将来の入出力の不確かさを考慮した二元予測制御の評価関数とその計算法[†]

芳 谷 直 治*

A New Algorithm for Dual Predictive Control Considering Future Uncertainties in Input and Output[†]

Naoharu YOSHITANI*

In this paper, we propose a new algorithm of dual predictive control for a system expressed by a linear autoregressive and exogenous (ARX) model with uncertain model parameters. The cost function, represented by the Bellman's equations, is based on the cost for the generalized predictive control (GPC). To avoid impractical computational burden, a new sub-optimal cost function which approximates the Bellman's equations is derived. The sub-optimal cost contains the variances of various future uncertainties, whose exact values are difficult to obtain. To cope with this, an algorithm to calculate the cost is devised with some appropriate approximations. The main difference from the preceding works on dual predictive control is the consideration of future uncertainties in control input and in the output values in the AR part of the model. Hence, the proposed control algorithm including the cost function is the closest to the optimal among all the dual predictive control algorithms. The control input to minimize the cost is obtained through nonlinear optimization. A numerical example illustrates the effectiveness of the algorithm.

Key Words: dual control, generalized predictive control, adaptive control, parameter estimation

1. はじめに

制御対象が値の不確かなパラメータや状態変数を含む場合、制御入力信号（操作量）は制御量を駆動するとともに、これら不確かな値の推定を進める役割を持つ。この二つの役割を制御入力信号の二元性と呼び、二元性を考慮した制御を二元制御と呼ぶ。二元制御においては、推定値の不確かさを制御則で考慮して、不確かさに応じて制御を cautious に（用心深く）するとともに、推定を促進するための探索信号 (Probing signal) を含むように、制御入力を生成する。このような二元制御の考え方は 1960 年代に Feldbaum¹⁾により提案されており、石原の解説²⁾に 90 年代初めまでの種々の手法が紹介されている。

二元制御は確率的に最適な適応制御を構成するための基礎となる制御であり、最適適応制御の解は確率的 Bellman 方程式の最適化により求められる。厳密な最適化のためには、確率的ダイナミックプログラミングの手法を用いる必要があるが、計算は「次元の呪い」に遭遇し、一般に膨大な時間を要する。そこで Bellman 方程式を近似的に最適化する方式（準最適適応制御）など、いくつかの二元制御手法が従来から提

案されている。これらの手法を含めて、これまでに提案されている適応制御手法を二元制御の観点から分類するとつぎのようになる²⁾。

受動的適応制御：将来の推定値やその不確かさが、今後の制御入力信号により変化することを考慮しない制御。つぎの二つに分かれる。

Heuristic Certainty Equivalence (HCE) 制御

パラメータや状態変数の推定値を真値と見なして制御則の計算を行なう方式。推定値の不確かさは制御則では考慮しない。既存の適応制御の多くがこれに含まれる。

Open Loop Feedback Optimal (OLFO) 制御

推定値の現時点における不確かさだけを考慮する開ループ最適制御。現時点より先は観測が行なわれず不確かさは変化しないと見なす。HCE 制御よりも cautious になり、探索信号は生成しない。

二元制御（能動的適応制御） 探索信号を生成する。代表的手法を以下に挙げる。

Explicit One-step Dual Control^{3)~5)} 時間的に 1 ステップの評価関数の最適化を行なう制御であり、評価関数は制御誤差と推定値の不確かさを陽に含む。不確かさに対する重みは設計者が定める。計算量の少ない簡易方式。

二元予測制御^{6)~8)} 時間的に多ステップの評価関数を用いる。HCE 型や OLFO 型の予測制御の評価関数に探索信号生成のための項を陽に付加した方法や、あるいはパラメータ推定値の将来の事後確率分布 (posterior densi-

[†] 第 20 回適応制御シンポジウムで発表 (2000・1)

* 帝京大学理工学部材料科学工学科 宇都宮市豊郷台 1-1

* Department of Materials Science and Engineerig, School of Science and Engineering, Teikyo University, 1-1 Toyosato-dai, Utsunomiya

(Received April 18, 2000)

(Revised October 10, 2000)

ties) ——— 将来の観測値が得られた後の確率分布 ——— の予測値を用いる方法^{6), 7)}などがある。

その他 m-Measurement Feedback Optimal (m-MFO) control, Wide-Sense Actively Adaptive Dual Control, Iteration in Policy Space など²⁾。

上記の二元予測制御の中で、事後確率分布予測値を用いる方法は、Pronzato ら⁶⁾や Kulcsár ら⁷⁾により提案された。この方法（以後、Pronzato らの方法と呼ぶ）は準最適適応制御を構成していて、原理的に最も優れており、数値例のシミュレーション結果も他の手法より良好と報告されている⁸⁾。しかしながら Pronzato らの方法は、下記の不確かさ UC1, UC2 を考慮していない。

UC1 : 将来の入力不確かさとそれに伴う出力不確かさ。

UC2 : モデルの AR 部分の将来出力値の不確かさ。

本論文では、同じく事後確率分布予測値を用いた二元予測制御において、上記の UC1, UC2 を考慮した新しい準最適制御の評価関数とその計算アルゴリズムを提案する。提案する手法では、線形 ARX(Auto-Regressive and eXogenous) モデルで記述される 1 入力 1 出力プラントを対象として、一般化予測制御 (GPC) の評価関数を Bellman 方程式の形で表わし、この近似である準最適評価関数を最適化する。本論文の特徴は、まず上記の UC1 を考慮することにより、従来の Pronzato らの方法よりも原理的に優れた準最適評価関数を導出していることである。ただしこの評価関数は種々の統計的分散の予測値を含み、そのままでは計算困難である。そこで本論文のつぎの特徴は、種々の近似を工夫して導入することにより、評価関数の計算アルゴリズムを考案していることである。この中で上記の UC2 を考慮している。

2. 制御対象のモデルとパラメータ逐次推定

制御対象プラントは 1 入力 1 出力であり、つぎの ARX モデルで表わされるものとする。

$$y(t) = \theta(t)^T \phi(t) + \xi(t) \quad (1)$$

ここで

$$\theta(t) = [a_1, a_2, \dots, a_{n_a}, b_0, b_1, \dots, b_{n_b}]^T \quad (2)$$

$$\phi(t) = [y(t-1), y(t-2), \dots, y(t-n_a), u(t-k), u(t-k-1), \dots, u(t-k-n_b)]^T \quad (3)$$

上式で、 t は時刻（サンプリング周期単位）、 u, y はプラント入出力で直接観測可能、 k はむだ時間、 θ は時変未知パラメータで変化量の予測は不可能とする。 $\{\xi(t)\}$ はガウス性白色雑音時系列、“ T ” は転置を表わす。 k, n_a, n_b は既知の整数であり、 $k \geq 1, n_a \geq 0, n_b \geq 0$ を満たす。 $n_a = 0$ のとき $\theta(t)$ 、 $\phi(t)$ はそれぞれ、 $b_i, u(t-k-i)$ ($i = 0, \dots, n_b$) のみを含み、プラントモデルは有限インパルス応答 [Finite Impulse Response (FIR)] 形式となる。FIR 形式の場合は、AR 部分がないために UC2 の考慮が不要であり、Bellman 方程式の

準最適解の評価関数計算式はその分簡単になるが^{7), 8)}、未知パラメータ個数は ARX 形式に比べて多くなり、推定値の収束に時間を要する。また不安定な制御対象には適用できない。そこで本論文ではプラントモデルを ARX 形式で表わし、これは特別な場合として FIR 形式を含むものとする。

以下、 $E_\tau\{x\}$ は任意の時刻 τ において推定された任意の変数 x の期待値を表わすものとし、 $\hat{x}(\tau_1|\tau) = E_\tau\{x(\tau_1)\}$ と定義する。 x が u, y のように直接観測可能で $\tau_1 \leq \tau$ のときは、 $\hat{x}(\tau_1|\tau) = x(\tau_1)$ である。一方 $V_\tau\{x\}$ は、任意の確率変数 x の時刻 τ における不確かさの分散 $E_\tau\{[x - E_\tau\{x\}]^2\}$ を表わすものとする。

さて推定値 $\hat{\theta}(t|t)$ の逐次更新の式を、つぎの Kalman filter の式で表わす。

$$\begin{aligned} \hat{\theta}(t|t) &= \hat{\theta}(t-1|t-1) + P(t)\phi(t) \\ &\quad \cdot [y(t) - \hat{\theta}(t-1|t-1)^T \phi(t)] \end{aligned} \quad (4)$$

ここで

$$\begin{aligned} P(t) &= \frac{1}{\lambda_f(t)} \{P(t-1) \\ &\quad - \frac{P(t-1)\phi(t)\phi(t)^T P(t-1)}{\lambda_f(t)V_t\{\xi(t)\} + \phi(t)^T P(t-1)\phi(t)}\} + Q(t) \end{aligned} \quad (5)$$

$P(t)$ は $\hat{\theta}(t|t)$ の推定誤差共分散行列であり、パラメータ真値 $\theta(t)$ の確率分布は正規分布 $N(\hat{\theta}(t|t), P(t))$ にしたがうものとする。 $\lambda_f(t)$ ($0 < \lambda_f(t) \leq 1$) は忘却係数であり、通常 1 に近い値とする。また $Q(t)$ はパラメータ値変動 $[\theta(t) - \theta(t-1)]$ の推定共分散行列である。パラメータ $\theta(t)$ の値の変動特性に応じて、通常、 $\lambda_f(t)$ と $Q(t)$ のいずれか一方を用いるものとする。

3. 評価関数の設定と簡略化

t は現在時刻を表わし、 $t_i, t_j, t_k, t_m, t_{ik}, t_{jk}$ はそれぞれ、 $(t+i), (t+j), (t+k), (t+m), (t+i+k), (t+j+k)$ を表わすものとする。また $N2, NU$ をそれぞれ、予測制御における“output horizon”と“control horizon”とし、 $N_{2k} = N2 - k, t_{N2k} = t + N2 - k$ とする。これらの記号を用いて、制御の最適評価値として、一般化予測制御 (GPC) の評価関数を Bellman 方程式の形でつぎのように表わす。

$$J^*(t : t_{N2k}) = \min_{u(t)} E_t\{J_0 + J^*(t+1 : t_{N2k})\} \quad (6)$$

ここで

$$J^*(t_i : t_{N2k}) = \min_{u(t_i)} E_{t_i}\{J_i + J^*(t_i+1 : t_{N2k})\} \quad (7)$$

$$(i = 1, 2, \dots, N_{2k})$$

$$J^*(t_{N2k} + 1 : t_{N2k}) = 0 \quad (8)$$

$$J_i = [r(t_{ik}) - y(t_{ik})]^2 + \lambda_u \Delta u(t_i)^2, \quad (i \geq 0) \quad (9)$$

$$\Delta u(t_i) = u(t_i) - u(t_i - 1) \quad (10)$$

$$(\Delta u(t_i) = 0, \text{ for } i > NU - 1)$$

上式で $J^*(t_i : t_{N2k})$ は時刻 t_i 以後の制御に対する最適評

価値を, $r(\cdot)$ は出力目標値を表わす. 一方 $N2$, NU , λ_u は GPC で用いられる設計パラメータであり, $k \leq N2$, $1 \leq NU \leq (N2 - k + 1)$, $\lambda_u \geq 0$ を満たす.

上式の計算の準備として, y と ϕ の予測値 (期待値) をつぎのように定義する.

$$\hat{y}(\tau_1|\tau_2) = E_{\tau_2}\{y(\tau_1)\} = \hat{\theta}(\tau_1|\tau_2)^T \hat{\phi}(\tau_1|\tau_2) \quad (11)$$

$$\hat{\phi}(\tau_1|\tau_2) = [\hat{y}(\tau_1 - 1|\tau_2), \dots, \hat{y}(\tau_1 - n_a|\tau_2), \\ u(\tau_1 - k), \dots, u(\tau_1 - k - n_b)]^T \quad (12)$$

つぎに変数 $x(\tau_1)$ の予測誤差を次式で定義する.

$$\tilde{x}(\tau_1|\tau_2) = x(\tau_1) - \hat{x}(\tau_1|\tau_2) \quad (13)$$

x は y , ϕ , u または θ を意味する.

さて制御問題は, (6) 式を満たす最適入力時系列 $\{E_t\{u(t+i)\}\} = \{\hat{u}(t+i|t)\}$ ($i = 0, 1, \dots, (NU - 1)$) を求めることである. この中で $\hat{u}(t|t)$ は実際の制御入力 $u(t)$ となり, 他の $\{\hat{u}(t+i|t)\}$ ($i \geq 1$) は将来の入力予測値となる. 正確な最適解はダイナミックプログラミングによって求められるが, 計算量は膨大となる. そこで評価関数 (6) 式をつぎのように簡略化する.

まず将来の入力 $u(\tau)$ ($\tau > t$) は, 時刻 t における予測値 (期待値) $\hat{u}(\tau|t)$ と, 予測誤差 $\tilde{u}(\tau|t)$ とに分けることができる. 後者の $\tilde{u}(\tau|t)$ は, 時刻 $(t+1)$ 以降の操作量の $\hat{u}(\tau|t)$ からの修正量であり, 観測によって出力予測値が変化することにも起因して生成される. $\tilde{u}(\tau|t)$ は UC1 中の入力不確かさを表わす確率変数であり, 時刻 t におけるその期待値 $E_t\{\tilde{u}(\tau|t)\}$ は 0 である. 評価関数 (6) 式の $E_t\{\cdot\}$ はすべての確率変数に関する期待値を意味し, $\tilde{u}(\tau|t)$ の考慮も必要である. 一方 $\tau \leq t$ のときは

$$\hat{u}(\tau|t) = u(\tau), \quad \tilde{u}(\tau|t) = 0 \quad (14)$$

となる. これら 2 つの入力時系列 $\{\hat{u}(\tau|t)\}$ と $\{\tilde{u}(\tau|t)\}$ による出力の値を区別するために, 変数 $x(\tau_1)$ において, $\{\hat{u}(\tau|t)\}$ による値を $x(\tau_1|\hat{u}(\cdot|t))$, $\{\tilde{u}(\tau|t)\}$ による値を $x(\tau_1|\tilde{u}(\cdot|t))$ と表わす. ここで x は y , ϕ などを意味する. x が $\hat{y}$, $\hat{\phi}$ などの場合の $x(\tau_1|\tau_2)$ についても, $x(\tau_1|\tau_2, \hat{u}(\cdot|t))$, $x(\tau_1|\tau_2, \tilde{u}(\cdot|t))$ を同様に定義する. プラントが線形であるため,

$$x(\tau_1) = x(\tau_1|\hat{u}(\cdot|t)) + x(\tau_1|\tilde{u}(\cdot|t)) \quad (15)$$

$$x(\tau_1|\tau_2) = x(\tau_1|\tau_2, \hat{u}(\cdot|t)) + x(\tau_1|\tau_2, \tilde{u}(\cdot|t)) \quad (16)$$

が成立する. また $E_t\{\tilde{u}(\tau|t)\} = 0$ より,

$$\hat{y}(t_{ik}|t, \tilde{u}(\cdot|t)) = 0, \quad \hat{y}(t_{ik}|t) = \hat{y}(t_{ik}|t, \hat{u}(\cdot|t)) \quad (17)$$

が成立する.

これらの関係を用いて, (9) 式右辺の制御誤差をつぎのように分解する.

$$r(t_{ik}) - y(t_{ik}) \\ = [r(t_{ik}) - \hat{y}(t_{ik}|t)] - [y(t_{ik}) - \hat{y}(t_{ik}|t)] \quad (18)$$

$$= \hat{e}_c(t_{ik}|t, \hat{u}(\cdot|t)) - [y(t_{ik}) - \hat{y}(t_{ik}|t_i)] \\ - [\hat{y}(t_{ik}|t_i) - \hat{y}(t_{ik}|t)] \quad (19)$$

$$= \hat{e}_c(t_{ik}|t, \hat{u}(\cdot|t)) \\ - [y(t_{ik}|\hat{u}(\cdot|t)) - \hat{y}(t_{ik}|t_i, \hat{u}(\cdot|t))] \\ - [y(t_{ik}|\tilde{u}(\cdot|t)) - \hat{y}(t_{ik}|t_i, \tilde{u}(\cdot|t))] \\ - [\hat{y}(t_{ik}|t_i) - \hat{y}(t_{ik}|t)] \quad (20)$$

$$= \hat{e}_c(t_{ik}|t, \hat{u}(\cdot|t)) - \tilde{y}(t_{ik}|t_i, \hat{u}(\cdot|t)) \\ - \tilde{y}(t_{ik}|t_i, \tilde{u}(\cdot|t)) - \tilde{y}^p(t_{ik}|t_i, t) \quad (21)$$

ここで

$$\hat{e}_c(t_{ik}|t, \hat{u}(\cdot|t)) = r(t_{ik}) - \hat{y}(t_{ik}|t, \hat{u}(\cdot|t)) \quad (22)$$

$$\tilde{y}^p(t_{ik}|t_i, t) = \hat{y}(t_{ik}|t_i) - \hat{y}(t_{ik}|t) \\ = \tilde{y}(t_{ik}|t_i, t, \hat{u}(\cdot|t)) + \hat{y}(t_{ik}|t_i, \tilde{u}(\cdot|t)) \quad (23)$$

$$\tilde{y}(t_{ik}|t_i, t, \hat{u}(\cdot|t)) \\ = \hat{y}(t_{ik}|t_i, \hat{u}(\cdot|t)) - \hat{y}(t_{ik}|t, \hat{u}(\cdot|t)) \quad (24)$$

$$= \tilde{y}(t_{ik}|t, \hat{u}(\cdot|t)) - \tilde{y}(t_{ik}|t_i, \hat{u}(\cdot|t)) \quad (25)$$

(21) 式右辺の各項の意味について説明する. まず第 1 項の $\hat{e}_c(t_{ik}|t, \hat{u}(\cdot|t))$ は, 時刻 t において予測した $y(t_{ik})$ の制御誤差を表わす. 予測では, 将来の入力時系列が $\{\hat{u}(\tau|t)\}$ ($\tau > t$) であり, パラメータの値は推定値 $\hat{\theta}(t|t)$ に等しいと仮定している. 第 1 項は通常の GPC(HCE-GPC) の評価関数に含まれる.

他の 3 項の和は, (18) 式右辺第 2 項からわかるように, 時刻 t における $y(t_{ik})$ の予測誤差を表わす. その中で第 2 項, 第 3 項の和は, (19) 式右辺第 2 項であり, むだ時間 k だけ前の時刻 t_i における $y(t_{ik})$ の予測誤差である. これらの項は, t 以降の入力時系列がそれぞれ $\{\hat{u}(\tau|t)\}$, $\{\tilde{u}(\tau|t)\} (= \{0, \tilde{u}(t+1|t), \dots, \tilde{u}(t_i|t)\})$ ($\tau \geq t$) であると仮定したときの, パラメータ推定値 $\hat{\theta}(t_i|t_i)$ の誤差による $y(t_{ik})$ の予測誤差を表わす.

最後の第 4 項は, $y(t_{ik})$ の時刻 t_i における予測値と時刻 t における予測値との差であり, (23) 式のように分解される. (23) 式右辺第 1 項は (25) 式に示すように, 将来の入力時系列が $\{\hat{u}(\tau|t)\}$ であると仮定したとき, パラメータ推定値として $\hat{\theta}(t_i|t_i)$ を用いた場合と $\hat{\theta}(t|t)$ を用いた場合の, $y(t_{ik})$ の予測誤差の差を表わす. この差は, 時刻 $(t+1)$ から t_i までの間の出力観測値と, 観測による $\hat{\theta}$ の値の変化とに起因する. 一方 (23) 式右辺第 2 項は, 入力時系列が $\{\tilde{u}(\tau|t)\}$ の場合の, $\hat{\theta}(t_i|t_i)$ を用いて求めた $y(t_{ik})$ の予測値を表わす. すなわち (21) 式右辺第 4 項は, 時刻 $(t+1)$ から t_i までの間の $y(t_{ik})$ の予測値変化 $\tilde{y}(t_{ik}|t_i, t, \hat{u}(\cdot|t))$ と, この変化に起因する制御入力 $\{\tilde{u}(\cdot|t)\}$ による予測値変化 $\hat{y}(t_{ik}|t_i, \tilde{u}(\cdot|t))$ との和を表わす.

以上の項の中で, 第 3 項と第 4 項は 1 の UC1 を表わし, 従来の二元予測制御で無視された部分である. また時刻 t において, 第 2~4 項, および入力時系列 $\{\tilde{u}(\tau|t)\}$ は, 期待値 0 の確率変数である.

時刻 t において $[\hat{\theta}(t_i|t_i) - \hat{\theta}(t|t)]$ と $[\theta(t_i) - \hat{\theta}(t_i|t_i)]$ 間の相関, および $\hat{u}(\tau|t)$ と $\tilde{u}(\tau|t)$ 間の相関はいずれもほぼ 0 と見

なすことができるため、(21) 式右辺の各項間の相関もほぼ無視することができる。すなわち (21) 式は、後述の評価関数簡略化に都合が良いように、制御誤差を互いにほぼ独立な項に分解した結果である。一方、

$$\Delta u(t_i) = \Delta \hat{u}(t_i|t) + \Delta \tilde{u}(t_i|t) \quad (26)$$

と表わされ、上式右辺の項間の相関もほぼ 0 である。したがって (9) 式の J_i の期待値は、(21) 式右辺の各項、および $\Delta \hat{u}(t_i|t)$ 、 $\Delta \tilde{u}(t_i|t)$ の各項ごとの 2 乗の期待値の和で近似することができる。ここで確率変数の確率分布は正規分布であると仮定する。

その結果、(6) 式はつぎのように簡略形で近似される。

$$\begin{aligned} \hat{J}^*(t; t_{N2k}|t) &= \min_{\hat{u}(t+i|t)} \hat{J}(t; t_{N2k}|t), \\ (i &= 0, 1, \dots, NU-1) \end{aligned} \quad (27)$$

ここで

$$\begin{aligned} \hat{J}(t; t_{N2k}|t) &= \sum_{i=0}^{N2-k} [\hat{e}_c(t_{ik}|t, \hat{u})^2 + V_t \{\hat{y}(t_{ik}|t_i, \hat{u}(\cdot|t))\} \\ &\quad + V_t \{\hat{y}(t_{ik}|t_i, \hat{u}(\cdot|t))\} + V_t \{\hat{y}^p(t_{ik}|t_i, t)\}] \\ &\quad + \sum_{i=0}^{NU-1} \lambda_u [\Delta \hat{u}(t_i|t)^2 + V_t \{\Delta \tilde{u}(t_i|t)\}] \end{aligned} \quad (28)$$

$i \leq 0$ のとき、 $V_t \{\hat{y}^p(t_{ik}|t_i, t)\}$ と $V_t \{\Delta \tilde{u}(t_i|t)\}$ は 0 とする。

(28) 式右辺において、 $\hat{e}_c(t_{ik}|t, \hat{u}(\cdot|t))^2$ と $\Delta \hat{u}(t_i|t)^2$ の 2 項が、HCE-GPC の評価関数を構成する。またこの 2 項に $V_t \{\hat{y}(t_{ik}|t_i, \hat{u}(\cdot|t))\}$ を加えた項が、Pronzato ら⁶⁾ の二元予測制御の評価関数を構成する。 $V_t \{\hat{y}(t_{ik}|t_i, \hat{u}(\cdot|t))\}$ の計算式は後述の (36) 式で与えられる。ただし Pronzato らの方法では 1 の UC2 を考慮していないため、プラントモデルが AR 部分を含むときに、(36) 式右辺の必要な項の中で計算されないものがあり、 $V_t \{\hat{y}(t_{ik}|t_i, \hat{u}(\cdot|t))\}$ の値は実際より小さく見積られる（詳しくは 4.1 末尾の記述参照）。それ以外の $V_t \{\hat{y}(t_{ik}|t_i, \hat{u}(\cdot|t))\}$ 、 $V_t \{\hat{y}^p(t_{ik}|t_i, t)\}$ および $V_t \{\Delta \tilde{u}(t_i|t)\}$ は、本アルゴリズムで新しく考慮する項である。なお GPC に OLFO 制御を適用した場合は、HCE-GPC の評価関数に $V_t \{\hat{y}(t_{ik}|t_i, \hat{u}(\cdot|t))\}$ を加えたものが評価関数となる。このため時刻 t より先のパラメータ推定値やその不確かさの変化は考慮されない。一方、雑音 $\xi(t)$ の制御への影響は、その分散 $V_t \{\xi(t)\}$ を通して考慮される。すなわち $V_t \{\xi(t)\}$ は (5) 式や後述の (36) 式で用いられているので、評価関数 (28) 式の $V_t \{\hat{y}(t_{ik}|t_i, \hat{u}(\cdot|t))\}$ や $V_t \{\hat{y}(t_{ik}|t_i, \hat{u}(\cdot|t))\}$ に影響する。

Fig. 1 に、現時刻 t 以降の入力 u および出力 y に関する、予測値と不確かさの推移の概念図を示す。図では、確率変数 $x(\tau)$ の時刻 t における不確かさの標準偏差を $\sigma\{x(\tau)\}$ で表わし、不確かさの範囲を $\pm\sigma\{x(\tau)\}$ で表わしている。図において、出力目標値 $r(\tau)$ は時刻 t 以降、一定割合で増加後再び一定値としている。また u と y の予測値 $\hat{u}(\tau|t)$ 、 $\hat{y}(\tau|t, \hat{u}(\cdot|t))$ は、所定の制御則と推定値 $\hat{\theta}(t)$ を用いて求める。一方、将来入力が

$\hat{u}(\tau|t)$ の場合の将来出力の不確かさ範囲は $\pm\sigma\{\hat{y}(\tau|t, \hat{u}(\cdot|t))\}$ で表わされる。将来入力は実際には $\hat{u}(\tau|t)$ に固定されるわけではなく、将来の観測値に基づいて、制御誤差を減らすような修正量 $\tilde{u}(\tau|t)$ がそれに加わり、この不確かさの範囲は $\pm\sigma\{\tilde{u}(\tau|t)\}$ で表わされる。 $\tilde{u}(\tau|t)$ を含めたときの出力の不確かさ範囲は $\pm\sigma\{\hat{y}(\tau|t)\}$ で表わされ、これは τ の増加とともに $\pm\sigma\{\hat{y}(\tau|t, \hat{u}(\cdot|t))\}$ よりもしだいに小さくなる。ただし $\pm\sigma\{\hat{y}(\tau|t)\}$ は、予測時刻がむだ時間 k だけ前の場合の予測値の不確かさ範囲 $\pm\sigma\{\hat{y}(\tau|t-k)\}$ ($\tau-k > t$) より小さくはならない。 $\pm\sigma\{\hat{y}(\tau|t-k)\}$ は、制御によりこれ以上減らすことができず、不確かさ範囲の下限値である。

注) $\pm\sigma\{\hat{y}(\tau|t)\}$ が $\pm\sigma\{\hat{y}(\tau|t-k)\}$ に一致するのは、最小位相プラントに対して、むだ時間だけ先の制御誤差予測値を 0 にするような制御を適用した場合のみである。

Fig. 1 Predictions and uncertainties of input and output

4. 評価関数の計算

この節では、ある入力時系列 $\{\hat{u}(t+i|t)\}$, $i = 0, 1, \dots, (NU-1)$ が与えられたとき、(28) 式を計算するアルゴリズムを求める。(27) 式を満たす入力時系列は、種々の入力時系列に対する (28) 式の計算結果から、非線形最適化により求めることができる。アルゴリズムを導くために、6)、7) と同じくつぎの仮定 **A1** を用いる。

A1 t が現在時刻で $\tau \geq t$ のとき、パラメータ真値 $\theta(\tau)$ の時刻 τ での事後確率分布の時刻 t における予測は、 $N(\hat{\theta}(t|t), \hat{P}(\tau|t))$ で表わされるものとする。ここで $\hat{P}(\tau|t)$ は t における $P(\tau)$ の予測値であり、(5) 式において $\phi(t)$ の代わりに $\hat{\phi}(\tau_1|t, \hat{u}(\cdot|t))$, $\tau_1 = t+1, t+2, \dots, \tau$, を用いて順次求める。

以下簡単のため、 $\hat{\theta}(\tau|\tau)$ を $\hat{\theta}(\tau)$, $\hat{\theta}(\tau|\tau)$ を $\hat{\theta}(\tau)$ と記述する。

4.1 $V_t \{\hat{y}(t_{ik}|t_i, \hat{u}(\cdot|t))\}$ の計算式

A1 および $\theta(t_{ik}) = \theta(t_i)$ の仮定のもとで、 $\hat{y}(t_{ik}|t_i, \hat{u}(\cdot|t))$

$[i = 0, 1, \dots, (N2 - k)]$ はつぎのように表わされる.

$$\begin{aligned} \tilde{y}(t_{ik}|t_i, \hat{u}(\cdot|t)) &= y(t_{ik}|\hat{u}(\cdot|t)) - \hat{y}(t_{ik}|t_i, \hat{u}(\cdot|t)) \\ &= \theta(t_i)^T \phi(t_{ik}|\hat{u}(\cdot|t)) + \xi(t_{ik}) \\ &\quad - \hat{\theta}(t_i)^T \hat{\phi}(t_{ik}|t_i, \hat{u}(\cdot|t)) \\ &= [\hat{\theta}(t_i) + \tilde{\theta}(t_i)]^T \\ &\quad \cdot [\hat{\phi}(t_{ik}|t_i, \hat{u}(\cdot|t)) + \tilde{\phi}(t_{ik}|t_i, \hat{u}(\cdot|t))] \\ &\quad - \hat{\theta}(t_i)^T \hat{\phi}(t_{ik}|t_i, \hat{u}(\cdot|t)) + \xi(t_{ik}) \\ &= \hat{\phi}(t_{ik}|t_i, \hat{u}(\cdot|t))^T \tilde{\theta}(t_i) + \hat{\theta}(t_i)^T \tilde{\phi}(t_{ik}|t_i, \hat{u}(\cdot|t)) \\ &\quad + \tilde{\theta}(t_i)^T \tilde{\phi}(t_{ik}|t_i, \hat{u}(\cdot|t)) + \xi(t_{ik}) \end{aligned} \quad (29)$$

ここで

$$\tilde{\phi}(t_{ik}|t_i, \hat{u}(\cdot|t)) = [\tilde{y}(t_{ik} - 1|t_i, \hat{u}(\cdot|t)), \dots, \tilde{y}(t_{ik} - m_a|t_i, \hat{u}(\cdot|t)), 0, \dots, 0]^T \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \hat{\theta}(t_i)^T \tilde{\phi}(t_{ik}|t_i, \hat{u}(\cdot|t)) &= [\hat{a}_1(t_i), \dots, \hat{a}_{m_a}(t_i)]^T \\ &\quad \cdot [\tilde{y}(t_{ik} - 1|t_i, \hat{u}(\cdot|t)), \dots, \tilde{y}(t_{ik} - m_a|t_i, \hat{u}(\cdot|t))] \\ &\simeq \sum_{m=1}^{m_a} \hat{a}_m(t_i) \hat{\phi}(t_{ik} - m|t_i, \hat{u}(\cdot|t))^T \tilde{\theta}(t_i) \end{aligned} \quad (31)$$

$$m_a = \min\{n_a, t_{ik} - t - 1\} \quad (32)$$

(29) 式の $\tilde{\phi}$ は **UC2** を表わし、本アルゴリズムで初めて考慮する項である。(31) 式の導出に際して、 $\tilde{y}(t_{ik} - m|t_i, \hat{u}(\cdot|t))$ ($m = 1, 2, \dots, m_a$) は $\tilde{\theta}(t_i)^T \hat{\phi}(t_{ik} - m|t_i, \hat{u}(\cdot|t))$ で近似され、 $m_a \leq 0$ のときは、この値と “ $\sum_{m=1}^{m_a}$ ” の値は 0 とする。つぎに $\hat{a}_0(t_i) = 1$ として、ベクトル $\hat{\psi}$ を次式で定義する。

$$\hat{\psi}(t_{ik}|t_i, \hat{u}(\cdot|t)) = \sum_{m=0}^{m_a} \hat{a}_m(t_i) \hat{\phi}(t_{ik} - m|t_i, \hat{u}(\cdot|t)) \quad (33)$$

(31) 式を (29) 式に代入して両辺の分散をとり、簡単のため $E_t\{(\hat{\psi}^T \tilde{\theta})(\tilde{\theta}^T \tilde{\phi})\}$ を無視すると

$$\begin{aligned} E_t\{\tilde{y}(t_{ik}|t_i, \hat{u}(\cdot|t))\} &= E_t\{\tilde{y}(t_{ik}|t_i, \hat{u}(\cdot|t))^2\} \\ &\simeq E_t\{[\hat{\psi}(t_{ik}|t_i, \hat{u}(\cdot|t))^T \tilde{\theta}(t_i) \\ &\quad + \tilde{\theta}(t_i)^T \tilde{\phi}(t_{ik}|t_i, \hat{u}(\cdot|t))]^2\} + V_t\{\xi(t_{ik})\} \\ &\simeq E_t\{\hat{\psi}(t_{ik}|t_i, \hat{u}(\cdot|t))^T [\tilde{\theta}(t_i) \tilde{\theta}(t_i)^T] \hat{\psi}(t_{ik}|t_i, \hat{u}(\cdot|t)) \\ &\quad + [\tilde{\theta}(t_i)^T \tilde{\phi}(t_{ik}|t_i, \hat{u}(\cdot|t))]^2\} + V_t\{\xi(t_{ik})\} \end{aligned} \quad (34)$$

(34) 式の $E_t\{(\tilde{\theta}^T \tilde{\phi})^2\}$ に関しては、正確な値は計算困難であるため、各項の中で二乗項以外は無視して次式で近似する。

$$\begin{aligned} E_t\{[\tilde{\theta}(t_i)^T \tilde{\phi}(t_{ik}|t_i, \hat{u}(\cdot|t))]^2\} \\ &\simeq \lambda_{d1} \sum_{m=1}^{m_a} E_t\{\hat{a}_m(t_i)^2\} \\ &\quad \cdot E_t\{\tilde{y}(t_{ik} - m|t_i, \hat{u}(\cdot|t))^2\} \end{aligned} \quad (35)$$

ここで λ_{d1} は設計パラメータであり、 $0 \leq \lambda_{d1} \leq 2$ とする。

上の近似式を用いて、

$$\begin{aligned} V_t\{\tilde{y}(t_{ik}|t_i, \hat{u}(\cdot|t))\} \\ &\simeq \hat{\psi}_D(t_{ik}|t, \hat{u}(\cdot|t))^T \hat{P}(t_i|t) \hat{\psi}_D(t_{ik}|t, \hat{u}(\cdot|t)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \lambda_{d1} \sum_{m=1}^{m_a} \hat{P}_{[m,m]}(t_i|t) V_t\{\tilde{y}(t_{ik} - m|t_i, \hat{u}(\cdot|t))\} \\ &+ V_t\{\xi(t_{ik})\} \end{aligned} \quad (36)$$

と表わす。ここで $\hat{P}_{[m,m]}$ は $\hat{P}$ の (m, m) 要素を表わす。また $\hat{\psi}_D$ は $\hat{\psi}$ からバイアス分を除いたものである。すなわち (33) 式右辺において、各変数をつぎのように置き換えた式を $\hat{\psi}_D$ の定義式とする。

$$\hat{u}(\cdot|t) \rightarrow \hat{u}(\cdot|t) - \bar{u}(t - k) \quad (37)$$

$$\hat{y}(\cdot|t_i, \hat{u}(\cdot|t)) \rightarrow \hat{y}(\cdot|t_i, \hat{u}(\cdot|t)) - \bar{y}(t) \quad (38)$$

ここで

$$\begin{aligned} \bar{x}(\tau) &= (1 - g_{ave})\bar{x}(\tau - 1) + g_{ave}x(\tau) \\ (x &= u \text{ or } y) \end{aligned} \quad (39)$$

g_{ave} は平均化のためのゲインであり、 $0.05 \leq g_{ave} \leq 0.3$ の範囲で適当に定める。(36) 式からわかるように $V_t\{\tilde{y}(t_{ik}|t_i, \hat{u}(\cdot|t))\}$ の値は、将来時刻 t_i における共分散行列の予測値 $\hat{P}(t_i|t)$ に大きく依存し、 $\hat{P}(t_i|t)$ が大きいほど、すなわち時刻 t_i におけるパラメータ不確かさが大きいほど大きくなる。 $V_t\{\tilde{y}(t_{ik}|t_i, \hat{u}(\cdot|t))\}$ の値を求めるには、 $\{V_t\{\tilde{y}(\tau|t_i, \hat{u}(\cdot|t))\}\}$ ($\tau = t_i + 1, \dots, t_{ik} - 1$) の値が必要であり、これらは (36) 式において t_{ik} の代わりに τ を用いて逐次求められる。

(36) 式右辺第 2 項と、第 1 項の中で (33) 式の $\hat{a}_m(t)$ ($m \geq 1$) に対応する部分とが **UC2** の考慮を表わす。プラントモデルが FIR 形式のときはこれらは現れず、(36) 式は近似なしで導かれる。

4.2 $V_t\{\tilde{y}(t_{ik}|t_i, \hat{u}(\cdot|t))\}$ の計算式

プラントの、むだ時間を含む単位ステップ応答時系列を $\{g_s(j)\}$ ($j = 0, 1, \dots$) で表わす。 $j < k$ のとき $g_s(j) = 0$ である。またパラメータ推定値 $\hat{\theta}(t_x)$ を用いて求めた $g_s(j)$ の推定値 (予測値) を $\hat{g}_s(j|t_x)$ と表わし、その予測誤差を

$$\tilde{g}_s(j|t_x) = g_s(j) - \hat{g}_s(j|t_x) \quad (40)$$

とする。

以下、 $1 \leq j \leq i \leq (N2 - k)$ の場合を考え、つぎのように各変数を定義する。

$$i_k = i + k, \quad j_k = j + k, \quad m_k = m + k \quad (41)$$

$\tilde{y}(t_{ik}|t_i, \hat{u}(\cdot|t))$ は次式で表わされる。

$$\begin{aligned} \tilde{y}(t_{ik}|t_i, \hat{u}(\cdot|t)) \\ &= y(t_{ik}|\hat{u}(\cdot|t)) - \hat{y}(t_{ik}|t_i, \hat{u}(\cdot|t)) \\ &= \sum_{j=1}^i [g_s(i_k - j) - \hat{g}_s(i_k - j|t_i)] \Delta \tilde{u}(t_j|t) \\ &= \sum_{j=1}^i \tilde{g}_s(i_k - j|t_i) \Delta \tilde{u}(t_j|t) \end{aligned} \quad (42)$$

時刻 t における上式両辺の分散値をとり、 $E_t\{\Delta \tilde{u}(\tau_1|t) \cdot \Delta \tilde{u}(\tau_2|t)\}$ ($\tau_1 \neq \tau_2$) を無視すると、

$E_t\{\tilde{g}_s(\cdot|t_i)\Delta\tilde{u}(t_j|t)\} \simeq 0$ ($i \geq j$) が成り立つので、

$$\begin{aligned} & V_t\{\tilde{y}(t_{ik}|t_i, \hat{u}(\cdot|t))\} \\ & \simeq \sum_{j=1}^i V_t\{\tilde{g}_s(i_k - j|t_i)\} V_t\{\Delta\tilde{u}(t_j|t)\} \end{aligned} \quad (43)$$

が成立する。

つぎに (43) 式において i と j を交換することにより、

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N_{2k}} V_t\{\tilde{y}(t_{ik}|t_i, \hat{u}(\cdot|t))\} &= \sum_{j=1}^{N_{2k}} V_t\{\tilde{y}(t_{jk}|t_j, \hat{u}(\cdot|t))\} \\ &\simeq \sum_{j=1}^{N_{2k}} \sum_{i=1}^j V_t\{\tilde{g}_s(j_k - i|t_j)\} V_t\{\Delta\tilde{u}(t_i|t)\} \\ &= \sum_{i=1}^{N_{2k}} \sum_{m=0}^{N_{2k}-i} V_t\{\tilde{g}_s(m_k|t_i + m)\} V_t\{\Delta\tilde{u}(t_i|t)\} \\ &\quad (m = j - i) \\ &= \sum_{i=1}^{N_{2k}} V_t^{gs}(t_i) V_t\{\Delta\tilde{u}(t_i|t)\} \end{aligned} \quad (44)$$

ここで

$$V_t^{gs}(t_i) = \sum_{m=0}^{N_{2k}-i} V_t\{\tilde{g}_s(m_k|t_i + m)\} \quad (45)$$

となる。したがって (28) 式の中の $V_t\{\tilde{y}(t_{ik}|t_i, \hat{u}(\cdot|t))\}$ は $V_t^{gs}(t_i) V_t\{\Delta\tilde{u}(t_i|t)\}$ で近似的に置換できる。上式で $V_t\{\tilde{g}_s(m_k|t_i + m)\}$ の値は、(36) 式で $V_t\{\xi\} = 0$ として $m = 0, 1, \dots$ に対して逐次求めることができ、一方 $V_t\{\Delta\tilde{u}(t_i|t)\}$ の値は後出の (57) 式で与えられる。

4.3 $V_t\{\Delta\tilde{u}(t_i|t)\}$ と $V_t\{\tilde{y}^p(t_{ik}|t_i, t)\}$ の計算式

以下、 $1 \leq i \leq N_{2k}$ の場合を考える。(25) 式より、次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} & \tilde{y}(t_{ik}|t, \hat{u}(\cdot|t)) \\ &= \tilde{y}(t_{ik}|t_i, t, \hat{u}(\cdot|t)) + \tilde{y}(t_{ik}|t_i, \hat{u}(\cdot|t)) \end{aligned} \quad (46)$$

時刻 t のとき、上式右辺の項間の相関はほぼ 0 とみなすことができるから、上式各項の値の確率分布を正規分布と仮定すると、近似的に次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} & V_t\{\tilde{y}(t_{ik}|t, \hat{u}(\cdot|t))\} \simeq V_t\{\tilde{y}(t_{ik}|t_i, t, \hat{u}(\cdot|t))\} \\ & \quad + V_t\{\tilde{y}(t_{ik}|t_i, \hat{u}(\cdot|t))\} \end{aligned} \quad (47)$$

つぎに 4 個の N_{2k} 次元ベクトルをつぎのように定義する。

$$\begin{aligned} \underline{\tilde{y}}_{(N_{2k})}(t_{1k}|t_1, t, \hat{u}(\cdot|t)) &= [\tilde{y}(t_{1k}|t_1, t, \hat{u}(\cdot|t)), \dots, \\ & \quad \tilde{y}(t_{N_{2k}}|t_{N_{2k}}, t, \hat{u}(\cdot|t))]^T \end{aligned} \quad (48)$$

$$\begin{aligned} \underline{\Delta\tilde{u}}_{(N_{2k})}(t_1|t) &= [\Delta\tilde{u}(t_1|t), \dots, \Delta\tilde{u}(t_{N_{2k}}|t)]^T \end{aligned} \quad (49)$$

$$\begin{aligned} \underline{\tilde{y}}_{(N_{2k})}(t_{1k}|t_1, \hat{u}(\cdot|t)) &= [\tilde{y}(t_{1k}|t_1, \hat{u}(\cdot|t)), \dots, \\ & \quad \tilde{y}(t_{N_{2k}}|t_{N_{2k}}, \hat{u}(\cdot|t))]^T \end{aligned} \quad (50)$$

$$\begin{aligned} \underline{\tilde{y}}_{(N_{2k})}^p(t_{1k}|t_1, t) &= [\tilde{y}^p(t_{1k}|t_1, t), \dots, \\ & \quad \tilde{y}^p(t_{N_{2k}}|t_{N_{2k}}, t)]^T \end{aligned} \quad (51)$$

$$(t_1 = t + 1, t_{1k} = t_k + 1, t_{N_2} = t + N_2)$$

ここで $\underline{\tilde{y}}_{(N_{2k})}(t_{1k}|t_1, t, \hat{u}(\cdot|t))$ は、操作量が $\hat{u}(\cdot|t)$ から変化しないときの出力予測値の変動ベクトル、 $\underline{\Delta\tilde{u}}_{(N_{2k})}(t_1|t)$ は、その変動を低減するための操作量修正ベクトル、 $\underline{\tilde{y}}_{(N_{2k})}(t_{1k}|t_1, \hat{u}(\cdot|t))$ は、その操作量修正による出力予測値の変動ベクトル、 $\underline{\tilde{y}}_{(N_{2k})}^p(t_{1k}|t_1, t)$ は、 $\hat{u}$ と $\tilde{u}$ の両方を考慮したときの出力予測値変動ベクトルである。

そこで $-\underline{\tilde{y}}_{(N_{2k})}(t_{1k}|t_1, t, \hat{u}(\cdot|t))$ を操作量が変化しないときの出力偏差と見なし、GPC のアルゴリズム⁹⁾を用いて $\underline{\Delta\tilde{u}}_{(N_{2k})}(t_1|t)$ を次式で与える。

$$\underline{\Delta\tilde{u}}_{(N_{2k})}(t_1|t) = -\hat{K}\hat{G}^T \underline{\tilde{y}}_{(N_{2k})}(t_{1k}|t_1, t, \hat{u}(\cdot|t)) \quad (52)$$

$$\text{ここで } \hat{K} = [\hat{G}^T \hat{G} + \hat{H} + \lambda_u I_{N_{2k}}]^{-1} \quad (53)$$

$$\hat{H} = \text{diag}\{V_t^{gs}(t_j + 1)\}, \quad (54)$$

$$(j = 0, 1, \dots, N_{2k} - 1)$$

$$\hat{G} = \begin{bmatrix} \hat{g}_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hat{g}_1 & \hat{g}_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{g}_{N_{2k}-1} & \hat{g}_{N_{2k}-2} & \cdots & \hat{g}_0 \end{bmatrix}, \quad (55)$$

$$\hat{g}_j = \hat{g}_s(j + k|t) \quad (56)$$

上式で $I_{N_{2k}}$ は $(N_{2k} \times N_{2k})$ 単位行列、 $\hat{G}$ は $(N_{2k} \times N_{2k})$ 下三角行列である。GPC との違いは、 $\hat{K}$ が $\hat{H}$ を含むことであり、これは (45) 式の説明に記したように、 $V_t^{gs}(t_j + 1)$ が $\Delta\tilde{u}(t_j + 1|t)$ に対する評価値の係数となるためである。

注 (52) 式は、 $\underline{\tilde{y}}_{(N_{2k})}(t_{1k}|t_1, t, \hat{u}(\cdot|t))$ の各要素 $\tilde{y}(t_{jk}|t_j, t, \hat{u}(\cdot|t))$ ($j = 1, 2, \dots, N_{2k}$) の値がすべて同時に明らかになると仮定した場合の操作量計算式であるが、実際は第 j 要素の値は、時刻 t_j までに徐々に明らかになる。したがって厳密には、(52) 式左辺の各要素 $\Delta\tilde{u}(t_i|t)$ ($i = 1, 2, \dots, N_{2k}$) の値は (52) 式で一括して求めずに、 i の各ステップごとに求めるべきである。しかしこの厳密方式は、(52) 式のような計算を $i = 1, 2, \dots, N_{2k}$ に対して繰り返し行なうことを意味し、アルゴリズムが複雑になり計算時間が増す。そこでこのような近似方式で行なうことにした。後述の数値例を用いたシミュレーションでは、近似方式と厳密方式とで結果に差はほとんどなかった。

つぎに $\text{Cov}_t\{x\}$ を、任意の確率変数ベクトル x の時刻 t における共分散行列を表わすとすると、次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} & V_t\{\Delta\tilde{u}(t_i|t)\} \\ &= [\hat{K}\hat{G}^T \text{Cov}_t\{\underline{\tilde{y}}_{(N_{2k})}(t_{1k}|t_1, t, \hat{u}(\cdot|t))\} \hat{G}\hat{K}^T]_{[i,i]} \\ & \quad (i = 1, 2, \dots, N_{2k}) \end{aligned} \quad (57)$$

ただし $[\cdot]_{[i,i]}$ は行列の (i, i) 要素を表わす。行列 $\text{Cov}_t\{\underline{\tilde{y}}_{(N_{2k})}(t_{1k}|t_1, t, \hat{u}(\cdot|t))\}$ は、 $\underline{\tilde{y}}_{(N_{2k})}(t_{1k}|t_1, t, \hat{u}(\cdot|t))$ の各要素の分散 $V_t\{\tilde{y}(t_{ik}|t_i, t, \hat{u}(\cdot|t))\}$ と、要素間の相互相関から構成される。分散値は、(47) 式に基づいて次式で近似的

に表わす.

$$\begin{aligned} & V_t\{\tilde{y}(t_{ik}|t_i, t, \hat{u}(\cdot|t))\} \\ & \simeq \max\{[V_t\{\tilde{y}(t_{ik}|t, \hat{u}(\cdot|t))\} \\ & \quad - V_t\{\tilde{y}(t_{ik}|t_i, \hat{u}(\cdot|t))\}], 0\} \end{aligned} \quad (58)$$

上式右辺の値は (36) 式を用いて求めることができる. また相互相関値は, プラントモデルやあるいは出力観測時系列から推定して求める.

一方 (23) 式と GPC アルゴリズムより

$$\begin{aligned} & \tilde{y}_{(N2k)}^p(t_{1k}|t_1, t) \\ & = \tilde{y}_{(N2k)}(t_{1k}|t_1, t, \hat{u}(\cdot|t)) + \hat{y}_{(N2k)}(t_{1k}|t_1, \hat{u}(\cdot|t)) \\ & = \tilde{y}_{(N2k)}(t_{1k}|t_1, t, \hat{u}(\cdot|t)) + \hat{G}\Delta\hat{u}_{(N2k)}(t_1|t) \\ & = \hat{L}\tilde{y}_{(N2k)}(t_{1k}|t_1, t, \hat{u}(\cdot|t)) \end{aligned} \quad (59)$$

ここで

$$\hat{L} = I_{N2k} - \hat{G}\hat{K}\hat{G}^T \quad (60)$$

となる. したがって

$$\begin{aligned} & \text{Cov}_t\{\tilde{y}_{(N2k)}^p(t_{1k}|t_1, t)\} \\ & = \hat{L} \cdot \text{Cov}_t\{\tilde{y}_{(N2k)}(t_{1k}|t_1, t, \hat{u}(\cdot|t))\} \cdot \hat{L}^T \end{aligned} \quad (61)$$

となり, 上式左辺の (i, i) 要素が $V_t\{\tilde{y}^p(t_{ik}|t_i, t)\}$ を表わす.

4.4 評価関数値算出アルゴリズム

入力時系列 $\{\hat{u}(t_i|t)\}$ ($i = 0, 1, \dots, N_{2k}$) が与えられたとき, (28) 式で表わされる評価値 $\hat{J}(t : t_{N2k}|t)$ は, つぎの手順で求められる.

Step 1 $\hat{y}(t_j|t, \hat{u}(\cdot|t))$ ($j = 1, 2, \dots, N_2$) を, (1) 式で $\theta(\cdot) \rightarrow \hat{\theta}(t)$, $\phi(\cdot) \rightarrow \hat{\phi}(\cdot|t, \hat{u}(\cdot|t))$ と置き換えて求める. またステップ応答時系列 $\{\hat{g}_s(j|t)\}$ ($j = k, k+1, \dots, N_2-1$) を求める.

Step 2 : $i = 0, 1, \dots, (N_2-k)$ に対して, $\hat{P}(t_i|t)$ を (5) 式から求める. また $V_t\{\hat{g}_s(i_k - j|t_i)\}$ ($0 \leq j \leq i \leq N_{2k}$) を, すべての i, j の値に関して求める. つぎに $V_t^{gs}(t_i)$ ($i = 1, 2, \dots, N_{2k}$) を (45) 式から求める.

Step 3 $i = 0, 1, \dots, N_{2k}$ に対して, $\hat{e}_c(t_{ik}|t, \hat{u}(\cdot|t))^2$ を (22) 式から, $V_t\{\tilde{y}(t_{ik}|t_i, \hat{u}(\cdot|t))\}$ を (36) 式から求め, $\lambda_u \Delta \hat{u}(t_j|t)^2$ ($j = 0, 1, \dots, NU-1$) を含めたこれらの和を $\hat{J}(t : t_{N2k}|t)$ の値に設定する.

Step 4 $N_{2k} \geq 1$ ならば, $i = 1, 2, \dots, N_{2k}$ に対して, $V_t\{\tilde{y}(t_{ik}|t, \hat{u}(\cdot|t))\}$ を (36) 式から求める. つぎに $\text{Cov}_t\{\tilde{y}_{(N2k)}(t_{1k}|t_1, t, \hat{u}(\cdot|t))\}$ を, (58) 式と適当に定めた $\tilde{y}_{(N2k)}(t_{1k}|t_1, t, \hat{u}(\cdot|t))$ の各要素間の相関係数とから求め, $V_t\{\Delta \hat{u}(t_i|t)\}$ を (57) 式から, $V_t\{\tilde{y}^p(t_{ik}|t_i, t)\}$ を (61) 式から, また $V_t\{\tilde{y}(t_{ik}|t_i, \hat{u}(\cdot|t))\}$ を (44) 式から求める. これらの値を用いて, $\hat{J}(t : t_{N2k}|t)$ に必要な値を算出して加える.

5. 数 値 例

提案した手法による制御のシミュレーションを, 数値例を用いて行なった. ここでプラントモデルと設計パラメータは,

つぎのように定めた.

$$n_a = 2, n_b = 3, k = 2, V_t\{\xi\} = 0.001, \quad (62)$$

$$\theta = [1.6, -0.8, 0.1, 0.3, 0.2]^T, N_2 = 11, \quad (63)$$

$$NU = 10, \lambda_u = 0.1, g_{ave} = 0.2, \quad (64)$$

$$\lambda_{d1} = \min\{1, [0.9/(P_{[1,1]}(t) + P_{[2,2]}(t))]\} \quad (65)$$

λ_{d1} の値は, $V_t\{\tilde{y}(t_{ik} + m|t_i, \hat{u}(\cdot|t))\}$ ($m > 0$) の値が m とともに指数的に増大するのを防ぐために, 上のように与えた.

一方 $\tilde{y}_{(N2k)}(t_{1k}|t, \hat{u}(\cdot|t))$ の各要素間の相関係数は, プラントへの低周波入力に対する出力応答時系列の自己相関係数を, サンプル周期ごとにパラメータ推定値から計算することにより求めた. 低周波入力は, 伝達関数が $[1/(4s+1)]$ (s はラプラス演算子) で表わされる低域フィルタに白色雑音を通した信号とした. この相関係数の求め方に厳密さは要求されず, 別の方法で求めてもよい.

つぎにパラメータ逐次推定関連の値は

$$\hat{\theta}(0) = [0.6, -0.4, 0.05, 0.05, 0.05]^T, \quad (66)$$

$$P(0) = \text{diag}\{1, 1, 0.1, 0.1, 0.1\}, \lambda_f = 1 \quad (67)$$

とし, $r(\tau)$, $u(\tau)$, $y(\tau)$ の初期値はすべて 0, θ は時不変とした. 評価関数を最小とする制御入力を求めるための非線形最適化には, 共役勾配法を用いた.

提案した方法 (方法 1) と, 第 1 節の UC1, UC2 を考慮しない場合の方法 (方法 2) との比較のためのシミュレーション結果を Fig. 2 に示す. ここで $r(t)$ は $t=4$ で $0 \rightarrow 1$, $t=21$ で $1 \rightarrow 0$ とステップ上に変化している. 図より, パラメータ値が不確かな初期において, 提案した手法が制御性能とロバスト性の両面で優れていることがわかる. $t=15$ 以降の入出力は, 両手法とも HCE-GPC と等しい挙動を示した. つぎに Fig. 3 に方法 1 と方法 2 におけるパラメータ推定値の挙動を示す. パラメータ真値は横軸に平行な点線で示している. 推定値は両手法とも $t=10$ までに真値近傍に収束し, 一方推定値の最終値は, 初期の入出力変動が大きい方法 2 が, 方法 1 よりも真値に近くなっている.

シミュレーションプログラムを MATLAB 言語でコーディングし, CPU に AMD-K6-2 400 MHz を用いて動かした場合, 評価値 $\hat{J}(t : t_{N2k}|t)$ の 1 回の計算に約 0.34 秒を要し, 提案法の $t=1$ から $t=30$ までのシミュレーションには 733 秒を要した.

6. お わ り に

本論文では, 従来考慮されなかった UC1, UC2 を含めた種々の不確かさについて, 綿密な考察と式の展開を行ない, Bellman 方程式に含まれるいろいろな不確かな量を, 統計的にはほぼ独立な成分に分けることができた. これにより, 不確かさの大きさを統計的分散の予測値の和で表わすことが可能になり, 新しい準最適評価関数が導出された. さらに種々の近似の導入により, 評価関数の計算アルゴリズムを導出した. 従来法と比べたときの, 提案した制御手法の特徴をつぎに示す.

Fig. 2 Dual predictive control with the proposed algorithm (solid line) and with the algorithm not taking UC1 and UC2 into account (dashed line)

Fig. 3 Parameter estimation with the proposed algorithm (solid line) and with the algorithm not taking UC1 and UC2 into account (dashed line)

(1) UC1, UC2を考慮することにより、既存の二元予測制御の中で Bellman 方程式の最適解に最も近く、制御性能とロバスト性に優れた制御が実現できる。

(2) オンライン計算時間は、非線形最適化のためにかなり増えるが、実用に全く不適なほど長くはない。

ところで GPC を含むモデル予測制御の安定化と予測区間短縮のために、終端条件（予測区間終端における、出力や状態変数に関する条件）を評価規範に加える方式が Kwok ら¹⁰⁾により提案されている。この方式も制御性能向上やロバスト性向上などにある程度効果があるが、パラメータや入出力の不確かさを考慮していないため、不確かさが大きいときは、終端条件をどのように設定しても制御性能悪化やロバスト性不足が生じうる。

現在のところ本手法は、制御周期が分単位以上のオーダー

の制御系に適用可能であり、応答が遅いプラントに最も有効と思われる。ただしコンピュータの計算能力の進歩の速さを考えると、オンライン計算時間は将来大幅に減少し、より短い制御周期でも適用可能になると思われる。その一方、アルゴリズム改良による計算時間短縮も、本手法の適用が可能な制御対象を拡大するために重要であり、非線形最適化を含めた高効率アルゴリズムの開発は今後の課題である。

本論文では、将来の出力目標値 $r(\tau)$ ($\tau > t$) の不確かさや、将来のバイアス性外乱入力の可能性については考慮しなかったが、本手法の改良によりこれらを考慮することは可能と思われる、現在検討中である。

参考文献

- 1) A. A. Feldbaum: Optimal control systems, Academic, New York (1965)
- 2) 石原 正: 二元制御とその周辺, 計測自動制御学会論文集, **33**-5, 382/389 (1994)
- 3) R. Miloto, C. S. Padilla R. A Padilla and D. Cadrin: An innovations approach to dual control, *IEEE Trans. on Automatic Control*, **27**-1, 132/137 (1982)
- 4) T. Ishihara, K. Abe and H. Takeda: Extensions of innovations dual control, *Int. J. of Systems Science*, **19**-4, 653/667 (1988)
- 5) N. M. Filatov, U. Keuchel and H. Unbehauen: Dual control for an unstable mechanical plant, *IEEE Control Systems Mag.*, **16**-4, 31/37 August (1996)
- 6) L. Pronzato, C. Kulcsár and E. Walter: An actively adaptive control policy for linear systems, *IEEE Trans. on Automatic Control*, **41**-6, 855/858 (1996)
- 7) C. Kulcsár, L. Pronzato and E. Walter: Dual control of linearly parameterized models via prediction of posterior densities, *European J. of Control*, **2**-2, 135/143 (1996)
- 8) D. Sbarbaro, N. M. Filatov, and H. Unbehauen: Adaptive predictive controllers based on orthonormal series representation, *Proc. of ECC'99*, Karlsruhe, Germany, Sept. (1999)
- 9) D. W. Clarke, C. Mohtadi and P. S. Tuffs: Generalized predictive control - Part I, the basic algorithm, *Automatica*, **23**-2, 137/148 (1987)
- 10) K. Y. Kwok and S. L. Shah: Long-range predictive control with a terminal matching condition, *Chem. Eng. Sci.*, **42**, 1287/1300 (1994)

[著者紹介]

芳谷直治 (正会員)

1973年京都大学工学部電子工学科卒業。75年京都大学大学院工学研究科修士課程修了（電気工学第二専攻）。同年新日本製鐵（株）入社。96年3月まで名古屋製鐵所と技術開発本部に勤務。80～82年英国ロンドン大学インペリアルカレッジ大学院に留学し、81年修士課程修了（制御システム専攻）。96年より帝京大学理工学部材料科学工学科助教授、現在に至る。同定、適応制御などの研究に従事（京都大学工学博士）。1988年本会技術賞、2000年日本鉄鋼協会計測・制御・システム技術賞。電気学会、鉄鋼協会、システム制御情報学会、IEEEの会員。