tilde{T}_o^T & \tilde{T}_{uo}^T \end{bmatrix}$ による可観測標準形への変形

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \tilde{T}_o & 0 \\ \tilde{T}_{uo} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -sN + I & B_{2\infty} \\ C_{1\infty} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{T}_o & \tilde{T}_{uo} & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -sN_o + I_o & 0 & B_{2o} \\ -sM_o & -sN_{uo} + I & B_{2uo} \\ C_{1o} & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

を求めておく. ここで, (N_o, C_{1o}) は可観測対である.

以上より G は,

$$\begin{aligned} G &= \begin{bmatrix} -sI + \Lambda & B_{1f} & B_{2f} \\ C_{1f} & D_{11} & D_{21} \\ C_{2f} & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} -sN_o + I_o & 0 & B_{1o} & B_{2o} \\ -sM_o & -sN_{uo} + I & B_{1uo} & B_{2uo} \\ C_{1o} & 0 & 0 & 0 \\ C_{2o} & C_{2uo} & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

と分解できる. ここで, 構成のしかたから $\begin{bmatrix} N_o^T & C_{1o}^T \end{bmatrix}$ はフルランク, つまり

$$\begin{bmatrix} C_{1o}^T & N_o^T C_{1o}^T & \cdots & (N_o^{-1})^T C_{1o}^T \end{bmatrix}$$

はフルランクであり, 一方 $C_{1o}(sN_o - I)^{-1}B_{1o}$ はプロパーで (10) 式を満たすことより $B_{1o} = 0$ となる. また, (11) 式から $\begin{bmatrix} N_o & B_{2o} \end{bmatrix}$ はフルランクであり, (12) 式から $\begin{bmatrix} N_{uo}^T & C_{2uo}^T \end{bmatrix}$ はフルランクである.

$$\begin{bmatrix} U_{wb} & U_{wc} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} U_{w\infty} \tilde{T}_o & U_{w\infty} \tilde{T}_{uo} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} V_{wb}^T & V_{wc}^T \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} V_{w\infty}^T \tilde{T}_o^T & V_{w\infty}^T \tilde{T}_{uo}^T \end{bmatrix}$$

とおく. 解の性質から $\mathbf{X}_a E U_{wc} = 0, \mathbf{Y}_a E^T V_{wb}^T = 0$ であり

$$\begin{bmatrix} \hat{A} - A \\ \hat{C}_2 - C_2 \end{bmatrix} U_{wc} = 0, \begin{bmatrix} \hat{A}^T - A^T \\ \hat{B}_2^T - B_2^T \end{bmatrix} V_{wb}^T = 0$$

となることに注意する. 変形のしかたなら $N_o + B_{2o}F_i$ が正則となる F_i が存在する. また, $-s\mathbf{E}_p + \hat{\mathbf{A}}_p, -s\mathbf{E}_z + \hat{\mathbf{A}}_z$ の安定性から $(E, \hat{A}, \hat{B}_2), (E^T, \hat{A}^T, \hat{C}_2^T)$ はそれぞれ指数可安定である. よって $\hat{A}_z := \hat{A} + F_z \hat{C}_2$,

$$\begin{bmatrix} F_e \\ F_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{wf} & U_{wb} & U_{wc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & F_i & 0 \\ F_{pf} & F_o & 0 \end{bmatrix},$$

$$F_z^T \begin{bmatrix} V_{wf}^T & V_{wb}^T & V_{wc}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{zf}^T & 0 & F_{uo}^T \end{bmatrix}$$

とおくと $(\hat{E}, \hat{A}, \hat{B}_2)$ も指数可安定¹⁸⁾であり

$$\begin{bmatrix} V_{wf} \\ V_{wc} \end{bmatrix} (-sE + \hat{A}_z) \begin{bmatrix} U_{wf} & U_{wc} \end{bmatrix}$$

が指数安定でインパルスモードを持たず

$$\begin{bmatrix} V_{wf} \\ V_{wb} \end{bmatrix} (-s\hat{E} + \hat{A}_p) \begin{bmatrix} U_{wf} & U_{wb} \end{bmatrix}$$

が指数安定となる $F_{pf}, F_o, F_{zf}, F_{uo}$ が存在する. また,

$$\begin{aligned} \hat{E}^+ &= \begin{bmatrix} U_{wf} & U_{wb} & U_{wc} \end{bmatrix} \\ &\times \begin{bmatrix} V_{wf} (I - \hat{B}_2 F_i (N_o + V_{wb} B_2 F_i)^{-1} V_{wb}) \\ (N_o + V_{wb} B_2 F_i)^{-1} V_{wb} \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

により $\hat{E}^+$ を定めると,

$$F_e \hat{E}^+ \hat{E} = F_e, F_p \hat{E}^+ \hat{E} = F_p,$$

$$F_e \hat{E}^+ F_z = 0, F_e \hat{E}^+ \hat{A}_p U_{wc} = 0$$

がなりたつ. 以上の定数の選び方から $\hat{K}_p$ は, プロパーかつ安定で $-s\hat{E} + \hat{A}_k$ はインパルスモードを持たない.

[著者紹介]

宮崎 孝 (正会員)

1991年, 名古屋大学大学院工学研究科情報工学専攻博士前期課程修了. 93年同大学工学部電子機械工学科助手, 現在に至る. ディスクリプタシステム, ロバスト制御の研究に従事.

細江 繁幸 (正会員)

1967年, 名古屋大学大学院修士課程修了 (金属工学専攻). 同年名古屋大学工学部助手. 同講師, 助教授を経て 88年名古屋大学工学部教授 (電子機械工学科), 現在に至る. 制御理論, システム理論などに関する研究に従事 (工学博士).