フィードバック指数受動性に基づく多入出力非線形系に対する適応出力 フィードバック制御

水 本 郁 朗*・岩 井 善 太**・小 原 浩司朗*

Adaptive Output Feedback Control for MIMO Nonlinear Systems based on Feedback Exponential Passivity

Ikuro MIZUMOTO*, Zenta IWAI** and Koshiro KOHARA*

The property of systems that can be rendered exponentially passive via output feedback is called output feedback exponential passivity. The design of adaptive output feedback control for output feedback exponentially passive MIMO nonlinear systems is proposed. Further, the alleviation of the output feedback exponentially passive conditions by introducing a parallel feedforward compensator (PFC) will be considered and design principle for the PFC is derived. The new concrete design scheme for the PFC is also given.

Key Words: adaptive control, nonlinear systems, MIMO systems, feedback exponential passivity, parallel feed forward compensator

1. 緒 言

システムの受動性 (Passivity) は、非線形系の安定性を解析する重要なツールとして知られている。この受動性の概念を用いることにより、たとえば、受動的なシステムは、単純な定ゲイン出力フィードバックにより漸近安定とすることができる¹⁾ことや、また、強受動的 (strictly passive) なシステムと受動的なシステムとの負のフィードバック結合は、安定となる^{2)~4)} ことなど、いくつかの非線形フィードバック制御系の設計において注目すべき結果が得られている。後者の結果は、安定な適応制御系を設計する上での重要な結果の1つで、受動定理として知られている。ただ、残念なことに、この非線形系の受動性は、ほとんどの実システムにとって満足されない条件となっている。この点に対し、Byrnes ら¹⁾ は、状態フィードバックによりシステムが (強) 受動化可能な、すなわちフィードバック (強) 受動 (feedback (strictly) passive:F(S)P) するための条件が、1) システムの相対次数が $\{1, 1, \dots, 1\}$ であり、2) システムが弱最小位相 (最小位相) (weakly minimum phase(minimum phase))、であることを示し、さらに Seron ら⁵⁾ は、上述の feedback passive (FP)

条件のもとで、適応制御系の設計法の提案を行っている。しかしながら、上述の FP 条件もまだ、実システムにとっては厳しい制約であり、また、たとえシステムが FP であっても、制御系を受動化するためには、すべての状態変数の情報が必要とされていた。この問題に対する1つの解として近年 Backstepping 法に基づく制御系設計法が提案されている⁶⁾。しかしこの手法は、基本的には制御系を構成するためにはシステムの次数に関する情報が必要であり、高次のシステムに対しては、その構造はかなり複雑となる。

さて、線形系においてもこの FP 性はこれまで意欲的に議論されており、上述した FP 条件は、線形系では、almost strictly positive real (ASPR) 条件として知られている⁷⁾。この線形系に対する ASPR 条件は、状態フィードバックによる (強) 受動化だけでなく同時に出力フィードバックによるシステムの (強) 受動化をも実現することができる。このことから、線形系においては、高次のシステムに対してもプラントの ASPR 性に基づいてプラントの次数に依存しない出力フィードバック形式の構造の簡単な適応制御系が設計できることが知られている⁸⁾。しかし、非線形系の場合と同様に線形系においてもこの条件は厳しい制約条件となっていた。この点に関して、線形系においては、1つの解決策として、並列フィードフォワード補償 (parallel feedforward compensator: PFC) の導入が検討されている^{9)~12)}。この手法は、PFC を付加した拡張系を ASPR にすることで、この拡張系に対し、システムの ASPR 性に基づく制御手法が適用できるというものであり、そのような PFC の具体的な

* 熊本大学大学院自然科学研究科 熊本市黒髪 2-39-1

** 熊本大学工学部 熊本市黒髪 2-39-1

* Graduate School of Science and Technology, Kumamoto University, Kumamoto

** Faculty of Engineering, Kumamoto University, Kumamoto

(Received March 31, 2000)

(Revised December 6, 2000)

設計法もすでにいくつか提案されている^{10)~12)}。さらに、近年、1 入出力非線形系に対する適応制御系設計法に関して、PFC 導入の概念がすでに一部応用されている^{13)~15)}。しかし、現在までのところ多入出力系に対する十分な検討はなされていない。

本報告では、文献 16) で考察されている出力フィードバック指数受動性 (output feedback exponential passivity: OFEP) のもと多入出力非線形系に対して、出力フィードバック形式のシステムの次数に依存しない適応制御系が簡単に構成できることを示す。さらに、対象システムが OFEP 条件を満足していない場合に対し、この OFEP 条件を緩和するための非線形系に対する具体的な PFC 設計法の提案を行う。

2. 準備 (強受動性とシステム表現)

つぎのように表される Affine 非線形システムを考える。

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{h}(\mathbf{x})\end{aligned}\quad (2.1)$$

ここに、 $\mathbf{x}(t) \in R^n$ は状態ベクトル、 $\mathbf{u}(t) \in R^m$ は入力、 $\mathbf{y}(t) \in R^m$ は出力である。また、 $\mathbf{f}(\mathbf{x}) : R^n \rightarrow R^n$ 、 $\mathbf{G}(\mathbf{x}) = [\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_m] : R^n \rightarrow R^{n \times m}$ および $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = [h_1, h_2, \dots, h_m]^T : R^n \rightarrow R^m$ は、滑らかであり、 $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ 、 $\mathbf{h}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ とする。

ここでは、まず準備として (2.1) で表されるシステムの強受動性および相対次数に関する定義を示しておく。

【定義 1】(強受動性: strict passivity)^{1), 5)} システム (2.1) は任意の $t \geq 0$, $\mathbf{u} \in R^m$, $\mathbf{x}(0) \in R^n$ に対し、

$$V(\mathbf{x}(t)) - V(\mathbf{x}(0)) \leq \int_0^t \mathbf{y}(\tau)^T \mathbf{u}(\tau) d\tau - \int_0^t \zeta(\mathbf{x}(\tau)) d\tau \quad (2.2)$$

を満足するような非負の連続関数 $V : R^n \rightarrow R$, $V(0) = 0$, $\forall t \geq 0$ および正定値関数 $\zeta : R^n \rightarrow R$ が存在するとき、強受動的 (strictly passive) であるという。

【定義 2】(指数受動性: exponential passivity)¹⁶⁾ 強受動的なシステム (2.1) は、(2.1) の任意の解 $\mathbf{x}(t)$ に対し、

$$\alpha_1 \|\mathbf{x}\|^2 \leq V(\mathbf{x}) \leq \alpha_2 \|\mathbf{x}\|^2 \quad (2.3)$$

$$\alpha_3 \|\mathbf{x}\|^2 \leq \zeta(\mathbf{x}) \quad (2.4)$$

なる関係を満足する正定数 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ が存在するとき、指数受動的 (exponentially passive) であるという。

【定義 3】(相対次数: relative degree)¹⁷⁾ システム (2.1) は、すべての $\mathbf{x} \in R^n$ に対し、すべての $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, m$, $k = 1, \dots, \gamma_i - 2$ で

$$L_{g_j} L_f^k h_i(\mathbf{x}) = 0 \quad (2.5)$$

であり、さらに $m \times m$ 行列

$$\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} L_{g_1} L_f^{\gamma_1-1} h_1(\mathbf{x}) & \cdots & L_{g_m} L_f^{\gamma_1-1} h_1(\mathbf{x}) \\ L_{g_1} L_f^{\gamma_2-1} h_2(\mathbf{x}) & \cdots & L_{g_m} L_f^{\gamma_2-1} h_2(\mathbf{x}) \\ \vdots & & \vdots \\ L_{g_1} L_f^{\gamma_m-1} h_m(\mathbf{x}) & \cdots & L_{g_m} L_f^{\gamma_m-1} h_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

がすべての $\mathbf{x} \in R^n$ で正則であるとき、(一様) 相対次数 $\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m\}$ を持つという。ここに、 $L_f h_i$, $L_{g_j} h_i$ はそれぞれ $h_i(\mathbf{x})$ の $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\mathbf{g}_j(\mathbf{x})$ によるリー (Lie) 微分である。

さて、システム (2.1) が相対次数 $\{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$ を持ち、さらに以下の仮定が満足されているとする。

[仮定 1]

$$\tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{x}) = [\tilde{\mathbf{g}}_1(\mathbf{x}), \dots, \tilde{\mathbf{g}}_m(\mathbf{x})] = \mathbf{G}(\mathbf{x}) \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{x})^{-1} \quad (2.7)$$

とおくとき、

(1) ベクトル場 $\tilde{\mathbf{g}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{g}}_m$ は完備 (complete)

(2) ベクトル場 $\tilde{\mathbf{g}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{g}}_m$ は可換 (commute)

((2) は、 $\text{span}\{\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_m\}$ がインボリューティブと同じ条件)

このとき、ある滑らかな正則変換 $\mathbf{z} = [z_1, \dots, z_n]^T = \Phi(\mathbf{x})$ が存在し、システム (2.1) が、

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{z}}_\xi(t) &= \mathbf{A} \mathbf{z}_\xi(t) + \mathbf{B} \tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{z}_\xi, \mathbf{z}_q) + \mathbf{B} \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{z}_\xi, \mathbf{z}_q) \mathbf{u}(t) \\ \dot{\mathbf{z}}_q(t) &= \mathbf{q}(\mathbf{z}_\xi, \mathbf{z}_q)\end{aligned}\quad (2.8)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{z}_\xi(t)$$

と表されることが知られている^{17), 18)}。ここに、

$$\mathbf{z}_\xi(t) = [z_1(t), \dots, z_\gamma(t)]^T, \quad \gamma = \sum_{i=1}^m \gamma_i \quad (2.9)$$

$$\mathbf{z}_q(t) = [z_{\gamma+1}(t), \dots, z_n(t)]^T$$

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) &= [L_f^{\gamma_1} h_1(\mathbf{0}), \dots, L_f^{\gamma_m} h_m(\mathbf{0})]^T = \mathbf{0} \\ \mathbf{q}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) &= \mathbf{0}\end{aligned}\quad (2.10)$$

であり、

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \text{diag}[\mathbf{A}_i]_{i=1, \dots, m}, \quad \mathbf{B} = \text{diag}[\mathbf{b}_i]_{i=1, \dots, m} \\ \mathbf{C} &= \text{diag}[\mathbf{c}_i^T]_{i=1, \dots, m}\end{aligned}\quad (2.11)$$

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

$$\mathbf{c}_i^T = [1 \ 0 \ \cdots \ 0]$$

$$\mathbf{A}_i \in R^{\gamma_i \times \gamma_i}, \mathbf{b}_i, \mathbf{c}_i \in R^{\gamma_i}$$

である。(2.8) のシステム表現は、Isidori の標準形と呼ばれている。以下、(2.1) に対する (2.8) のシステム表現を単に標準形と呼ぶことにする。

本報告では、以下、(2.8) の標準形に変換可能なシステム (2.1) を対象に考察を行う。

3. 出力フィードバック指数受動性に基づく適応制御

ある状態フィードバックにより構成された閉ループ系が受動化可能な場合、そのシステムはフィードバック受動 (FP) なシステムと呼ばれる⁵⁾。ここでは、出力フィードバックにより指数受動化可能な出力フィードバック指数受動 (OFEP) なシステムに対する適応制御手法の提案を行う。

【定義4】(出力フィードバック指数受動: output feedback exponentially passive (OFEP)) システム (2.1) は、構成された閉ループ系が $\mathbf{v}(t)$ から $\mathbf{y}(t)$ に関して指数受動的となる滑らかな出力フィードバック:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t) &= \mathbf{r}(\mathbf{y}) + \Omega(\mathbf{y})\mathbf{v}(t) \\ \mathbf{r}(\mathbf{0}) &= \mathbf{0}, \quad \Omega(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.1)$$

が存在するとき、出力フィードバック指数受動 (OFEP) であると呼ばれる。

標準形 (2.8) を持つシステム (2.1) が OFEP であるための十分条件は、すでにつぎのような条件が明らかにされている¹⁶⁾。

[出力フィードバック指数受動条件 (OFEP 条件)]

- (1) システム (2.1) は、相対次数 $\{1, \dots, 1\}$ を持つ。
- (2) システム (2.1) は、指数最小位相である。すなわち、標準形 (2.8) により定義されるゼロダイナミクス:

$$\dot{\mathbf{z}}_q(t) = \mathbf{q}(\mathbf{0}, \mathbf{z}_q) \quad (3.2)$$

は、指数安定である。

- (3) 標準形の $\tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{z}_\xi, \mathbf{z}_q)$ および $\mathbf{q}(\mathbf{z}_\xi, \mathbf{z}_q)$ は、 $(\mathbf{z}_\xi, \mathbf{z}_q)$ に関して Lipschitz である。

- (4) 標準形の $\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{z}_\xi, \mathbf{z}_q)$ は、 $\tilde{\mathbf{B}}_0 \tilde{\mathbf{B}}_1(\mathbf{y})$, $\tilde{\mathbf{B}}_0 = \tilde{\mathbf{B}}_0^T > \mathbf{0}$ と表される。

上述の条件は、

$$\mathbf{u}(t) = -\tilde{\mathbf{B}}_1(\mathbf{y})^{-1} \mathbf{K} \mathbf{y}(t) + \tilde{\mathbf{B}}_1(\mathbf{y})^{-1} \mathbf{v}(t) \quad (3.3)$$

なる出力フィードバックにより構成されたシステム (2.1) に対する閉ループ系が $\mathbf{K}^T + \mathbf{K} \geq \mathbf{K}_0$ なるすべての $\mathbf{K}$ に対し、 $\mathbf{v}(t)$ から $\mathbf{y}(t)$ に関して指数受動的となる正定対称行列 $\mathbf{K}_0$ が存在するという意味で、出力フィードバック指数受動条件を与えている (付録 A 参照)。

いま、上記の OFEP 条件を満足するシステム (2.1) を考える。ただし、標準形の $\tilde{\mathbf{B}}_1(\mathbf{y})$ は既知とする。このシステムに対し、制御入力を適応的に

$$\mathbf{u}(t) = -\tilde{\mathbf{B}}_1(\mathbf{y})^{-1} \mathbf{K}(t) \mathbf{y}(t) \quad (3.4)$$

$$\dot{\mathbf{K}}(t) = \mathbf{y}(t) \mathbf{y}(t)^T \Gamma, \quad \Gamma = \Gamma^T > \mathbf{0} \quad (3.5)$$

と構成する。このとき、構成された制御系の安定性に関し、以下の定理が成立する。

《定理1》 システム (2.1) は、標準形 (2.8) に変換可能であるとする。このとき、システム (2.1) が OFEP 条件を満足しているならば、制御入力を (3.4), (3.5) と構成するとき、制御系内の全信号は有界であり、さらに、 $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{y}(t) = \mathbf{0}$ となる。
(証明) OFEP 条件を満足するシステムは相対次数 $\{1, \dots, 1\}$ を持つことから、標準形は

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{y}}(t) &= \tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{y}, \mathbf{z}_q) + \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{y}) \mathbf{u}(t) \\ \dot{\mathbf{z}}_q(t) &= \mathbf{q}(\mathbf{y}, \mathbf{z}_q) \end{aligned} \quad (3.6)$$

と表される。

いま、制御入力を

$$\mathbf{u}(t) = -\tilde{\mathbf{B}}_1(\mathbf{y})^{-1} \mathbf{K}^* \mathbf{y}(t) + \tilde{\mathbf{B}}_1(\mathbf{y})^{-1} \mathbf{v}(t) \quad (3.7)$$

$$\mathbf{v}(t) = -\Delta \mathbf{K}(t) \mathbf{y}(t) \quad (3.8)$$

$$\Delta \mathbf{K}(t) = \mathbf{K}(t) - \mathbf{K}^* \quad (3.9)$$

と書き表す。ここに、 $\mathbf{K}^*$ は、システム (3.6) を指数受動化する出力フィードバックゲインである。OFEP 条件のもと、このような出力フィードバックゲインは必ず存在する (付録 A 参照)。このとき、構成された閉ループ系は

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{y}}(t) &= \tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{y}, \mathbf{z}_q) - \tilde{\mathbf{B}}_0 \mathbf{K}^* \mathbf{y}(t) + \tilde{\mathbf{B}}_0 \mathbf{v}(t) \\ \dot{\mathbf{z}}_q(t) &= \mathbf{q}(\mathbf{y}, \mathbf{z}_q) \end{aligned} \quad (3.10)$$

と表される。ここで、OFEP 条件 (2) より、ゼロダイナミクス:

$$\dot{\mathbf{z}}_q(t) = \mathbf{q}(\mathbf{0}, \mathbf{z}_q) \quad (3.11)$$

が指数安定であり、さらに、OFEP 条件 (3) より、 $\mathbf{q}(\mathbf{y}, \mathbf{z}_q)$ が $(\mathbf{y}, \mathbf{z}_q)$ に関して Lipschitz であることから、次式を満足する正定値関数 $W(\mathbf{z}_q)$ が存在する^{19), 20)}。

$$\begin{aligned} \frac{\partial W(\mathbf{z}_q)}{\partial \mathbf{z}_q} \mathbf{z}_q(\mathbf{0}, \mathbf{z}_q) &\leq -\alpha_1 \|\mathbf{z}_q(t)\|^2 \\ \left\| \frac{\partial W(\mathbf{z}_q)}{\partial \mathbf{z}_q} \right\| &\leq \alpha_2 \|\mathbf{z}_q(t)\| \\ \alpha_3 \|\mathbf{z}_q(t)\|^2 &\leq \|W(\mathbf{z}_q)\| \leq \alpha_4 \|\mathbf{z}_q(t)\|^2 \end{aligned} \quad (3.12)$$

ここに、 $\alpha_1 \sim \alpha_4$ は、ある正定数である。このとき、

$$\mathbf{V}_1(\mathbf{y}, \mathbf{z}_q) = W(\mathbf{z}_q) + \frac{1}{2} \mathbf{y}(t)^T \tilde{\mathbf{B}}_0^{-1} \mathbf{y}(t) \quad (3.13)$$

なる正定値関数を考えると、その時間微分が

$$\dot{\mathbf{V}}_1(\mathbf{y}, \mathbf{z}_q) \leq \mathbf{y}(t)^T \mathbf{v}(t) - c_1 \|\mathbf{z}_q(t)\|^2 - c_2 \|\mathbf{y}(t)\|^2 \quad (3.14)$$

と評価できる正定数 c_1, c_2 が存在する (付録 A 参照)。そこで、つぎの正定値関数を考える。

$$\mathbf{V}(t) = \mathbf{V}_1(\mathbf{y}, \mathbf{z}_q) + \frac{1}{2} \text{tr}[\Delta \mathbf{K}(t) \Gamma^{-1} \Delta \mathbf{K}(t)^T] \quad (3.15)$$

$\mathbf{V}(t)$ の時間微分は、(3.5), (3.8), (3.14) より、

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{V}}(t) &= \dot{\mathbf{V}}_1(\mathbf{y}, \mathbf{z}_q) + \text{tr}[\Delta \mathbf{K}(t) \Gamma^{-1} \dot{\Delta \mathbf{K}}(t)^T] \\ &= \dot{\mathbf{V}}_1(\mathbf{y}, \mathbf{z}_q) + \text{tr}[\Delta \mathbf{K}(t) \mathbf{y}(t) \mathbf{y}(t)^T] \\ &= \dot{\mathbf{V}}_1(\mathbf{y}, \mathbf{z}_q) + \mathbf{y}(t)^T \Delta \mathbf{K}(t) \mathbf{y}(t) \\ &= \dot{\mathbf{V}}_1(\mathbf{y}, \mathbf{z}_q) - \mathbf{y}(t)^T \mathbf{v}(t) \\ &\leq -c_1 \|\mathbf{z}_q(t)\|^2 - c_2 \|\mathbf{y}(t)\|^2 \leq 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

と評価できる。すなわち、 $\mathbf{y}(t)$, $\mathbf{z}_q(t)$ および $\Delta \mathbf{K}(t)$ は有界である。ここで、当然のことながら $\mathbf{K}^*$ としては、(A.8) 式

を満足する有界な定数行列を考えており（厳密には、ここでは K^* として、 $\lambda_{\min}(K^{*T} + K^*) = \beta_0 + c_2$ となる定数行列を考えている。 β_0 は (A.7) 式で定義される有界な正定数である。）、この有界な定数行列 K^* を用いて構成された正定値関数 $V(t)$ を考えていることから、 $\Delta K(t)$ の有界性より $K(t)$ も有界であることがわかる。このことから、制御系内の全信号が有界となることは明らかである。さらに、(3.16) より、 $y, z_q \in L_2$ であることもわかる。また、(3.6) より、明らかに $\dot{y}, \dot{z}_q \in L_\infty$ である。よって、 $y, \dot{y} \in L_\infty$ 、 $y \in L_2$ であることから、 $r(t) = \|y(t)\|^2$ とおくと、 $r(t)$ は一様連続であり、かつ $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t r(\tau) d\tau$ が存在し有界である。よって、Barbalat の補題²⁰⁾より、 $\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = 0$ 、すなわち $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$ が得られる。

注意：提案手法では、オブザーバを必要としないことから、 $\tilde{B}_1(y)$ が既知であれば制御対象の次数にまったく依存しない制御系が構成できる。すなわち、高次のシステムに対してもシンプルな制御系の構造を保つことができ、次数のミスマッチに対してもロバストな制御系が構成可能である。ただ、 $\tilde{B}_1(y)$ を得るためには、少なくとも元の非線形プラントの入力がどのようにシステムに印加されているのかという情報（相対次数の情報もこれから得られる）と $G(x)$ および $h(x)$ がどのような状態量に依存しているかという情報、およびその状態量に関する微分方程式 ($f(x)$ の要素) の構造に関する情報が必要となる。しかし、他の部分（これらに関係のないことが解っている高次の項やそのために無視した部分）の情報は必要としないことから、正確な制御対象の次数に関する情報は必要とはならない。

4. PFC 導入によるシステムの出力フィードバック指数受動化

4.1 PFC の基本的設計条件

いま、相対次数 $\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m\}$ 、 $\gamma_i > 1$ を持ち、標準形 (2.8) で表されるシステム (2.1) を考える。このシステムは、つぎの仮定を満足しているものとする。

[仮定 2]

- (1) システムは指数最小位相である。
- (2) 標準形の $\tilde{a}(z_\xi, z_q)$ および $q(z_\xi, z_q)$ は、 (z_ξ, z_q) に関して Lipschitz である。
- (3) 標準形の $\tilde{B}(z_\xi, z_q)$ は、 $\tilde{B}(y)$ と表され、既知である。

上記仮定を満足するシステムに対して、任意の n_f 次の並列フィードフォワード補償 (PFC) をつぎのように構成する。

$$\begin{aligned} \dot{z}_f(t) &= A_f z_f(t) + B_f \tilde{B}(y) u(t) \\ y_f(t) &= C_f z_f(t) \end{aligned} \quad (4.1)$$

このとき、PFC を付加した拡張系は、

$$\begin{aligned} \dot{z}_a(t) &= A_a z_a(t) + B_a \tilde{B}(y) u(t) + B_1 \tilde{a}(z_\xi, z_q) \\ \dot{z}_q(t) &= q(z_\xi, z_q) \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$y_a(t) = y(t) + y_f(t) = C_a z_a(t)$$

と表される。ここに、 $z_a(t) = [z_\xi(t)^T, z_f(t)^T]^T$ であり、

$$\begin{aligned} A_a &= \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A_f \end{bmatrix}, B_a = \begin{bmatrix} B \\ B_f \end{bmatrix} \\ C_a &= [C, C_f], B_1 = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.3)$$

である。

ここで、PFC が拡張系の線形部 (A_a, B_a, C_a) が ASPR、すなわち、1) 相対 MacMillan 次数が m (相対次数 $\{1, \dots, 1\}$)、2) 最小位相、3) 高周波ゲイン行列 $C_a B_a$ が正定対称行列、となるように設計されているものと仮定する。

このとき、 (A_a, B_a, C_a) の相対 MacMillan 次数が m であることから、つぎの関係を満足する行列、 $N \in R^{(\gamma-m+n_f) \times (\gamma+n_f)}$ 、 $M \in R^{(\gamma+n_f) \times (\gamma-m+n_f)}$ が存在する²¹⁾。

$$N B_a = 0, C_a M = 0, N M = I_{\gamma-m+n_f} \quad (4.4)$$

ここで、つぎの正則変換：

$$\begin{bmatrix} y_a(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = T z_a(t), T = \begin{bmatrix} C_a \\ N \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

を考えると、拡張系 (4.2) は、

$$\begin{aligned} \dot{y}_a(t) &= \Theta_y y_a(t) + B_c \tilde{B}(y) u(t) + C_2 x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= A_2 x_2(t) + B_2 y_a(t) + B_3 \tilde{a}(z_\xi, z_q) \\ \dot{z}_q(t) &= q(z_\xi, z_q) \end{aligned} \quad (4.6)$$

と表される。ここに、

$$\begin{aligned} \Theta_y &= C_a A_a B_a B_c^{-1}, B_c = C_a B_a, C_2 = C_a A_a M \\ A_2 &= N A_a M, B_2 = N A_a B_a B_c^{-1}, B_3 = N B_1 \end{aligned} \quad (4.7)$$

である。また、 A_2 は、システム (A_a, B_a, C_a) の零点に対応する行列であり、 (A_a, B_a, C_a) が最小位相であることから安定行列となる。すなわち、任意の正定対称行列 $Q_2 \in R^{(\gamma-m+n_f) \times (\gamma-m+n_f)}$ に対し、つぎのリアプノフ方程式：

$$A_2^T P_2 + P_2 A_2 = -Q_2 \quad (4.8)$$

を満足する正定対称行列 P_2 が必ず存在する。このとき、拡張系の OFEP 性に関して以下の定理が成立する。

《定理 2》 仮定 2 を満足するシステム (2.1) に対し、(4.1) で与えられる PFC を付加して得られる拡張系 (4.2) を考える。このとき、PFC (4.1) が拡張系の線形部 (A_a, B_a, C_a) が ASPR であり、かつ、(4.4) および (4.8) で与えられる N, M および P_2, Q_2 に関し、

$$\begin{aligned} \lambda_{\min}[Q_2] &> 2L_2 \|B_3\| \|P_2\| \|M\| \\ &+ \frac{(\alpha_2 L_1 \|M\| + 2L_2 \|B_3\| \|P_2\|)^2}{4\delta_1} \end{aligned} \quad (4.9)$$

が満足されるように設計されていれば、拡張系 (4.2) は、出力フィードバック指数受動 (OFEP) となる。ここに、 L_1, L_2 は、それぞれ $q(z_\xi, z_q)$ および $\tilde{a}(z_\xi, z_q)$ に関する Lipschitz

定数であり, α_2 は, ゼロダイナミクスの指数安定性に関連して (3.12) で与えられる正定数であり, さらに, δ_1 は, (3.12) で与えられる正定数 α_1 に対し, $0 < \delta_1 < \alpha_1$ となる正定数である.

(証明) PFC の設計条件より, 構成された拡張系 (4.2) の線形部 (A_a, B_a, C_a) は ASPR である. よって, 正則変換 (4.5) により, (4.6) の標準形で表すことができる. このとき, 制御入力を

$$u(t) = -\tilde{B}(y)^{-1} K y_a(t) - \tilde{B}(y)^{-1} v(t) \quad (4.10)$$

と構成すると, 得られる閉ループ系は, (4.6) より

$$\begin{aligned} \dot{y}_a(t) &= \Theta_y y_a(t) + B_c K y_a(t) + B_c v(t) + C_2 x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= A_2 x_2(t) + B_2 y_a(t) + B_3 \tilde{a}(z_\xi, z_q) \\ \dot{z}_q(t) &= q(z_\xi, z_q) \end{aligned} \quad (4.11)$$

と表される. このとき, 仮定 2 および PFC の設計条件より, (3.12) を満足する正定値関数: $W(z_q)$ および (4.8) を満足する正定対称行列 P_2, Q_2 が必ず存在することから, つぎの正定値関数:

$$V_a(y_a, x_2, z_q) = W(z_q) + x_2^T P_2 x_2 + \frac{1}{2} y_a^T B_c^{-1} y_a \quad (4.12)$$

を考える. ここで, 仮定 2(1) および (3.12) より, $W(z_q)$ の時間微分は, $q(z_\xi, z_q)$ の Lipschitz 定数を L_1 とすると

$$\dot{W}(z_q) \leq -\alpha_1 \|z_q\|^2 + \alpha_2 L_1 \|z_q\| \|z_\xi\| \quad (4.13)$$

と評価できる (付録 A 参照). さらに, (4.4), (4.5) より,

$$T^{-1} = [B_a B_c^{-1}, M] \quad (4.14)$$

であることから,

$$\|z_\xi\| \leq \|z_a\| \leq \|M\| \|x_2\| + \|B_a B_c^{-1}\| \|y_a\| \quad (4.15)$$

と評価できる. よって, (4.13), (4.15) より,

$$\dot{W}(z_q) \leq -\alpha_1 \|z_q\|^2 + \beta_1 \|z_q\| \|x_2\| + \beta_2 \|z_q\| \|y_a\| \quad (4.16)$$

を得る. ここに,

$$\beta_1 = \alpha_2 L_1 \|M\|, \beta_2 = \alpha_2 L_1 \|B_a B_c^{-1}\| \quad (4.17)$$

である. つぎに, $x_2^T P_2 x_2$ の時間微分は, (4.8), (4.11) より,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [x_2^T P_2 x_2] &\leq -\lambda_{\min}[Q_2] \|x_2\|^2 + 2 \|B_2\| \|P_2\| \|x_2\| \|y_a\| \\ &\quad + 2 \|B_3\| \|P_2\| \|x_2\| \|\tilde{a}(z_\xi, z_q)\| \end{aligned} \quad (4.18)$$

と評価できる. ここで, 仮定 2(2) より, $\tilde{a}(z_\xi, z_q)$ に関する Lipschitz 定数を L_2 とおくと, (4.15), (4.18) より

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [x_2^T P_2 x_2] &\leq -\alpha_Q \|x_2\|^2 + \beta_3 \|x_2\|^2 \\ &\quad + \beta_4 \|x_2\| \|z_q\| + 2 \beta_5 \|x_2\| \|y_a\| \end{aligned} \quad (4.19)$$

となる. ここに,

$$\begin{aligned} \alpha_Q &= \lambda_{\min}[Q] \\ \beta_3 &= 2 L_2 \|B_3\| \|P_2\| \|M\| \\ \beta_4 &= 2 L_2 \|B_3\| \|P_2\| \\ \beta_5 &= 2 L_2 \|B_3\| \|P_2\| \|B_a B_c^{-1}\| + 2 \|B_2\| \|P_2\| \end{aligned} \quad (4.20)$$

である. さらに, $\frac{1}{2} y_a^T B_c^{-1} y_a$ の時間微分は, (4.11) より,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [y_a^T B_c^{-1} y_a] &\leq -(\alpha_K - \beta_6) \|y_a\|^2 \\ &\quad + \beta_7 \|x_2\| \|y_a\| + y_a^T v \end{aligned} \quad (4.21)$$

と評価できる. ここに,

$$\begin{aligned} \alpha_K &= \frac{1}{2} \lambda_{\min}[K^T + K] \\ \beta_6 &= \|\Theta_y\| \|B_c^{-1}\|, \beta_7 = \|C_2\| \|B_c^{-1}\| \end{aligned} \quad (4.22)$$

である. 結局, 以上のことより, $V_a(z_q, x_2, y_a)$ の時間微分は,

$$\begin{aligned} \dot{V}_a &\leq -\alpha_1 \|z_q\|^2 - (\alpha_Q - \beta_3) \|x_2\|^2 \\ &\quad + (\beta_1 + \beta_4) \|z_q\| \|x_2\| + \beta_2 \|z_q\| \|y_a\| \\ &\quad + (\beta_5 + \beta_7) \|x_2\| \|y_a\| - (\alpha_K - \beta_6) \|y_a\|^2 \\ &\quad + y_a^T v \\ &\leq -(\alpha_1 - \delta_1 - \delta_2) \|z_q\|^2 \\ &\quad - (\alpha_Q - \beta_3 - \frac{(\beta_1 + \beta_4)^2}{4\delta_1} - \delta_3) \|x_2\|^2 \\ &\quad - (\alpha_K - \beta_6 - \frac{\beta_2^2}{4\delta_2} - \frac{(\beta_5 + \beta_7)^2}{4\delta_3}) \|y_a\|^2 \\ &\quad + y_a^T v \end{aligned} \quad (4.23)$$

と評価できる. ここに, δ_1, δ_2 および δ_3 は, 任意の正定数である. このとき, δ_1 を $0 < \delta_1 < \alpha_1$, δ_2 を $0 < \delta_2 < \alpha_1 - \delta_1$ ととり, さらに, PFC の設計条件 (4.9) より

$$\alpha_Q - \beta_3 - \frac{(\beta_1 + \beta_4)^2}{4\delta_1} > 0$$

であることから, δ_3 を

$$0 < \delta_3 < \alpha_Q - \beta_3 - \frac{(\beta_1 + \beta_4)^2}{4\delta_1} \quad (4.24)$$

ととると,

$$\alpha_K > \beta_6 + \frac{\beta_2^2}{4\delta_2} + \frac{(\beta_5 + \beta_7)^2}{4\delta_3} \quad (4.25)$$

を満たすすべての K に対して $\dot{V}_a$ は, ある正定数 c_1, c_2, c_3 が存在して

$$\dot{V}_a \leq -c_1 \|z_q\|^2 - c_2 \|x_2\|^2 - c_3 \|y_a\|^2 + y_a^T v \quad (4.26)$$

と評価できる. これより,

$V_a(y_a(t), x_2(t), z_q(t)) - V_a(y_a(0), x_2(0), z_q(0))$
 $\leq \int_0^t y_a^T v d\tau - \int_0^t (c_1 \|z_q\|^2 + c_2 \|x_2\|^2 + c_3 \|y_a\|^2) d\tau$
 が得られる. よって, (3.12), (4.12) および上式より, 定義 2 の条件が満足されることから, 出力フィードバック指数受動であることがわかる.

4.2 PFC の具体的設計法

前節では, PFC の基本的な設計条件を明らかにしたが, 問題はそのような条件を満足するような PFC がいかにして設計できるかである. ここでは, 前節で与えられた設計条件を満足する具体的な PFC の設計法の提案を行う.

いま, 相対次数 $\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m\}$ を持つ仮定 2 を満足するシステムの標準形 (2.8) を考える. (2.8), (2.11) より, このシ

システムの i 番目の出力 $y_i(t)$ は、それぞれ、つぎのサブシステムの出力として表すことができる。

$$\begin{aligned} \dot{z}_{\xi i}(t) &= A_i z_{\xi i}(t) + b_i \tilde{a}_i(z_{\xi}, z_q) + b_i \tilde{b}_i(y)^T u(t) \\ y_i(t) &= c_i^T z_{\xi i}(t), \quad i = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (4.27)$$

ここに、

$$\begin{aligned} [z_{\xi 1}(t)^T, z_{\xi 2}(t)^T, \dots, z_{\xi m}(t)^T]^T &= z_{\xi}(t) \\ [\tilde{a}_1(z_{\xi}, z_q), \tilde{a}_2(z_{\xi}, z_q), \dots, \tilde{a}_m(z_{\xi}, z_q)]^T &= \tilde{a}(z_{\xi}, z_q) \\ [\tilde{b}_1(y), \tilde{b}_2(y), \dots, \tilde{b}_m(y)]^T &= \tilde{B}(y) \end{aligned}$$

である。そこで、各サブシステムに対し、それぞれつぎの n_{fi} 次の PFC を付加する。

$$\begin{aligned} \dot{z}_{fi}(t) &= A_{fi} z_{fi}(t) + b_{fi} \tilde{b}_i(y)^T u(t) \\ y_{fi}(t) &= c_{fi}^T z_{fi}(t) \end{aligned} \quad (4.28)$$

ここに、 (A_{fi}, b_{fi}, c_{fi}) は、伝達関数表現で

$$F_i(s) = c_{fi}^T (sI - A_{fi}) b_{fi} = \frac{\delta_i^{\gamma_i} b_i(\delta_i s)}{\alpha_{fi} a_i(\delta_i s)} \quad (4.29)$$

と表すことができるように与えるものとする。ただし、 δ_i は、任意の正定数であり、 $a_i(s)$ 、 $b_i(s)$ および α_{fi} は、以下の設計条件を満足しているものとする。

$[a_i(s), b_i(s), \alpha_{fi}]$ の設計条件

- (1) $a_i(s)$: $(\gamma_i - 1)$ 次モニック安定多項式
 $b_i(s)$: $(\gamma_i - 2)$ 次モニック多項式
- (2) $n_i(s) = s^{\gamma_i} b_i(s) + \alpha_{fi} a_i(s)$ が安定多項式

(4.29) で与えられる PFC は、具体的には、

$$\begin{aligned} a_i(s) &= s^{\gamma_i-1} + a_{i,\gamma_i-2} s^{\gamma_i-2} + \dots + a_{i,1} s + a_{i,0} \\ b_i(s) &= s^{\gamma_i-2} + b_{i,\gamma_i-3} s^{\gamma_i-3} + \dots + b_{i,1} s + b_{i,0} \end{aligned} \quad (4.30)$$

とおくと

$$\begin{aligned} A_{fi} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\frac{a_{i,0}}{\delta_i^{\gamma_i-1}} - \frac{a_{i,1}}{\delta_i^{\gamma_i-2}} - \frac{a_{i,2}}{\delta_i^{\gamma_i-3}} - \dots - \frac{a_{i,\gamma_i-2}}{\delta_i} \end{bmatrix} \\ b_{fi}^T &= [0 \dots 0 \ 1] \\ c_{fi}^T &= [\frac{\delta_i}{\alpha_{fi}} b_{i,0}, \frac{\delta_i^2}{\alpha_{fi}} b_{i,1}, \dots, \frac{\delta_i^{\gamma_i-2}}{\alpha_{fi}} b_{i,\gamma_i-3}, \frac{\delta_i^{\gamma_i-1}}{\alpha_{fi}}] \end{aligned} \quad (4.31)$$

と与えられる。また、PFC を付加した拡張系は、

$$\begin{aligned} \dot{z}_a(t) &= A_a z_a(t) + B_a \tilde{B}(y) u(t) + B_1 \tilde{a}(z_{\xi}, z_q) \\ \dot{z}_q(t) &= q(z_{\xi}, z_q) \\ y_a(t) &= y(t) + y_f(t) = C_a z_a(t) \end{aligned} \quad (4.32)$$

と表される。ここに、

$$\begin{aligned} z_a(t) &= [z_{a1}(t)^T, \dots, z_{am}(t)^T]^T \\ z_{ai}(t) &= [z_{\xi i}(t)^T, z_{fi}(t)^T]^T \end{aligned} \quad (4.33)$$

であり、

$$\begin{aligned} A_a &= \text{diag}[A_{ai}], \quad A_{ai} = \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ 0 & A_{fi} \end{bmatrix} \\ B_a &= \text{diag}[b_{ai}], \quad b_{ai} = \begin{bmatrix} b_i \\ b_{fi} \end{bmatrix} \\ C_a &= \text{diag}[c_{ai}^T], \quad c_{ai}^T = [c_i^T, c_{fi}^T] \\ B_1 &= \text{diag}[b_{1i}], \quad b_{1i} = \begin{bmatrix} b_i \\ 0 \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (4.34)$$

である。このとき、構成された拡張系および PFC 設計に関して以下の補題が成立する。

[補題 1] 仮定 2 を満足する相対次数 $\{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$ を持つシステム (2.1) に対し、上述の設計条件を満足する PFC (4.28) を付加した拡張系の線形部 (A_a, B_a, C_a) は ASPR であり、かつ、不等式 (4.9) が $\delta \leq \delta_0$ なるすべての δ で必ず成立する δ_0 が存在する。

(証明) 初めに、拡張系の線形部 (A_a, B_a, C_a) が ASPR となることを示す。(2.12), (4.29) および (4.34) より拡張系線形部 (A_a, B_a, C_a) に対する伝達関数は

$$G_a(s) = C_a (sI - A_a) B_a = \text{diag}[G_i(s) + F_i(s)] \quad (4.35)$$

$$G_i(s) = \frac{1}{s^{\gamma_i}}, \quad i = 1, \dots, m \quad (4.36)$$

と表すことができる。よって、 $G_i(s) + F_i(s)$ が ASPR となることを示せば十分である。

(4.29), (4.36) より、

$$G_i(s) + F_i(s) = \frac{\delta_i^{\gamma_i} s^{\gamma_i} b_i(\delta_i s) + \alpha_{fi} a_i(\delta_i s)}{\alpha_{fi} s^{\gamma_i} a_i(\delta_i s)} \quad (4.37)$$

を得る。 $a_i(s), b_i(s), \alpha_{fi}$ の設計条件 (2) より、

$$n_i(\delta_i s) = \delta_i^{\gamma_i} s^{\gamma_i} b_i(\delta_i s) + \alpha_{fi} a_i(\delta_i s) \quad (4.38)$$

は、安定多項式である。よって、 $G_i(s) + F_i(s)$ は、最小位相である。さらに、 $a_i(s), b_i(s), \alpha_{fi}$ の設計条件 (1) より、

$$\begin{aligned} \deg[s^{\gamma_i} a_i(\delta_i s)] &= 2\gamma_i - 1 \\ \deg[\delta_i^{\gamma_i} s^{\gamma_i} b_i(\delta_i s) + \alpha_{fi} a_i(\delta_i s)] &= 2\gamma_i - 2 \end{aligned} \quad (4.39)$$

であることから、 $G_i(s) + F_i(s)$ の相対次数は 1 である。また、明らかに最高位係数は正であるので、 $G_i(s) + F_i(s)$ は ASPR である。よって、拡張系線形部 (A_a, B_a, C_a) は、ASPR といえる。

つぎに不等式 (4.9) が成立することを示す。準備として、拡張系 (4.32) - (4.34) に対し、つぎの正則変換を考える。

$$\bar{z}_a(t) = [\bar{z}_{a1}(t)^T, \dots, \bar{z}_{am}(t)^T]^T = T_a z_a(t) \quad (4.40)$$

$$T_a = \text{diag}[T_{ai}]_{i=1, \dots, m}, \quad T_{ai} = \begin{bmatrix} T_{pi} & 0 \\ 0 & T_{fi} \end{bmatrix}$$

$$T_{pi} = \text{diag}[\frac{1}{\delta_i^{\gamma_i-1}}, \frac{1}{\delta_i^{\gamma_i-2}}, \dots, \frac{1}{\delta_i}, 1]$$

$$T_{fi} = \text{diag}[\frac{1}{\delta_i^{\gamma_i-2}}, \frac{1}{\delta_i^{\gamma_i-3}}, \dots, \frac{1}{\delta_i}, 1]$$

この正則変換により、拡張系 (4.32) は、

$$\dot{\bar{z}}_a(t) = \bar{A}_a \bar{z}_a(t) + \bar{B}_a \tilde{B}(y) u(t) + \bar{B}_1 \tilde{a}(T_p^{-1} \bar{z}_{\xi}, z_q)$$

$$\dot{\bar{z}}_q(t) = q(T_p^{-1} \bar{z}_{\xi}, z_q) \quad (4.41)$$

$$y_a(t) = \bar{C}_a \bar{z}_a(t)$$

と表される。ここに、

$$\begin{aligned}\bar{A}_a &= \text{diag}[\bar{A}_{ai}], \quad \bar{A}_{ai} = \begin{bmatrix} \bar{A}_i & 0 \\ 0 & \bar{A}_{fi} \end{bmatrix} \\ \bar{A}_i &= T_{pi} A_i T_{pi}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\delta_i} I_{\gamma_i-1} \\ \vdots & \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \\ \bar{A}_{fi} &= T_{fi} A_{fi} T_{fi}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\delta_i} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\delta_i} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\delta_i} \\ -\frac{a_{i,0}}{\delta_i} & -\frac{a_{i,1}}{\delta_i} & -\frac{a_{i,2}}{\delta_i} & \cdots & -\frac{a_{i,\gamma_i-2}}{\delta_i} \end{bmatrix} \\ \bar{B}_a &= \text{diag}[\bar{b}_{ai}], \quad \bar{b}_{ai} = T_{ai} \begin{bmatrix} b_i \\ b_{fi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_i \\ b_{fi} \end{bmatrix} \\ \bar{C}_a &= \text{diag}[\bar{c}_{ai}^T], \quad \bar{c}_{ai}^T = [c_i^T, c_{fi}^T] T_{ai}^{-1} = \delta_i^{\gamma_i-1} [c_i^T, \tilde{c}_{fi}^T] \\ \tilde{c}_{fi}^T &= \frac{1}{\alpha_{fi}} [b_{i,0}, b_{i,1}, \dots, b_{i,\gamma_i-3}, 1] \\ \bar{B}_1 &= \text{diag}[\bar{b}_{1i}], \quad \bar{b}_{1i} = T_{ai} b_{1i} = b_{1i}, \quad i = 1, \dots, m\end{aligned}$$

である。

初めに示したように、拡張系の線形部は ASPR であることから、

$$\bar{N}\bar{B}_a = 0, \quad \bar{C}_a\bar{M} = 0, \quad \bar{N}\bar{M} = I_{\gamma-m+n_f} \quad (4.42)$$

を満足する行列 $\bar{N} \in R^{(\gamma-m+n_f) \times (\gamma+n_f)}$, $\bar{M} \in R^{(\gamma+n_f) \times (\gamma-m+n_f)}$ ($n_f = \gamma - m$) が存在し、たとえばつぎのように与えることができる²¹⁾。

$$\bar{N} = \text{diag}[\bar{N}_i] \quad (4.43)$$

$$\bar{N}_i = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ \vdots & I_{\gamma_i-1} & & 0 \\ 0 & & & \\ -1/d_{fi} & & & -\tilde{c}_{fi}^T/d_{fi} \\ -b_{fi}/d_{fi} & 0 & I_{n_{fi}} - b_{fi}\tilde{c}_{fi}^T/d_{fi} \end{bmatrix}$$

$$\bar{M} = \text{diag}[\bar{M}_i] \quad (4.44)$$

$$\bar{M}_i = \begin{bmatrix} 0 \cdots 0 & -\tilde{c}_{fi}^T \\ I_{\gamma_i-1} & 0 \\ 0 & I_{n_{fi}} \end{bmatrix}$$

ここに、 $d_{fi} = \tilde{c}_{fi}^T b_{fi} = 1/\alpha_{fi}$, $n_{fi} = \gamma_i - 1$ である。このとき、この行列 $\bar{N}$, $\bar{M}$ により、拡張系線形部 (A_a, B_a, C_a) の零点に対応する行列 $\bar{A}_2$ は、

$$\bar{A}_2 = \text{diag}[\bar{A}_{2i}] = \text{diag}[\delta_i^{-1} M_{0i}] \quad (4.45)$$

$$\begin{aligned}M_{0i} &= \begin{bmatrix} 0 & & & \\ \vdots & I_{\gamma_i-1} & & 0 \\ 0 & & & \\ -\alpha_{fi} & & & a_{i,0} \quad (a_{i,1} - b_{i,0}) \cdots (a_{i,\gamma_i-2} - b_{i,\gamma_i-3}) \\ 0 & & & 0 \\ \vdots & 0 & & I_{n_{fi}} \\ 0 & & & 0 \\ -\alpha_{fi} & 0 & -b_{i,0} & \cdots & -b_{i,\gamma_i-3} \end{bmatrix} \\ &= \end{aligned}$$

と得られる。 M_{0i} は、 δ_i に無関係な行列となっている。また、安定多項式 $n_i(s) = 0$ の根を $-\lambda_{ij}$, $j = 1, \dots, 2\gamma_i - 2$ とおくと、拡張系線形部の零点多項式が $n_i(\delta_i s)$ で与えられることから、 $\bar{A}_2$ の固有値は、

$$-\bar{\lambda}_{ij} = -\frac{\lambda_{ij}}{\delta_i}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, 2\gamma_i - 2 \quad (4.46)$$

で与えられる。このとき、(4.45), (4.56) より、

$$\|e^{\bar{A}_{2i}t}\| \leq \bar{m}_{0i} e^{-\frac{\lambda_{M_i}}{\delta_i}t} \quad (4.47)$$

と評価できる正定数 $\bar{m}_{0i}$ が存在することが簡単に解る。ここに、 $\lambda_{M_i} = \min_j(\lambda_{ij})$ である。

このとき、この $\bar{A}_2$ およびある正定対称行列 Q_2 に対するリアプノフ方程式 (4.8) を満足する正定対称行列 P_2 は、

$$P_2 = \int_0^\infty e^{\bar{A}_2^T t} Q_2 e^{\bar{A}_2 t} dt \quad (4.48)$$

で与えられ、

$$Q_2 = \text{diag}[\frac{1}{\delta_i} I_{\gamma_i-1+n_{fi}}]_{i=1, \dots, m} \quad (4.49)$$

とおくと

$$P_2 = \text{diag}[\frac{1}{\delta_i} \int_0^\infty e^{\bar{A}_{2i}^T t} e^{\bar{A}_{2i} t} dt]_{i=1, \dots, m} \quad (4.50)$$

と表すことができる。よって、このときの P_2 は、

$$\|P_2\| \leq \max_i \left(\frac{\bar{m}_{0i}^2}{2\lambda_{M_i}} \right) \quad (4.51)$$

と評価できる。さらに、

$$\|\bar{B}_3\| = \|\bar{N}\bar{B}_1\| = 1, \quad \|\bar{M}\| < \infty$$

であり、 $q(T_p^{-1}\bar{z}_\xi, z_q)$, $\tilde{a}(T_p^{-1}\bar{z}_\xi, z_q)$ の Lipschitz 定数 $\bar{L}_1$, $\bar{L}_2$ がそれぞれ

$$\bar{L}_1 = L_1 \|T_p^{-1}\|, \quad \bar{L}_2 = L_2 \|T_p^{-1}\|$$

で与えられることを考慮すると、十分小さな δ_i に対して、不等式 (4.9) が必ず成立することがわかる。すなわち、不等式 (4.9) がある δ_0 以下のすべての δ_i で成立する δ_0 が存在することがわかる。

5. 数値シミュレーション

ここでは、簡単な数値シミュレーションにより提案手法の有効性の検証を行う。

Case-1: 多入出力系の特別な場合として、まず、1 入出力系に関するシミュレーション例を示す。制御対象は、以下のように Output-feedback form で表される 3 次系とする。

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \frac{x_1^3}{1 + a_1 x_1^2} + x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 + \sin(c_1 x_1) x_1 + b_1 (1 + x_1^2) u \\ \dot{x}_3 &= \cos(c_2 x_1) \frac{x_1}{1 + a_2 x_1^2} + b_2 (1 + x_1^2) u \\ y &= x_1\end{aligned} \quad (5.1)$$

ここで、 $a_1 = 3$, $a_2 = 4$, $b_1 = 1$, $b_2 = 2$ および $c_1 = c_2 = 2$ は未知とする。また実際の次数 (3 次) も未知とする。ただし、

Fig. 1 Simulation results (Case-1): plant output

最小位相であり、相対次数が2であることは事前情報としてわかっているものとする。上記システムは、非線形項が未知パラメータに関して線形でないため、従来の適応 Backstepping 法²²⁾は適応できない。

さて、このシステムは既知であれば、 $z_1 = x_1$, $z_2 = \frac{z_3}{1+3z_1^2} + x_2$, $z_3 = x_3 - 2z_2$ なる正則変換により、

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= 2z_2 + z_3 + \frac{3(1+z_1^2)z_1^2}{(1+3z_1^2)^2} z_2 \\ &\quad + \sin(2z_1)z_1 + (1+z_1^2)u \\ \dot{z}_3 &= -2z_3 - 4z_2 + \cos(2z_1) \frac{z_1}{1+4z_1^2} \\ &\quad - 6 \frac{(1+z_1^2)z_1^2}{(1+3z_1^2)^2} z_2 - 2\sin(2z_1)z_1 \end{aligned} \quad (5.2)$$

と変形できる。この変形において、 $\tilde{B}(y) = 1 + y^2$ の情報は、元のシステムが不確かであっても x_2 -システムの入力項の非線形項に関する情報のみで得られることがわかる。また、実際には、最小位相で非線形項が y に関して Lipschitz であることがわかっていれば、 x_3 以下のシステムに関するその他の情報は提案手法の制御系設計には必要がないこともわかる（たとえ次数が4次や5次であっても同様の変形で z_2 -システムには関係なく3次以降のシステム（ゼロダイナミクス）が得られるため）。このシステムは相対次数2を持つことから、つぎの PFC:

$$\dot{z}_f = -\frac{a_{f1}}{\delta_1} z_f + (1+y^2)u, \quad y_f = \frac{\delta_1}{\alpha_{f1}} z_f \quad (5.3)$$

を導入する。ここでは、 $a_{f1} = 1$, $\alpha_{f1} = 10$, $\delta_1 = 0.1$ と与えた。初期値 $x(0) = [1, 0.5, 0.1]^T$ に対し、シミュレーションを行った結果を Fig. 1~Fig. 3 に示す。なお、適応調整則 (3.5) の設計パラメータは、 $\Gamma = 1000$ と与えている。また、Fig. 4 は、PFC を付加しなかった場合の結果である（この場合は、制御系の安定性は保証されていない）。これらの結果より、PFC の導入によって良好な結果が得られていることがわかる。

Case:2 つぎのように与えられる2入出力非線形系を考える。

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -x_1 + 3x_5^6 + 2x_3^2 \\ \sin x_3 \\ x_2 + x_3 \\ \sin x_5 \\ x_4 + x_5 \end{bmatrix}$$

Fig. 2 Simulation results (Case-1): control input

Fig. 3 Simulation results (Case-1): estimated value of $K(t)$

Fig. 4 Simulation results without PFC (Case-1): plant output

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \exp(x_3 + x_5) + 2 & \exp x_3 \\ 0 & 0 \\ \exp x_5 & (\exp x_3 + \exp x_5)^2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = [x_3 \ x_5]^T \quad (5.4)$$

このとき、つぎの正則変換:

$$\begin{aligned} z_1 &= x_3 \\ z_2 &= x_2 + x_3 \\ z_3 &= x_5 \\ z_4 &= x_4 + x_5 \\ z_5 &= x_1 \end{aligned} \quad (5.5)$$

を考えると、(5.4)の標準形は、

$$\begin{aligned} \dot{z}_\xi &= Az_\xi + B\tilde{a}(z_\xi, z_q) + B\tilde{B}(y)u \\ \dot{z}_q &= -z_q + 3z_3^6 + 2z_1^2 \\ y &= c^T z_\xi \end{aligned} \quad (5.6)$$

と表される。ここに、

$$z_\xi = [z_1, z_2, z_3, z_4]^T, z_q = z_5$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, c^T = [1 \ 0 \ 1 \ 0]$$

$$\tilde{a}(z_\xi, z_q) = \begin{bmatrix} \sin z_1 + z_2 \\ \sin z_3 + z_4 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B}(y) = \begin{bmatrix} \exp(z_1 + z_3) + 2 & \exp z_1 \\ \exp z_3 & (\exp z_1 + \exp z_3)^2 \end{bmatrix}$$

である。

Fig. 5 は、初期値を $x(0) = [2.5, 0.5, 2, -2, 1]$ と与えたときの自由応答の結果である。対象システムは不安定系であるので発散していることがわかる。

さて、対象システムは、指数最小位相であるが相対次数 $\{2, 2\}$ を持つことからつぎの PFC を導入しする。

$$\begin{aligned} \dot{z}_f &= \begin{bmatrix} -\frac{\alpha_{f1}}{\delta_1} & 0 \\ 0 & -\frac{\alpha_{f2}}{\delta_2} \end{bmatrix} z_f + \tilde{B}(y)u \\ y_f &= \begin{bmatrix} \frac{\delta_1}{\alpha_{f1}} & 0 \\ 0 & \frac{\delta_2}{\alpha_{f2}} \end{bmatrix} z_f \end{aligned} \quad (5.7)$$

ここでは、

$$\alpha_{f1} = \alpha_{f2} = 3, \alpha_{f1} = \alpha_{f2} = 2/3, \delta_1 = \delta_2 = 0.06$$

と与え拡張系の OFEP 化を図った。

初期値 $x(0) = [2.5, 0.5, 2, -2, 1]$ に対し、適応調整則 (3.5) において、 $\Gamma = \text{diag}[5 \times 10^3, 5 \times 10^4]$ と与えたときの制御結果を Fig. 6~Fig. 8 に示す。PFC 導入によるバイアス効果の影響もなく良好な結果が得られている。

6. 結 言

本報告では、多入出力 affine 非線形システムに対して、出力フィードバック指数受動性 (OFEP) のもと出力フィードバック形式のシステムの次数に依存しない適応制御系が簡単に構成できることを示した。さらに、対象システムが OFEP 条件を満足していない場合に対して、この OFEP 条件を緩和するための非線形系に対する PFC 設計条件および導出された設計条件を満足するための具体的な PFC 設計法法の提案を行った。また、簡単な数値シミュレーションにより提案手法の有効性の検証を行った。

参 考 文 献

- 1) C. I. Byrnes, A. Isidori and J. Willems: Passivity, Feedback Equivalence, and the Global Stabilization of Minimum Phase Nonlinear Systems, *IEEE Trans, Automatic Control*, **36**-11, 1228/1240(1991)
- 2) D. J. Hill and P. J. Moylan: Stability Results for Nonlinear Feedback Systems, *Automatica*, **13**, 377/382(1977)
- 3) M. Krstic, I. Kanellakopoulos and P. V. Kokotovic: Passivity and Parametric Robustness of a New Class of Adaptive Systems, *Automatica*, **30**-11, 1703/1716(1994)
- 4) H. K. Khalil: *Nonlinear Systems*, 2nd ed., Prentice Hall (1996)
- 5) M. M. Seron, D. J. Hill and A. L. Fradkov: Nonlinear

Fig. 5 Free response of the controlled plant

Fig. 6 Simulation results (Case-2): plant outputs

Fig. 7 Simulation results (Case-2): control inputs

Fig. 8 Simulation results (Case-2): estimated values of $K(t)$

- Adaptive Control of Feedback Passive System, *Automatica*, **31**-7, 1053/1060(1995)
- 6) P. V. Kokotovic, M. Krstic and I. Kanellakopoulos: Backstepping to Passivity: Recursive Design of Adaptive Systems, *Proc. of 31st IEEE CDC*, 3276/3280(1992)
- 7) I. Bar-Kana: Positive Realness in Multivariable Stationary Linear Systems, *Journal of the Franklin Institute*, **328**, 403/417(1991)
- 8) H. Kaufman, I. Bar-Kana and K. Sobel: *Direct Adaptive Control Algorithms*, 2nd ed., Springer-Verlag (1998)
- 9) I. Bar-Kana: Parallel Feedforward and Simplified Adaptive Control, *Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, **1**, 95/109(1987)
- 10) Z. Iwai and I. Mizumoto: Realization of Simple Adaptive

Control by Using Parallel Feedforward Compensator, *Int. J. Control*, **59**-6, 1543/1565(1994)

- 11) I. Mizumoto and Z. Iwai: Simplified Adaptive Model Output Following Control for Plants with Unmodelled Dynamics, *Int. J. Control*, **64**-1, 61/80(1996)
- 12) A. L. Fradkov: Adaptive stabilization for minimum-phase multi-input plants without output derivatives measurement, *Physics-Doklady*, **39**-8, 550/552(1994)
- 13) A. L. Fradkov: Shunt Output Feedback Adaptive Controllers for Nonlinear Plants, *13th IFAC World Congress*, San Francisco, **K**, 367/372(1996)
- 14) M.V. Druzhinina, A.L. Fradkov: Reduced order shunt nonlinear adaptive controller, *Proc. 4th European Control Conference* (1997)
- 15) A. L. Fradkov, I. Mizumoto and Z. Iwai: *Shunt Output Feedback Adaptive Tracking for Nonlinear Plants*, Proc. of the 6th St. Petersburg Symp. on Adaptive Systems Theory (SPAS'99), 79/85 (1999)
- 16) A. L. Fradkov and D. J. Hill: Exponential Feedback Passivity and Stabilizability of Nonlinear Systems, *Automatica*, **34**-6, 697/703(1998)
- 17) C. I. Byrnes and A. Isidori: Asymptotic Stabilization on Minimum Phase Nonlinear Systems, *IEEE Trans. Automatic Control*, **36**-10, 1122/1137(1991)
- 18) A. Isidori: *Nonlinear Control Systems*, 3rd ed., Springer-Verlag (1998)
- 19) N. N. Krasovskii: *Stability of Motion*, Stanford (1963)
- 20) S. Sastry and M. Bodson: *Adaptive Control*, Prentice Hall (1989)
- 21) B. Kouvaritakis and MacFarlane: Geometric Approach to Analysis and Synthesis of System Zeros; Part 1. Square Systems, *Int. J. Control*, **23**-2, 146/166 (1976)
- 22) M. Krstic, I. Kanellakopoulos and P.V. Kokotovic, *Nonlinear and Adaptive Control Design*, New York: Wiley (1995)

【付 録】

A. 出力フィードバック指数受動性の証明

OFEP 条件を満足する標準形に対し, 入力 (3.3) を用い構成された閉ループ系は

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{y}}(t) &= \tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{y}, z_q) - \tilde{\mathbf{B}}_0 K \mathbf{y}(t) + \tilde{\mathbf{B}}_0 \mathbf{v}(t) \\ z_q(t) &= \mathbf{q}(\mathbf{y}, z_q)\end{aligned}\quad (\text{A.1})$$

となる。OFEP 条件 (2), (3) より, (3.12) を満足する正定値関数 $W(z_q)$ が存在する。そこで, つぎの正定値関数を考える。

$$V_1(\mathbf{y}, z_q) = W(z_q) + \frac{1}{2} \mathbf{y}(t)^T \tilde{\mathbf{B}}_0^{-1} \mathbf{y}(t) \quad (\text{A.2})$$

$V_1(\mathbf{y}, z_q)$ の時間微分は,

$$\begin{aligned}\dot{V}_1 &= \frac{\partial W(z_q)}{\partial z_q} \mathbf{q}(\mathbf{y}, z_q) + \mathbf{y}^T \tilde{\mathbf{B}}_0^{-1} \tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{y}, z_q) \\ &\quad - \frac{1}{2} \mathbf{y}^T (K^T + K) \mathbf{y} + \mathbf{y}^T \mathbf{v}\end{aligned}\quad (\text{A.3})$$

となる。ここで, OFEP 条件 (3) および (3.12) より, $\mathbf{q}(\mathbf{y}, z_q)$ および $\tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{y}, z_q)$ に対する Lipschitz 定数をそれぞれ L_1, L_2 とおくと

$$\frac{\partial W(z_q)}{\partial z_q} \mathbf{q}(\mathbf{y}, z_q) \leq -\alpha_1 \|\mathbf{z}_q\|^2 + \alpha_2 L_1 \|\mathbf{z}_q\| \|\mathbf{y}\| \quad (\text{A.4})$$

$$\mathbf{y}^T \tilde{\mathbf{B}}_0^{-1} \tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{y}, z_q) \leq \|\tilde{\mathbf{B}}_0^{-1}\| L_2 (\|\mathbf{y}\| \|\mathbf{z}_q\| + \|\mathbf{y}\|^2) \quad (\text{A.5})$$

と評価できることから, $\dot{V}_1$ は,

$$\begin{aligned}\dot{V}_1 &\leq -\alpha_1 \|\mathbf{z}_q\|^2 + (\alpha_2 L_1 + \|\tilde{\mathbf{B}}_0^{-1}\| L_2) \|\mathbf{z}_q\| \|\mathbf{y}\| \\ &\quad - \frac{1}{2} \lambda_{\min}(K^T + K) \|\mathbf{y}\|^2 + \|\tilde{\mathbf{B}}_0^{-1}\| L_2 \|\mathbf{y}\|^2 + \mathbf{y}^T \mathbf{v} \\ &\leq -(\alpha_1 - \rho_0) \|\mathbf{z}_q\| - \left(\frac{1}{2} \lambda_{\min}(K^T + K) - \beta_0\right) \|\mathbf{y}\|^2 \\ &\quad + \mathbf{y}^T \mathbf{v}\end{aligned}\quad (\text{A.6})$$

と評価できる。ここに, ρ_0 は, 任意の正定数であり, β_0 は,

$$\beta_0 = \|\tilde{\mathbf{B}}_0^{-1}\| L_2 + \frac{(\alpha_2 L_1 + \|\tilde{\mathbf{B}}_0^{-1}\| L_2)^2}{4\rho_0} \quad (\text{A.7})$$

である。このとき, $0 < \rho_0 < \alpha_1$ とすると

$$\lambda_{\min}(K^T + K) > \beta_0 \quad (\text{A.8})$$

なるすべての K に対し, $\dot{V}_1$ は,

$$\dot{V}_1 \leq -c_1 \|\mathbf{z}_q\|^2 - c_2 \|\mathbf{y}\|^2 + \mathbf{y}^T \mathbf{v}, \quad c_1, c_2 > 0 \quad (\text{A.9})$$

と評価できる。結局, $\lambda_{\min}(K_0) = \beta_0$ なる $K_0 = K_0^T > 0$ に対し, $K^T + K > K_0$ なるすべての K で構成された閉ループ系は $\mathbf{v}$ から $\mathbf{y}$ に関して指数受動となることがわかる。

【著 者 紹 介】

水 本 郁 朗 (正会員)

1991 年熊本大学大学院工学研究科修士課程 (機械工学専攻) 修了。同年同大学工学部機械工学科助手, 97 年同大学工学部知能生産システム工学科助教授, 現在, 同大学大学院自然科学研究科助教授。適応制御などの制御理論に関する研究に従事。日本機械学会, システム制御情報学会などの会員 (博士 (工学))。

岩 井 善 太 (正会員)

1964 年京都大学工学部数理工学科卒業, 66 年京都大学大学院工学研究科修士課程 (数理工学専攻) 修了。現在, 熊本大学工学部知能生産システム工学科教授。適応制御などの制御理論およびその応用に関する研究に従事。日本機械学会, システム制御情報学会などの会員 (工学博士)。

小 原 浩 司 朗

1999 年熊本大学工学部機械工学科卒業。同年同大学大学院自然科学研究科博士前期課程 (機械システム専攻) 入学, 現在に至る。非線形適応制御の研究に従事。