引き込みを利用した回転型2重倒立振子の振り上げ制御†

梶原 秀一*・橋本 幸男**・土谷 武士***

Swing-Up Control of a Rotational Double Inverted Pendulum Using Entrainment†

Hidekazu KAJIWARA*, Yukio HASHIMOTO** and Takeshi TSUCHIYA***

Periodic stimulation sometimes stabilizes mechanical systems dynamically. we have investigated a swing-up control of an inverted pendulum from a view point of such a dynamic stabilization. First, we analyze the timing of the periodic input in which the pendulum is excited. Next, we propose the control method using a entrainment so that the periodic input is synchronized with the swing of the pendulum. The control input is consisted of a periodic solution of van der Pol's equation which is inputted the angular verocity of the pendulum. Finally we present experimental results that our controller can realize the selective swing-up control for a rotational double pendulum.

Key Words: inverted pendulum, periodic input, swing-up control, entrainment, van der Pol's equation

1. はじめに

メカニカルシステムに周期的な入力をタイミングよく加えたとき、制御目的を達成できる場合がある。著者らはこれまでに、このようなシステムとして、皿まわしの制御¹⁾、ブランコの振れ制御²⁾、鉄棒ロボットの運動制御³⁾、並列型倒立振子の振り上げ制御⁴⁾などを取り上げてきた。文献1)では竿のたわみも考慮した数値モデルを解析することにより、皿を安定に回すことができるタイミングが存在することを示し、竿を振る周期に皿の回転周期が同期する周波数引き込み現象を利用すると、オープンループの制御でも簡単に皿まわしが実現できることを示した。文献2), 3)では、周期入力によりシステムを大域的に制御できるタイミングを解析し、非線形振動子の引き込み現象を利用して周期入力と制御対象を一定の位相関係で同期させて制御する方法について提案した。文献4)では文献2), 3)で提案した制御手法を並列型振子の振り上げ制御に適用し、ロバストな振り上げ制御が実現できることをシミュレーションにより示した。本論文では回転型2

重倒立振子を製作し、文献4)の手法を実際に実機に適用して、その有効性を確認した結果について報告する。

これまで、安定な平衡点まわりにある振子を不安定平衡点近傍まで振り上げる方法として、全体の運動をシミュレーションで確認しながら試行錯誤的に制御入力を求める方法^{5), 6)}、システムの力学的エネルギーに基づくリアプノフ関数を用いて制御則を導出する方法⁷⁾、振子に周期的な入力を加えたときに生じるカオスの挙動を利用する方法⁸⁾などが提案されてきた。本論文の手法は、力学的エネルギーが増加するように周期入力を加えるため、制御アプローチ的には文献7) 8)の方法を組み合わせた方法である。

本論文ではまず、回転型2重倒立振子のダイナミクスを導出し、振子が1つの場合について、アームを周期的に動かしたときのエネルギー変化率を調べ、効率よく振子を励起できるタイミングを明らかにする。次に、振子が2つの場合についても解析し、2つの振子と一定の位相関係で同期させた周期入力により各振子を独立に制御できることを示す。その後、アームと振子を同期させる方法として、van der Pol方程式に入力として振子の角速度を加え、その周期解を利用してアームの軌道を生成する方法を示す。最後に、本研究の手法の有効性を実機により確認した結果として、2つの振子の振れを独立に制御できること、選択的に振子を振り上げた後、倒立点まわりでは線形フィードバック制御に切り替えることにより、簡単に振り上げ倒立制御が実現できることを示す。

† 第32回SICE北海道支部学術講演会で一部発表(2000-2)

* 釧路工業高等専門学校電子工学科 釧路市大楽毛西 2-32-1

** 室蘭工業大学電気電子工学科 室蘭市水元町 27-1

*** 北海道大学大学院工学研究科 札幌市北区北 13 西 8

* Department of Electronic Engineering, Kushiro National College of Technology, 2-32-1, Nishi, Otanoshike, Kushiro

** Department of Electrical and Electronic Engineering, Muroran Institute of Tech., 27-1, Mizumoto-cho, Muroran

*** Graduate School of Engineering, Hokkaido University, Kita 13 Nishi 8, Kita-ku, Sapporo

(Received July 5, 2000)

(Revised October 26, 2000)

Fig. 1 Coordinate system of an inverted pendulum

Table 1 Physical parameters

	Pendulum1	Pendulum2		Arm
m_i	0.03	0.01	I_a	2×10^{-3}
ℓ_i	0.09	0.05	ℓ_a	0.16
I_i	8.4×10^{-5}	9.15×10^{-6}		

2. 実験装置

Fig.1に製作した倒立振子の概略図を示す。このシステムは、モータ軸に取り付けたアームにより振子の支点を駆動する回転型倒立振子である。制御器にはNEC製PC9821ASを使い、制御プロセスはC言語で記述し、制御周期は1[msec]で行った。制御器の出力は8ビットのD/A変換器を通して増幅器に送られモータを駆動する。モータと振子の回転角度は各軸部に取り付けたロータリエンコーダ(400[P/R])により観測し、角速度はこの値の制御周期ごとの後差分値を用いた。

3. 倒立振子のダイナミクス

本章では振子の運動を数理的に扱うために、システムのダイナミクスを導出する。Fig.1のシステムにおいて、モータ軸と振子の回転軸との交点を原点として水平面内に x 軸、 y 軸をとり、鉛直方向下向きに z 軸をとる。モータ軸および振子の回転角は、反時計まわりを正とする。ここで、以下の記号を定義する。また、このシステムの各パラメータの値をTable1に示す。

θ_a :アームの回転角[rad]

θ_i :振子 i の回転角[rad]

ℓ_a :アームのモータ軸から振子支点部までの長さ[m]

ℓ_i :振子 i の回転部から重心までの長さ[m]

I_a :モータ軸まわりのアームの慣性モーメント[kgm²]

I_i :振子 i の重心まわりの慣性モーメント[kgm²]

m_i :振子 i の質量[kg]

τ :モータの発生トルク[Nm]

g :重力加速度=9.81[m/s²]

振子の重心位置を (x_i, y_i, z_i) とすると x_i, y_i, z_i は次式で表せる。

$$x_i = \ell_a \cos \theta_a - \ell_i \sin \theta_i \sin \theta_a \quad (1)$$

$$y_i = \ell_a \sin \theta_a + \ell_i \sin \theta_i \cos \theta_a \quad (2)$$

$$z_i = \ell_i \cos \theta_i \quad (3)$$

このとき、システムの運動エネルギー K 、ポテンシャルエネルギー U は次式となる。

$$K = \frac{1}{2} I_a \dot{\theta}_a^2 + \sum_{i=1}^2 \left\{ \frac{1}{2} I_i \dot{\theta}_i^2 + \frac{1}{2} m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) \right\} \quad (4)$$

$$U = - \sum_{i=1}^2 m_i g \ell_i \cos \theta_i \quad (5)$$

厳密な回転型倒立振子の運動エネルギーは、振子が傾きながら原点まわりに回転するエネルギーも考慮しなければならないが、本研究で使用する振子は薄い板であるとし、(4)式ではこのエネルギーは考慮していない。

(4)(5)式をラグランジュの運動方程式に代入し、倒立振子の運動方程式を求めると次式のようになる。

$$J \ddot{\theta}_a + \sum_{i=1}^2 m_i \ell_i (\ell_a \ddot{\theta}_i \cos \theta_i + 2 \ell_i \dot{\theta}_a \dot{\theta}_i \cos \theta_i \sin \theta_i - \ell_a \dot{\theta}_i^2 \sin \theta_i) = \tau \quad (6)$$

$$m_i \ell_i \ell_a \ddot{\theta}_a \cos \theta_i + (I_i + m_i \ell_i^2) \ddot{\theta}_i - m_i \ell_i^2 \dot{\theta}_a^2 \cos \theta_i \sin \theta_i + m_i g \ell_i \sin \theta_i = 0 \quad (i=1,2) \quad (7)$$

$$J = I_a + \sum_{i=1}^2 m_i (\ell_a^2 + \ell_i^2 \sin^2 \theta_i) \quad (8)$$

4. 振子の制御タイミングの解析

本章では振子の運動を制御できる周期入力タイミングを、振子のエネルギーを時間について微分したエネルギー変化率から解析する。まず、振子が1つの場合について解析し、次にこの結果をもとに振子が2つの場合についても解析する。

4.1 振子が1つの場合

振子1のみの運動エネルギーを K_1 、ポテンシャルエネルギーを U_1 とすると、各エネルギーは次式で表せる。

$$K_1 = \frac{1}{2} (I_1 + m_1 \ell_1^2) \dot{\theta}_1^2 \quad (9)$$

$$U_1 = -m_1 g \ell_1 \cos \theta_1 \quad (10)$$

よって振子1の全エネルギー E_1 は次式となる。

$$E_1 = K_1 + U_1 \quad (11)$$

上式を時間について微分し(7)式を考慮して整理すると、振子のエネルギー変化率は次式となる。

$$\dot{E}_1 = -m_1 \ell_1 \ell_a \dot{\theta}_a \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + m_1 \ell_1^2 \dot{\theta}_a^2 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 \sin \theta_1 \quad (12)$$

アームの角度 θ_a を時間的に変化させたときのエネルギー変化率を上式から求めるためには、振子の運動 θ_1 を(7)式から求める必要がある。しかし、(7)式は非線形な微分方程式のために厳密に解を求めることは難しい。そこで本章では、アーム

の移動は小さく、振子の周期と振幅は急激には変化しないと
考え、振子の運動は次式の単振子の運動方程式の解で近似で
きると仮定して解析を進める。

$$\ddot{\theta}_1 = -\frac{m_1 g \ell_1}{I_1 + m_1 \ell_1^2} \sin \theta_1 \quad (13)$$

このとき、振子の運動は周期が

$$T = 4 \sqrt{\frac{I_1 + m_1 \ell_1^2}{m_1 g \ell_1}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} \quad (14)$$

$$k = \sin \frac{\theta_{1m}}{2}$$

$$\dot{\theta} = 0 \text{ のとき } \theta = \theta_{1m}$$

となる周期関数となるから⁹⁾、振子の運動は

$$\theta_1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_1 t) \quad (15)$$

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$$

とできる。また、(13) 式の両辺に $\dot{\theta}_1$ をかけて積分すると次
式となる。

$$\dot{\theta}_1^2 = \frac{m_1 g \ell_1}{I_1 + m_1 \ell_1^2} (\cos \theta_1 - \cos \theta_{1m}) \quad (16)$$

さらに、(13)(16) 式を $\sin \theta_1, \cos \theta_1$ について整理すると次式
となる。

$$\sin \theta_1 = -\frac{I_1 + m_1 \ell_1^2}{m_1 g \ell_1} \ddot{\theta}_1 \quad (17)$$

$$\cos \theta_1 = \frac{I_1 + m_1 \ell_1^2}{m_1 g \ell_1} \dot{\theta}_1^2 + \cos \theta_{1m} \quad (18)$$

ここで解析を簡単にするために、振子の周期解 (15) 式の高
調波成分は微小であるとして、振子の運動の基本周期

$$\theta_1 = a_1 \cos(\omega_1 t) \quad (19)$$

のみを考えて、さらに解析を進めることにする。

このとき、振子の全エネルギーは次式のように表現できる

$$E_1 = \frac{a_1^2 \omega_1^2 (I_1 + m_1 \ell_1^2)}{2} - m_1 g \ell_1 (\theta_1 = 0 \text{ のとき}) \quad (20)$$

$$= -m_1 g \ell_1 \cos a_1 (\dot{\theta}_1 = 0 \text{ のとき}) \quad (21)$$

(20)(21) 式より次式の関係を得る。

$$\frac{I_1 + m_1 \ell_1^2}{m_1 g \ell_1} = \frac{2(1 - \cos a_1)}{a_1^2 \omega_1^2} \quad (22)$$

(22) 式を (17)(18) 式に代入して整理すると

$$\sin \theta_1 = -\frac{2(1 - \cos a_1)}{a_1^2 \omega_1^2} \ddot{\theta}_1 \quad (23)$$

$$\cos \theta_1 = \frac{2(1 - \cos a_1)}{a_1^2 \omega_1^2} \dot{\theta}_1^2 + \cos a_1 \quad (24)$$

となる。

ここで、振子の振れを制御するために、アームを振子の基
本周期と同期させて次式に従って変化させたとする。

$$\theta_a = \alpha_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) \quad (0 < \alpha_1 \ll 1) \quad (25)$$

(23)(24)(25) 式、および (25) (19) 式を時間について微分し
たものを (12) 式に代入し、1 周期 T にわたって時間平均をと
ると次式となる。

$$\langle \dot{E}_1 \rangle = \frac{m_1 \ell_1 \ell_a \alpha_1 \omega_1^3}{8} (3 + \cos a_1) \sin \phi_1 \quad (26)$$

ただし、 α_1^2 に関する項は微小であるとして省略した。

(26) 式より、 $\phi_1 > 0$ のとき $\langle \dot{E}_1 \rangle > 0$ となり振子の振れを
励起できること、また、 $\phi_1 < 0$ のとき $\langle \dot{E}_1 \rangle < 0$ となって、
その振れを抑制できることがわかる。

4.2 振子が2つの場合

前節では振子が1つの場合について、振子の周期運動に
アームを一定の位相差で同期させると、振子を制御できるこ
とを示した。本節では、振子が2つの場合について、それぞ
れの振子を独立に制御できるかどうか、前節の解析結果をも
とに調べる。

いま、2つの振子の振れを独立に制御するために、各振子
の基本周期に同期させてアームを制御することを考える。

$$\theta_a = -\sum_{i=1}^2 \alpha_i \sin(\omega_i t) \quad (|\alpha_i| \ll 1) \quad (27)$$

ただし、振子のエネルギーを効率よく制御するために各振子
とアーム間の位相を $\pi/2$ とした。

上式でアームを動かしたときの各振り子のエネルギー変化
率の時間平均を求めると次式となる。ただし、振子の高調波
成分は前節と同様、微小であるとして無視した。

$$\langle \dot{E}_1 \rangle = \frac{m_1 \ell_1 \ell_a \alpha_1 \omega_1^3}{8} \{ \alpha_1 (3 + \cos a_1) - 4 \alpha_2 \omega_2^2 P_1 \} \quad (28)$$

$$\langle \dot{E}_2 \rangle = \frac{m_2 \ell_2 \ell_a b_1 \omega_2^3}{8} \{ \alpha_2 (3 + \cos b_1) - 4 \alpha_1 \omega_1^2 P_2 \} \quad (29)$$

$$P_1 = \frac{\sin\left(\frac{2\pi\omega_2}{\omega_1}\right) \{ (6 + 3 \cos a_1) \omega_1^2 - \omega_2^2 \cos a_1 \}}{\pi(\omega_1^2 - \omega_2^2)(9\omega_1^2 - \omega_2^2)} \quad (30)$$

$$P_2 = \frac{\sin\left(\frac{2\pi\omega_1}{\omega_2}\right) \{ (6 + 3 \cos b_1) \omega_2^2 - \omega_1^2 \cos b_1 \}}{\pi(\omega_2^2 - \omega_1^2)(9\omega_2^2 - \omega_1^2)} \quad (31)$$

実験装置のパラメータと (14) 式より計算した振子の周期 ω_i を
(28)(29) 式に代入することで振子のエネルギー変化率を数値
的に求めることができるが、さまざまな振幅値 a_1, b_2 につい
てエネルギー変化率を計算しなければならず、制御パラメー
タ α_i とエネルギー変化率の関係が直観的にわかりにくい。そ
こで、ここでは振子の振れが小さくその周期が一定である
として、制御パラメータ α_i とエネルギー変化率の関係を調べた
結果について述べる。振子の振幅が大きい場合の振子の可制
御性は小振幅で解析した結果をもとに、実験的に確認する。

各振子の振れが小さく $\cos a_1 = \cos b_1 \approx 1$ で近似できると
すると、(28)(29) 式は

$$\langle \dot{E}_1 \rangle = \frac{m_1 \ell_1 \ell_a \alpha_1 \omega_1^3}{2} \left\{ \alpha_1 - \frac{\alpha_2 \omega_2^2 \sin\left(\frac{2\pi\omega_2}{\omega_1}\right)}{\pi(\omega_1^2 - \omega_2^2)} \right\}$$

Fig. 2 Energy variation diagram of an inverted pendulum in the $\alpha_1 - \alpha_2$ plane ($a_1 = 0.1, b_1 = 0.1, \omega_1 = 9, \omega_2 = 12$)

$$\langle \dot{E}_2 \rangle = \frac{m_2 \ell_2 \ell_a a_2 \omega_2^3}{2} \left\{ \alpha_2 - \frac{\alpha_1 \omega_1^2 \sin\left(\frac{2\pi\omega_1}{\omega_2}\right)}{\pi(\omega_2^2 - \omega_1^2)} \right\} \quad (32)$$

$$(33)$$

となる。上式に実験装置のパラメータを代入して、制御パラメータ α_1, α_2 に対するエネルギー変化率の符号を調べた結果を Fig. 2 に示す。

Fig. 2 より振子の振れが大きい場合には、 α_i の値を適切に選ぶと、各エネルギー変化率の符号を変えることができ、各振子の振れをそれぞれ独立して制御できることがわかる。

5. 引き込みを利用した振子の振り上げ制御

前章では、アームと各振子の運動を一定位相関係で同期させることにより、振子の振れを制御できることを示した。ここでは、一定の位相でアームと振子を同期させる方法を述べる。

いま、各振子が

$$\theta_1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_1 t) \quad (34)$$

$$\theta_2 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos(n\omega_2 t) \quad (35)$$

で運動しているとき、振子の角速度をフィードバックし、アームの角度を次式で変化させる場合を考える。

$$\theta_a = \sum_{i=1}^2 \alpha_i A G_i \dot{\theta}_i \quad (36)$$

ただし、 $A G_i$ は $\dot{\theta}_i$ の振幅を 1 にする変数

(34)(35) 式を (36) 式に代入し、高調波成分は微小であるとして省略すると、(27) 式が得られることから、(36) 式にしたがってアームを制御すると、各振子を制御できることがわかる。しかし、振子の初期状態が $\theta_i = \dot{\theta}_i = 0$ のときは、 $\theta_a = 0$ となってアームが動かず、静止した状態からは振子を制御できないことがわかる。そこで、本研究では非線形振動子の引

き込み現象を利用してアームと振子を同期させることを考える。

5.1 非線形振動子の引き込み現象

引き込み現象（同期または同調現象と呼ばれる）とは、二つの周期的現象が影響しあう結果、元来は異なった周期を持っているのに完全にそれが一致する現象である¹⁰⁾。引き込み現象には固有周期の異なる複数の自律振動子が相互に影響することにより、すべて同じ周期で振動するようになる相互引き込みと、周期的な外力が振動子の自由振動を引き込む強制引き込み現象がある。本節では、非線形振動子に外力として振子の運動を加え、強制引き込みを利用して振子と振動子の周期解を同期させる方法について述べる²⁾。

非線形振動子として、振子の角速度を入力とする van der Pol 方程式を考える（ここでは簡単のために、振子 1 と van der Pol 方程式の解が同期する条件について述べる）。

$$\ddot{x}_1 - \varepsilon(1 - x_1^2)\dot{x}_1 + \Omega_1^2 x_1 = K\dot{\theta}_1 \quad (37)$$

ただし、 ε, Ω_1, K は正の定数

振子が (34) 式で運動しているとき、強制振動と自由振動が共存すると仮定し (37) 式の解が

$$x_1 = A_1 \sin(\omega_1 t + \psi_1) + B \sin(\Omega_1 t + \Phi) \quad (38)$$

で与えられるとする。

ここで、強制振動の解として基本周期のみを考えているが、これは (26) 式より、振子のエネルギー変化率に関係している周波数成分として基本周期だけを考えているからである。

(38) 式を (37) 式に代入して、 Ω_1, ω_1 の項だけを (37) からひろい、 $\sin, \cos$ の項から

$$\begin{aligned} C_1 \cos \Phi &= 0 \\ C_2 \sin \Phi &= 0 \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \cos \psi_1 &= -\frac{K a_1 \omega_1 C_3}{C_2^2 + C_3^2} \\ \sin \psi_1 &= \frac{K a_1 \omega_1 C_2}{C_2^2 + C_3^2} \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} C_1 &= B \left(1 - \frac{3}{2} A_1^2 \omega_1^2 - \frac{3}{4} B^2 \Omega_1^2 \right) \\ C_2 &= A \varepsilon \omega_1 \left(-1 + \frac{3}{4} A_1^2 \omega_1^2 + \frac{3}{2} B^2 \Omega_1^2 \right) \\ C_3 &= A_1^2 (\Omega_1^2 - \omega_1^2) \end{aligned} \quad (41)$$

を得る。よって、(39)(40) 式より次式の関係を得る。

$$B \left(1 - \frac{6 A_1^2 \omega_1^2 + 3 B^2 \Omega_1^2}{4} \right) = 0 \quad (42)$$

$$A_1^2 (D_1^2 + \varepsilon^2 D_2^2) = K^2 a_1^2 \quad (43)$$

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{(\Omega_1^2 - \omega_1^2)}{\omega_1} \\ D_2 &= 1 - \frac{3 A_1^2 \omega_1^2 + 6 B^2 \Omega_1^2}{4} \end{aligned} \quad (44)$$

(42) 式より、方程式の一つの解として $B = 0$ を得る。これは自由振動が抑制されることを意味する。もう一つの解 $6 A_1^2 \omega_1^2 + 3 B^2 \Omega_1^2 = 4$ は、自由振動

$$B^2 = \frac{4 - 6 A_1^2 \omega_1^2}{3 \Omega_1^2} \quad (45)$$

を与えることがわかる. よって強制振動の振幅が以下の条件を満たすとき

$$A_1^2 \geq \frac{2}{3\omega_1^2} \quad (46)$$

自由振動が抑えられ ($B = 0$), 振子の運動と van der Pol 方程式の解が同期する引き込み現象が起こることになる.

いま, $0 < \varepsilon \ll K$ とすると (43) 式より強制振動の振幅を得る.

$$A_1^2 = \frac{K^2 a_1^2 \omega_1^2}{(\Omega_1^2 - \omega_1^2)^2} \quad (47)$$

よって, $\Omega_1 \approx \omega_1$, または K が十分大きいとき上式は (46) 式を満たし, 引き込み現象が起こることがわかる. また, (47) 式を (40) 式に代入して整理すると

$$\psi_1 = \tan^{-1} \left\{ \frac{3\varepsilon K^2 a_1^2 \omega_1^5}{4(\omega_1^2 - \Omega_1^2)^3} \right\} \quad (48)$$

の関係を得る. よって, 上述の引き込み条件を満たして振子の運動と非線形振動子の周期解が同期しているとき, (48) 式より周期解の位相は $\psi_1 = \pi/2$ となる. したがって, van der Pol 方程式の解は

$$x_1 = A_1 \cos(\omega_1 t) \quad (49)$$

となり, 振子の振れと同相で同期することがわかる.

5.2 非線形振動子の周期解を利用したアームの軌道生成
前節の解析により, van der Pol 方程式に入力として振子の角速度を加えると, その周期解は振子の運動と同期することを示した

ここで, 方程式の周期解を利用してアームの軌道を次のように構成することを考える.

$$\theta_a = \sum_{i=1}^2 \alpha_i A G_i \dot{x}_i \quad (|\alpha_i| \ll 1) \quad (50)$$

ただし, $A G_i$ は $\dot{x}_i$ の振幅を 1 にする変数

van der Pol 方程式は $\theta_i = 0$ の場合でも, 自励発振周期解を生じることから, 上式は振子が静止した状態でもアームが周期運動をすることがわかる. このアームの運動により振子に微小振動が生じると, 振子の角速度が方程式に入力され始める. この微小振動が (34)(35) 式で与えられるとき, $\Omega_i \approx \omega_i$, または K を大きく選んでおくと, 自励発振は抑制され周期解 x_i と振子の運動 θ_i が同期する引き込み現象が起こる. このとき, 方程式の周期解は前節の解析より次式で表される.

$$x_i = A_i \cos(\omega_i t) \quad (i = 1, 2) \quad (51)$$

上式を (50) 式に代入すると (27) 式が得られる. よって, van der Pol 方程式の周期解を利用してアームの軌道を構成すると, 振子が静止した状態からでも振子を制御できることがわかる.

6. 実験

本章では, これまで述べた制御方法の有効性を確認するために, 実機により検証を行った結果について述べる.

Fig. 3 Angular displacements of arm and pendulum1 ($\alpha_1 = 0.25$)

6.1 実験結果

第4-1節では振子の周期運動の基本周期だけを考慮して, 振子を制御するタイミングを近似的に導出した. このタイミングにより振子を制御できるかどうか実際に実験により確認した結果を Fig. 3 に示す. Fig. 3 より, 解析より得られた振子のエネルギー変化率が最大となる位相差 $\phi_1 = \pi/2$ でアームと振子を同期させ続けることにより, 静止した状態からでも振子の振れを励起させて, その振れを大域的に制御できることが確認できる. また実験では $t = 6$ [sec] 付近で, アームと振子の同期をくずすために外乱を加えたが, アームと振子はすぐ再同期し, 振れが増加していくことがわかる. $t = 15$ [sec] 以降, 振子の振幅は定常に達するが, これは振子の支点部の損失エネルギーが大きくなり $\langle \dot{E} \rangle = 0$ となるためであると考えられる. アームの振幅 α_1 を大きくすると, 振子をさらに励起させて, 回転させることも可能であった. なお, アームの軌道を構成する van der Pol 方程式の解は制御周期ごとに4次の Runge-Kutta-Gill 法により計算した. このとき, 方程式に与えた初期値は $(x_i, \dot{x}_i) = (0.01, 0)$ であり, 使用した方程式の各パラメータは $(\varepsilon, \Omega_1, \Omega_2, K) = (1.5, 80, 143, 50)$ である.

第4-2節では振子の振れは小さくその周期は一定であるとして, 2つの振子を独立に制御できるタイミングを解析した. このタイミングにより2つの振子を独立にかつ大域的に制御できるかどうか実験した結果を Fig. 4~6 に示す.

Fig. 4 は2本の振子をいったん手で持ち上げてから, その振れを同時に抑制した場合. また Fig. 5 は振子2の振れを抑制しながら, 振子1の振れを励起させた場合である. どちらの場合も, 振子を独立にかつ大域的に制御できることがわかる.

Fig. 6 は振子が静止している状態から, 2本同時に振り上げ制御を行った場合である. $t = 3$ [sec] 付近までは, 2本とも振り上がっていくが, その後は交互に振幅が大きくなり, うなりのような現象が生じた. これは, 小振幅時では一定であった各振子の周期が振子の振幅の増加と共に変化していき, $\omega_2 \approx 3\omega_1$, または $\omega_1 \approx 3\omega_2$ となった時, (30)(31) 式の P_1, P_2

Fig. 4 Swing Suppression control($\alpha_1 = -0.12, \alpha_2 = -0.12$)

Fig. 5 Swing up control(pendulum1) and Swing suppression control (pendulum2)($\alpha_1 = 0.2, \alpha_2 = -0.05$)

Fig. 6 Swing up control($\alpha_1 = 0.2, \alpha_2 = 0.12$)

Fig. 7 Control of pendulums from natural pendent position to inverted position

項が非常に大きくなり、その影響を受けて各エネルギー変化

率(28)(29)式の符号が変化したためであると考えられる。

以上の結果より、振子の振れが小さくその周期が一定であるとして解析した各振子の制御パラメータ α_1, α_2 を利用して制御を行っても、アームと各振子を一定の位相関係で同期させ続けることにより、2つの振子の振れを同時に抑制する制御、また1つの振子の振れを抑制しながら、他方の振子の振れを励起する制御、さらに大振幅時には各振子の振れが増減を繰り返すものの、2つの振子を同時に振り上げる制御などが大域的に実現可能であることを実験により確認することができた。

Fig.7はFig.4, Fig5の制御とLQR制御による倒立制御を組み合わせた以下のようなアルゴリズムにより、振子を制御したときの結果である。

- (1) 振子2を抑制しながら振子1を励起。
- (2) $|\theta_1| > 2.8[\text{rad}]$ となったとき、LQR制御に切り替えて振子1を倒立。
- (3) LQR制御終了後、各振子の振れ抑制。
- (4) 振子1を抑制しながら振子2を励起
- (5) $|\theta_2| > 2.8[\text{rad}]$ となったとき、LQR制御に切り替えて振子2を倒立。

上記アルゴリズムにより各振子の選択的な振り上げ倒立制御が実現できることがわかる。

7. おわりに

本論文では、回転型2重倒立振子の振り上げ制御が実現できるタイミングを解析し、そのタイミングを実現する方法として、非線形振動子の引き込み現象を利用して、振子とアームの運動を同期させる方法について述べた。今回の実験ではアームと振子を同期させるタイミングを一定にして振子を制御したが、このタイミングを積極的に変化させることで、希望するエネルギーを持つように振子を動的に安定化させることも簡単に実現できるのではないと思われる。また、このような制御が実現できれば、周期的な運動をするメカニカルシステム、たとえばブラキエーションロボット¹¹⁾や、歩行ロボット¹²⁾などの制御にも応用可能であると考えている。

参考文献

- 1) 梶原, 橋本, 松田, 土谷: 皿まわしの数値とロボットによる実現, 日本ロボット学会誌, 16-4, 483/490 (1998)
- 2) 梶原, 橋本, 松田, 土谷: 引き込みを利用したブランコの振れ制御, 日本ロボット学会誌, 17-4, 520/525 (1999)
- 3) 梶原, 橋本, 松田, 土谷: 鉄棒ロボットの数値解析と運動制御, 日本ロボット学会誌, 18-4, 515/520 (2000)
- 4) 梶原, 橋本: 引き込みを利用した並列振り子の制御, 第14回SICE北海道支部シンポジウム「デジタル信号と数値解析」, 1/4 (1998)
- 5) 森, 西原, 古田: 倒立振子制御用ハイブリッド制御, 計測自動制御学会論文集, 12-4, 482/487 (1976)
- 6) 西田, 兼重, 寺嶋: 倒立振子の振り上げ非線形プロセスの制御, 計測自動制御学会論文集, 31-9, 1452/1461 (1995)
- 7) 石井, 申, 田村: 非線形ロバースト H^∞ 制御による回転型倒立振子の振り上げ安定化制御, 日本機械学会論文集 (C 編), 62-599, 2666/2673 (1996)