飽和を有する制御系の $\mathcal{L}_2$ 性能保証領域 —初期状態と $\mathcal{L}_2$ 外乱を考慮した解析と設計—[†]

木 山 健*・岩 崎 徹 也**

State Space Region Attaining $\mathcal{L}_2$ Performance for Saturating Control System
—Analysis and Synthesis with Initial State and $\mathcal{L}_2$ Disturbance Input—[†]

Tsuyoshi KIYAMA* and Tetsuya IWASAKI**

This paper proposes analysis and synthesis method for the set of initial state vectors of saturating control systems such that any closed-loop state trajectory is bounded for all time and $\mathcal{L}_2$ norm of the performance signal is less than a prescribed level. We treat linear time-invariant systems with dynamic output feedback controllers subject to known bounds on the magnitudes of the control inputs. We assume that the initial state vectors belong to the bounded set and disturbance inputs belong to a set of signals having bounded $\mathcal{L}_2$ norm. Two subsets of such achievable set of initial state vectors are characterized. One is derived from the linear analysis that considers the behavior of the states in the linear (non-saturated) region only, while the other is based on the nonlinear analysis using the multi-loop circle criterion. We can show that the two sets are exactly the same in the synthesis case. Thus we conclude that the circle criterion does not help, within our framework, to increase the size of the initial state space region in saturating $\mathcal{L}_2$ performance synthesis when compared with that resulting from the linear analysis.

Key Words: saturation, anti-windup control, $\mathcal{L}_2$ performance, circle criterion

1. はじめに

アクチュエータには物理的な制約のため達成可能な最大出力に必ず制限が存在する。したがって、もし性能の要求が厳しく非常に大きな制御入力が必要とすると、制御対象への入力が“飽和”してしまう。よって、この飽和の影響を考慮しつつコントローラを設計することは大変重要な課題の一つである。

最近、飽和を有するシステムに対し、線形行列不等式 (LMI) ^{1)~5)} の枠組みで円板条件や Popov 条件を用いて、ある範囲の飽和を許容する安定性や性能を解析したり、設計する新しい方法が開発されてきている。これらの方法の基本的な考え方は、状態空間内のある領域のみで有効な Lyapunov 関数に基づくものである。特に解析法に関しては、2 次形式以外の Lyapunov 関数やマルチプライアを導入しても凸

最適化問題に帰着でき、解析における保守性の軽減が期待できることが示されている ^{1), 2)}。一方、設計法に関して文献 ⁵⁾ では、文献 ²⁾ の解析結果に基づき飽和を有するシステムの局所的な $\mathcal{L}_2$ ゲイン性能を考慮する設計問題を取り扱っている。しかし、初期状態もしくは外乱のいずれかを零に仮定しなければならず、零以外の初期状態と $\mathcal{L}_2$ 外乱の両方を同時に許容できる設計法になっていない問題点を持つ。また、飽和が許容される範囲はあらかじめ与えられ、この許容範囲が安定性や性能へ及ぼす影響は十分に考察されていない。

本論文ではこれらの問題点を解決するため、文献 ⁶⁾ の安定性問題と文献 ⁷⁾ の $\mathcal{H}_2$ 性能問題に関する結果を $\mathcal{L}_2$ 性能問題に拡張し、零以外の初期状態と $\mathcal{L}_2$ 外乱の両方を考慮した解析、設計方法を提案する。この提案方法が、まず一つの主結果である。さらに、この結果から飽和の許容範囲と達成される性能の関係について検討する。具体的には、以下の手順を行う。まず、LMI に基づく状態空間での領域的な $\mathcal{L}_2$ 性能解析方法を考察する。初期状態が零とは限らない線形時不変 (LTI) 系と飽和要素のフィードバック結合からなる非線形系を解析の対象とし、特に、つぎの二つの問題を考える。

(La) 文献 ²⁾ での線形解析 (飽和のない範囲内での解析) の考え方、もしくは、

(Na) 文献 ²⁾ での非線形解析 (円板条件 ⁸⁾) の考え方

に基づき、 $\mathcal{L}_2$ ノルムがある与えられた値以下の外乱に対し、

[†] 第 29 回 制御理論シンポジウムで発表 (2000・5)

* 東京工業大学大学院理工学研究科 目黒区大岡山 2-12-1

** バージニア大学機械航空工学科 アメリカバージニア州シャーロットツヴィル 22904-4746

* Graduate School of Science and Engineering, Tokyo Institute of Technology, Meguro-ku, Tokyo

** Department of Mechanical & Aerospace Engineering, University of Virginia, Charlottesville, VA, U.S.A.

(Received April 24, 2000)

(Revised December 13, 2000)

この非線形系の $\mathcal{L}_2$ 性能を保証する初期状態の集合である状態空間領域を求めよ. この領域を $\mathcal{L}_2$ 性能保証領域と呼ぶ. 問題 (Na) は問題 (La) を特別な場合として包含するより一般的なものである. つまり, 問題 (Na) から得られる領域の集合は, 問題 (La) からの領域の集合以上の大きさになることが保証される. このことを数値例により確認する.

つぎに, 初期状態が零とは限らない LTI 制御対象と解析の場合と同様の外乱に対し, それぞれの解析結果を用いて制御入力飽和を考慮するつぎの二つの設計問題を考察する.

(Ls) 問題 (La) に対する解の線形解析条件に基づいて, 動的出力フィードバックコントローラ, もしくは,

(Ns) 問題 (Na) に対する解の非線形解析条件に基づいて, アンチwindアップ機構^{9)~13)}を備えた動的出力フィードバックコントローラ

により達成可能な $\mathcal{L}_2$ 性能保証領域を特徴づけよ. 解析結果から, 問題 (Ns) で求まる領域の集合は, 問題 (Ls) で求まる領域の集合と少なくとも同じ大きさまたはそれ以上に大きくなることが期待される. しかしながら, この二つの集合が厳密に等しいことを示すことができる. これが, 本論文でのもう一つの主結果である.

この結果は, 円板条件に基づくアンチwindアップコントローラで達成可能な $\mathcal{L}_2$ 性能保証領域が, 線形解析に基づく構造の単純な出力フィードバックコントローラで必ず達成できることを意味する. つまり, 本論文の枠組み内では, 飽和を有する制御において, 達成可能な $\mathcal{L}_2$ 性能保証領域の大きさを線形解析条件に基づく結果以上に改善するため, 円板条件による解析を用いることは有効でないことを示している. これは, 飽和の許容範囲と性能の一つの関係を明らかにしたものである.

表記: $n \times m$ の実行列の集合を $\mathbb{R}^{n \times m}$, $n \times n$ の単位行列を I_n と記述する. 行列 M に対し, M' は転置行列を表わす. ベクトル x に対し, x_i は x の i 番目の要素である. ベクトル x と y に対し, $x > y$ はすべての i で $x_i > y_i$ となることを意味する. $x \geq y$ も同様である. 対称行列 X に対して, $X > 0$ ($X \geq 0$) は (準) 正定行列を意味する. 正定行列 Y に対して, $\text{He}(Y) := Y + Y'$ を定義する. 行列 $M \in \mathbb{R}^{n \times p}$ に対して, $M^\perp \in \mathbb{R}^{(n-r) \times n}$ (r は M のランク) は, $M^\perp M = 0$, $M^\perp M^{\perp'} > 0$ を満たす行列を意味する. 信号 z の $\mathcal{L}_2$ ノルムを $\|z\|_{\mathcal{L}_2} := (\int_0^\infty z'(t)z(t)dt)^{1/2}$, $\mathcal{L}_{2t}$ ノルムを $\|z\|_{\mathcal{L}_{2t}} := (\int_0^t z'(\tau)z(\tau)d\tau)^{1/2}$ と定義する. 行列 G と K の線形分変換 (LFT) は, Fig.1 での w から z への写像を表現する行列として定義され, $G \oplus K$ と記述する. 最後に, 伝達関数 $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ をつぎのように表記する.

$$G(s) =: \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right).$$

Fig. 1 Linear fractional transformation $G \oplus K$

Fig. 2 Feedback system with saturation nonlinearity

2. $\mathcal{L}_2$ 性能保証領域の解析

2.1 問題設定と準備

Fig.2 のフィードバック系で表されるシステムを考える. ただし, $H(s)$ は LTI システムで,

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ z \\ z_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & 0 & 0 \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \\ w_p \end{bmatrix}$$

により与えられ, $x \in \mathbb{R}^n$, $w \in \mathbb{R}^m$, $w_p \in \mathbb{R}^k$, $z \in \mathbb{R}^m$, $z_p \in \mathbb{R}^l$ である. また $\phi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ は飽和関数であり,

$$w = \phi(z) \Leftrightarrow w_i = \begin{cases} \sigma_i & (z_i \geq \sigma_i) \\ z_i & (|z_i| \leq \sigma_i) \\ -\sigma_i & (z_i \leq -\sigma_i) \end{cases} \quad (1)$$

により定義される. ここで, $\sigma \in \mathbb{R}^m$ は各要素が正の与えられたベクトルである. また, 与えられたスカラー $\theta \geq 0$ に対して,

$$\mathcal{W}(\theta) := \{w_p : \|w_p\|_{\mathcal{L}_2} \leq \theta\}$$

を定義する. 本論文では $\mathcal{W}(\theta)$ に属する $\mathcal{L}_2$ ノルムが有界な外乱 w_p を考える. さらに, 一般的な (つまり 2 次形式とは限らない) Lyapunov 関数 $V(x)$ を用い, 与えられたスカラー $\delta \geq 0$ に対して

$$\mathcal{X}(\delta) := \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) \leq \delta\} \quad (2)$$

のレベルセットを定義しておく.

このようなシステムに対して, $\mathcal{L}_2$ 性能保証領域を次のように定義する.

【定義】 Lyapunov 関数 $V(x)$, スカラー $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\gamma > 0$ が与えられたとする. このとき, 任意の $w_p \in \mathcal{W}(\beta)$ を加えた場合, $\mathcal{X}(\alpha^2)$ 内の任意の点を初期値とする状態軌道がすべての時間で $\mathcal{X}(\alpha^2 + \beta^2)$ 内に留まり, かつ $\mathcal{L}_2$ 性能条件

$$\|z_p\|_{\mathcal{L}_{2t}} \leq \gamma(\|w_p\|_{\mathcal{L}_{2t}} + \alpha), \quad \forall t > 0 \quad (3)$$

を満たす初期状態の領域 $\mathcal{X}(\alpha^2)$ をレベル (β, γ) の $\mathcal{L}_2$ 性能保証領域と定義する. ただし, 以下では特にことわらない限

り, このレベル (β, γ) の $\mathcal{L}_2$ 性能保証領域を単に $\mathcal{L}_2$ 性能保証領域と記述する.

本論文で考える解析問題は, 上記のシステムに対し $\mathcal{L}_2$ 性能保証領域を求める手法を提案することである. 特に, そのような領域は一般に唯一ではなく, ここではそのような領域のうち最も「大きな」ものを求めることが望ましい. ただし, 領域の「大きさ」の指標については現段階では限定せず, まず $\mathcal{L}_2$ 性能保証領域を理論的に特徴づけることを行い, その後領域の最大化について議論する.

次節での記述を簡単にするため, Fig.2 のシステムをループ変換しておく. つぎの不感帯関数 $\varphi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$,

$$\varphi(z) := -\phi(z) + z \quad (4)$$

を定義すると, $w = \varphi(z)$ とおくことにより, Fig.2 の閉ループ系は $H(s) := C(sI - A)^{-1}B + D$ と φ のフィードバック結合, すなわち,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ z \\ z_p \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A + B_1 C_1 & -B_1 & B_2 \\ C_1 & 0 & 0 \\ C_2 + D_{21} C_1 & -D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \\ w_p \end{bmatrix} \\ &=: \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & 0 & 0 \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \\ w_p \end{bmatrix} \\ &=: \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \\ w_p \end{bmatrix} \quad (5) \\ w &= \varphi(z) \end{aligned}$$

で表現される.

2.2 $\mathcal{L}_2$ 性能保証領域解析の十分条件

本節では, $\mathcal{L}_2$ 性能保証領域を理論的に特徴づける. まず, 一般的な Lyapunov 関数を用いて, その関数のレベルセットが $\mathcal{L}_2$ 性能保証領域となるための十分条件を与える. つぎに, Lyapunov 関数を 2 次形式に限定し, 与えられたスカラー $\delta \geq 0$ に対して楕円領域が $\mathcal{L}_2$ 性能保証領域であるための十分条件を得る. なお, ここで用いるアプローチは文献¹⁴⁾の基本的な考え方に従ったものであり, また得られる条件はこの文献の結果を領域的 $\mathcal{L}_2$ 性能解析に拡張するものである.

つぎの補題は, 非線形系の $\mathcal{L}_2$ 性能保証領域を一般的な Lyapunov 関数を用いて特徴づけるものであり, システム (5) の領域的 $\mathcal{L}_2$ 性能解析の基礎を与える.

[補題 1] 非線形系

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, w_p), \\ z_p &= g(x, w_p) \end{aligned} \quad (6)$$

を考える. ただし, $f: \mathbb{R}^{n+k} \rightarrow \mathbb{R}^n$ および $g: \mathbb{R}^{n+k} \rightarrow \mathbb{R}^l$ は連続関数であり, $f(0, 0) = 0$ を満たすとする. もし, 正のスカラー $a, b, c > 0$ と連続で微分可能な関数 $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ が存在し,

$$a\|x\|^2 \leq V(x) \leq b\|x\|^2, \quad \forall x \in \mathcal{X}(\alpha^2 + \beta^2),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} f(x, w_p) - w_p' w_p + \frac{1}{\gamma^2} g'(x, w_p) g(x, w_p) \\ \leq -c\|x\|^2, \quad \forall x \in \mathcal{X}(\alpha^2 + \beta^2), w_p \in \mathbb{R}^k \end{aligned} \quad (7)$$

を満たすならば $\mathcal{X}(\alpha^2)$ はレベル (β, γ) の $\mathcal{L}_2$ 性能保証領域である.

(証明) 任意の $w_p \in \mathcal{W}(\beta)$ を加えた場合, 条件 (7) において, x を解軌道上の点 $x(t)$ で置き換え, また, $z_p' z_p / \gamma^2 \geq 0$ から

$$\frac{dV}{dt} - w_p' w_p \leq 0, \quad \forall t \geq 0$$

を得る. ただし, dV/dt は $V(x(t))$ の時間微分である. $t = 0$ から任意の $t = \tau > 0$ まで積分して $w_p \in \mathcal{W}(\beta)$ と $x(0) \in \mathcal{X}(\alpha^2)$ より

$$\begin{aligned} V(x(\tau)) &\leq V(x(0)) + \int_0^\tau w_p'(t) w_p(t) dt \\ &\leq \alpha^2 + \beta^2, \quad \forall \tau > 0 \end{aligned}$$

となる. すなわち, すべての $t \geq 0$ に対し $x(t)$ は $\mathcal{X}(\alpha^2 + \beta^2)$ 内に留まる. 以下, 性能条件 (3) を示す. 条件 (7) において, x を解軌道上の点 $x(t)$ で置き換えると

$$\frac{dV}{dt} - w_p' w_p + \frac{1}{\gamma^2} z_p' z_p \leq 0, \quad \forall t \geq 0$$

を得る. $t = 0$ から $t = \tau$ まで積分すると, すべての $\tau > 0$ に対し $V(x(\tau)) \geq 0$ より

$$\begin{aligned} \int_0^\tau z_p'(t) z_p(t) dt \\ \leq \gamma^2 \int_0^\tau w_p'(t) w_p(t) dt + \gamma^2 V(x(0)), \quad \forall \tau > 0 \end{aligned}$$

となり, $w_p \in \mathcal{W}(\beta)$ と $x(0) \in \mathcal{X}(\alpha^2)$ より

$$\int_0^\tau z_p'(t) z_p(t) dt \leq \gamma^2 \|w_p\|_{\mathcal{L}_{2\tau}}^2 + \gamma^2 \alpha^2 \quad \forall \tau > 0,$$

$$\|z_p\|_{\mathcal{L}_{2t}} \leq \gamma(\|w_p\|_{\mathcal{L}_{2t}} + \alpha), \quad \forall t > 0$$

を得る. よって, 性能条件 (3) も成立する. ■

このとき, 補題 1 での領域 $\mathcal{X}(\alpha^2 + \beta^2)$ はつぎの性質を持つ.

[補題 2] 補題 1 の仮定と条件が成立しているとする. このとき, 以下が成立する.

(i) $\alpha = 0$ ($x(0) = 0$) の場合, 任意の $w_p \in \mathcal{W}(\beta)$ に対し, $x(t)$ はすべての $t \geq 0$ で $\mathcal{X}(\beta^2)$ 内に留まり, かつ $\mathcal{L}_2$ ゲイン性能条件

$$\|z_p\|_{\mathcal{L}_{2t}} \leq \gamma \|w_p\|_{\mathcal{L}_{2t}}, \quad \forall t > 0 \quad (8)$$

を満たす.

(ii) $\beta = 0$ ($w_p = 0$) の場合, 任意の $x(0) \in \mathcal{X}(\alpha^2)$ に対し, $x(t)$ はすべての $t \geq 0$ で $\mathcal{X}(\alpha^2)$ 内に留まり, そして, $t \rightarrow \infty$ にともない原点に収束し, かつ性能条件

$$\|z_p\|_{\mathcal{L}_{2t}} \leq \gamma \alpha, \quad \forall t > 0 \quad (9)$$

を満たす.

(証明) 補題 1 の証明で $\alpha = 0$ と $\beta = 0$ にすることにより, 状態 $x(t)$ がそれぞれ領域 $\mathcal{X}(\beta^2)$ と $\mathcal{X}(\alpha^2)$ 内に留まる

こと、およびそれぞれの性能条件 (8) と (9) が成立することは容易に分かる。また、 $\beta = 0$ の場合、 $V(x)$ を Lyapunov 関数として用いると、 $x(0) \in \mathcal{X}(\alpha^2)$ を出発点とする任意の解軌道に沿う $V(x)$ の時間微分が単調に減少することになり、解軌道が原点に収束することが示される。 ■

以下では、Lyapunov 関数のクラスを

$$V(x) := x'Px$$

のような 2 次形式に限定する。ここで、 P は実対称正定行列とする。よって、Lyapunov 関数のレベルセット (2) を

$$\mathcal{E}^P(\delta) := \{x \in \mathbb{R}^n : x'Px \leq \delta\} \quad (10)$$

なる楕円領域として記述する。また、

$$\begin{aligned} f(x, w_p) &:= Ax + B_1\varphi(C_1x) + B_2w_p, \\ g(x, w_p) &:= C_2x + D_{21}\varphi(C_1x) + D_{22}w_p \end{aligned}$$

を用いると、システム (5) は (6) の形式で表される。したがって補題 1 より、(10) で定義される楕円領域 $\mathcal{E}^P(\alpha^2)$ がシステム (5) の $\mathcal{L}_2$ 性能保証領域であるための十分条件は、

$$\begin{aligned} x'P(Ax + B_1\varphi(C_1x) + B_2w_p) - w_p'w_p + \frac{1}{\gamma^2}z_p'z_p \\ \leq -c\|x\|^2, \quad \forall x \in \mathcal{E}^P(\alpha^2 + \beta^2), w_p \in \mathbb{R}^k \end{aligned} \quad (11)$$

を満たす $c > 0$ が存在することとなる。

この条件を満たす $P > 0$ は一般に唯一でなく、最大の $\mathcal{L}_2$ 性能保証領域 $\mathcal{E}^P(\alpha^2)$ を与える P を求めることが望ましい。このとき、楕円体 $\mathcal{E}^P(\alpha^2)$ の大きさを測る尺度として、例えば $1/\text{tr}(P)$ を用いると、つぎの最適化問題を得る。

$$\underset{P}{\text{minimize}} \text{tr}(P) \text{ subject to } P > 0 \text{ and (11).}$$

目的関数 $\text{tr}(P)$ は変数に関し線形であり、したがって、条件 (11) が LMI で特徴づけられれば、この最適化問題は内点法¹⁵⁾を用いて数値的に効率良く解くことができる。以下では、(11) に対する二つの十分条件を行列不等式で与える。なお、基本的考え方は文献^{1)~5)}などで使用されたものと同様である。

ここで、各要素が零以上の値を持つ与えられたベクトル $\eta \in \mathbb{R}^m$ に対して局所領域

$$\mathcal{L}(\eta) := \{x \in \mathbb{R}^n : |C^i x| \leq \eta_i, (i = 1, \dots, m)\}$$

を定義する。ただし C^i は C の第 i 行ベクトルである。このとき、第一の方法は線形解析に基づくものである。飽和が起らない線形領域は $\mathcal{L}(\sigma)$ であり、この領域内では、

$$\varphi(C_1x) = 0, \quad \forall x \in \mathcal{L}(\sigma)$$

であることに注意すると、

$$\mathcal{E}^P(\alpha^2 + \beta^2) \subset \mathcal{L}(\sigma), \quad (12)$$

$$x'P(Ax + B_2w_p) - w_p'w_p + \frac{1}{\gamma^2}z_p'z_p \leq -c\|x\|^2,$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, w_p \in \mathbb{R}^k \quad (13)$$

が式 (11) の十分条件であることがわかる。ここで、つぎの補題を導入する。

[補題 3] 正定行列 P 、行列 C 、スカラー $\xi \geq 0$ 、 ζ が与えられたとする。このとき、次の記述は等価である。

$$(i) \|Cx\| \leq \xi, \quad \forall x \text{ s. t. } x'Px \leq \zeta^2.$$

$$(ii) \zeta^2 C' C \leq \xi^2 P.$$

(証明) (i) とつぎは等価である。

$$z'P^{-1/2}C'CP^{-1/2}z \leq \xi^2, \quad \forall z \text{ s. t. } z'z \leq \zeta^2.$$

また、これは (ii) と等価である。 ■

以上より、つぎの結果が得られる。

[命題 1] $H(s) := C(sI - A)^{-1}B + D$ と式 (4) で定義される φ のフィードバック結合を考える。与えられた $P > 0$ に対して

$$\text{He} \begin{bmatrix} PA & PB_2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}I & 0 \\ C_2 & D_{22} & -\frac{\gamma^2}{2}I \end{bmatrix} < 0, \quad (14)$$

$$(\alpha^2 + \beta^2)C^i C^i \leq \sigma_i^2 P, \quad \forall i = 1, \dots, m \quad (15)$$

が成立するならば、 $\mathcal{E}^P(\alpha^2)$ はレベル (β, γ) の $\mathcal{L}_2$ 性能保証領域である。

(証明) 補題 3 から式 (12) と式 (15) の等価性が示される。また、式 (14) の (3, 3) ブロックについて Schur complement¹⁶⁾を行い、その条件式の左側からシステムの微分方程式の解 $[x' w_p']$ を、右側からその転置行列を掛ける。このとき、式 (14) が式 (13) の十分条件になっていることが分かる。 ■

この方法では、 $x(0) \in \mathcal{E}^P(\alpha^2)$ のとき $x(t)$ が線形領域 $\mathcal{L}(\sigma)$ の内部に留まることが保証される。つまり、飽和が起らない状態軌道のみに着目しているのである。この意味で、命題 1 は保守的である。

条件 (11) を行列不等式で特徴づける第二の方法は、円板条件を用いる非線形解析に基づくものである。その鍵となるアイデアは、不感帯関数 φ が以下のような、“領域的” セクター条件を満たすことである。まず、 $\rho \geq \sigma$ を満たすベクトル $\rho \in \mathbb{R}^m$ を固定し、任意のベクトル $x \in \mathcal{L}(\rho)$ を考える。このとき、 $z := C_1x$ および $w := \varphi(z)$ を定義すると、

$$w_i(w_i - r_i z_i) \leq 0$$

がすべての $i = 1, \dots, m$ に対して成り立つ (Fig.3 参照)。ここで、 w_i と φ_i は、それぞれ w と φ の第 i 番目の要素であり、

$$r_i := \frac{\rho_i - \sigma_i}{\rho_i}$$

である。よって、条件 (11) の十分条件は、

$$w_i(w_i - r_i C^i x) \leq 0, \quad \forall i = 1, \dots, m \quad (16)$$

を満たすすべての $x \in \mathbb{R}^n$, $w \in \mathbb{R}^m$, $w_p \in \mathbb{R}^k$ に対し、

$$\mathcal{E}^P(\alpha^2 + \beta^2) \subset \mathcal{L}(\rho), \quad (17)$$

$$x'P(Ax + B_1w + B_2w_p) - w_p'w_p + \frac{1}{\gamma^2}z_p'z_p \leq -c\|x\|^2 \quad (18)$$

Fig. 3 Regional sector bound on the dead-zone nonlinearity

が成立することである。この条件は、円板条件を用い（保守的であるが）つぎのように特徴づけられる。

[命題2] $H(s) := C(sI - A)^{-1}B + D$ と式 (4) で定義される φ のフィードバック結合を考える。与えられた $P > 0$ に対して

$$\text{He} \begin{bmatrix} PA & PB_1 & PB_2 & 0 \\ TRC_1 & -T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}I & 0 \\ C_2 & D_{21} & D_{22} & -\frac{\gamma^2}{2}I \end{bmatrix} < 0, \quad (19)$$

$$(\alpha^2 + \beta^2)C^i C^i \leq \rho_i^2 P, \quad \forall i = 1, \dots, m \quad (20)$$

を満たす対角行列 $0 \leq R < I$ と $T > 0$ が存在するならば、 $\mathcal{E}^P(\alpha^2)$ はレベル (β, γ) の L_2 性能保証領域である。ただし ρ_i は、 R の第 i 番目の対角要素 r_i を用いて $\rho_i := \sigma_i / (1 - r_i)$ により定義される。

(証明) 補題3から式(17)と式(20)の等価性が示される。また、式(19)の(4,4)ブロックについてSchur complementを行い、その条件式の左側からシステムの微分方程式の解 $[x' w' w_p']$ を、右側からその転置行列を掛ける。このとき、式(16)と対角行列のマルチプライア $T > 0$ の S -procedure^{16), 17)}により、式(19)が式(18)の十分条件になっていることが分かる。

命題2を用い $\mathcal{E}^P(\alpha^2)$ を最大化するには、行列 $P > 0$, $0 \leq R < I$ および $T > 0$ を変数として、制約条件(19), (20)のもとで $\text{tr}(P)$ などを最小化すればよい。残念ながらこの最適化問題は、式(19)における積項 TR のため可解集合が凸性を持たず、数値最適化の点から未解決問題であり研究の余地を残す。ただし、この問題は R を固定すれば他の変数に関して凸性を持つことになるので、飽和信号 z がスカラーの場合には内点法とラインサーチにより最適解を得ることができる。

補題1と同様に、命題1および命題2から求まる領域 $\mathcal{E}^P(\alpha^2 + \beta^2)$ の持つ性質として、 $\alpha = 0$ と $\beta = 0$ の二つの特別な場合を考えることができる。

また、文献⁶⁾の結果は $w_p = 0$, $\gamma \rightarrow \infty$ の場合、そして、文献⁷⁾の結果は $w_p = 0$ の場合に相当し、これらの結果は本論文の特別な場合として包含される。

2.3 解析条件の比較

命題2の条件式において $R = 0$, $T \rightarrow \infty$ とすると、命題1の条件式が得られる。つまり、命題2は命題1を特別な場

Fig. 4 $\text{tr}(P)$ v.s. ρ Fig. 5 State space regions attaining L_2 gain performance ($\rho = 1$ and 1.6470)

合として包含している。したがって、領域の大きさを測る指標に関わらず、前者から得られる最大の L_2 性能保証領域は、後者から得られる最大領域以上の大きさになることが保証される。

実際、命題2を用いることにより、命題1で与えられる最大 L_2 性能保証領域よりも大きな領域を得ることができる。以下では、数値例を用いてこれを示す。状態実現データ

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3.2629 & -1.0106 & 0.5077 & 1.1892 \\ -0.0592 & -0.4778 & 1.6924 & -0.0376 \\ 0.5913 & -0.6436 & 0 & 0 \\ -0.3744 & -1.1859 & -1.0559 & 0.3273 \end{bmatrix}$$

で与えられるシステム(5)を考える。飽和リミットを $\sigma = 1$, 初期状態に依存するパラメータを $\alpha = 0.7071$, L_2 外乱の上界を $\beta = 0.7071$, L_2 ゲイン性能レベルを $\gamma = 0.7071$ とする。このとき、 $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ である。パラメータ ρ の値を固定し、命題2の条件のもとで L_2 性能保証領域の大きさ $1/\text{tr}(P)$ を最大化することを繰り返すと、Fig.4のように $\text{tr}(P)$ と ρ の関係を得る。 $\rho = 1$ での $\text{tr}(P)$ の値は、命題1のLMI条件のもとで $\text{tr}(P)$ を最小化したときの解と一致する。Fig.4より、命題2により得られる最大領域 ($\text{tr}(P) = 3.23$) は、命題1によるもの ($\text{tr}(P) = 3.71$) より

も (行列のトレースの意味で) 大きいことがわかる. さらに, $\rho = 1$ (破線の小さな楕円内) と $\rho = 1.65$ (実線の小さな楕円内) の場合の $\mathcal{L}_2$ 性能保証領域 $\mathcal{E}^P(\alpha^2)$ を Fig.5 に示す. ここで, 大きな楕円は, 初期状態 $x(0) \in \mathcal{E}^P(\alpha^2)$ ($\mathcal{L}_2$ 性能保証領域内) と外乱 $w_p \in \mathcal{W}(\beta)$ に対し, すべての時間で状態軌跡がこの大きな楕円内に留まる領域 $\mathcal{E}^P(\alpha^2 + \beta^2)$ である. それぞれ, $\rho = 1$ の場合を破線で, $\rho = 1.65$ の場合を実線で示してある. また, 2本の平行線の間の領域は線形領域 $\mathcal{L}(\sigma)$ である. 明らかに, ρ を 1 より大きくすることで (円板条件を用いて) $\mathcal{L}_2$ 性能保証領域の大きさを増加させることが可能であることがわかる.

以上より, 線形解析 (命題 1) に比べ, 円板条件による非線形解析 (命題 2) は最大 $\mathcal{L}_2$ 性能保証領域をより正確に見積もることができると言える.

3. $\mathcal{L}_2$ 性能保証領域の設計

本節では, つぎの二つの設計問題を考える.

(I) 命題 1 の解析条件に基づいて, 動的出力フィードバックコントローラにより達成可能な $\mathcal{L}_2$ 性能保証領域を特徴づけよ.

(II) 命題 2 の解析条件に基づいて, アンチwindアップ機構を備えた動的出力フィードバックコントローラにより達成可能な $\mathcal{L}_2$ 性能保証領域を特徴づけよ.

まず, より具体的な問題設定を行い, それぞれに対する解を与える. さらに, 問題 (I) および (II) の解となる, 達成可能な $\mathcal{L}_2$ 性能保証領域の集合は厳密に等しいことを示す. すなわち, 飽和を有する制御による領域的 $\mathcal{L}_2$ 性能設計において, 円板条件は線形解析より優れた結果をもたらさないことを明らかにする.

3.1 問題設定

つぎの状態空間実現で与えられる LTI システムを考える.

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ z_p \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w_p \\ u \end{bmatrix} \quad (21)$$

ただし, $x(t) \in \mathbb{R}^{n_r}$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $y(t) \in \mathbb{R}^q$, $w_p(t) \in \mathbb{R}^k$ はそれぞれ状態変数, 制御入力, 観測出力, 外乱であり, $z_p(t) \in \mathbb{R}^l$ は $\mathcal{L}_2$ 性能を評価するための信号である. この制御対象に対して, 状態変数 $x_c(t) \in \mathbb{R}^{n_c}$ を持つ非線形動的出力フィードバックコントローラ $u = \mathcal{K}y$ を考え, 閉ループ系の状態変数を $x(t) := [x'(t) \ x_c'(t)]' \in \mathbb{R}^n$ ($n := n_p + n_c$) とする.

この閉ループ系に対して, コントローラの状態を零に初期化したときの $\mathcal{L}_2$ 性能保証領域を, 制限付 $\mathcal{L}_2$ 性能保証領域と呼ぶことにする. つまり, 与えられた正定行列 X とスカラー $\delta \geq 0$ に対し, つぎの集合

$$\mathcal{E}_\delta^X(\delta) := \left\{ \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n : x'Xx \leq \delta, x \in \mathbb{R}^{n_r} \right\} \quad (22)$$

を定義すると, より厳密には, 以下の二つの条件を満たす

初期状態ベクトル $x(0) := [x'(0) \ x_c'(0)]'$ の集合を制限付 $\mathcal{L}_2$ 性能保証領域と定義する. (i) $x_c(0) = 0$ かつ (ii) 任意の $w_p \in \mathcal{W}(\beta)$ を加えた場合, 任意の $x(0) \in \mathcal{E}_\delta^X(\alpha^2)$ に対し, $x(t)$ はすべての $t \geq 0$ で $\|x(t)\| \leq d$ を満たすスカラー $d > 0$ が存在し, かつ $\mathcal{L}_2$ 性能条件 $\|z_p\|_{\mathcal{L}_{2t}} \leq \gamma(\|w_p\|_{\mathcal{L}_{2t}} + \alpha)$ を満たす.

制限付 $\mathcal{L}_2$ 性能保証領域は, 明らかに $\mathcal{L}_2$ 性能保証領域の部分集合である. 特に, 与えられた正定行列 $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ に対し, 式 (10) の $\mathcal{E}^P(\alpha^2)$ が閉ループ系の $\mathcal{L}_2$ 性能保証領域ならば, $\mathcal{E}_\delta^X(\alpha^2)$ は制限付 $\mathcal{L}_2$ 性能保証領域である. ただし, $X \in \mathbb{R}^{n_r \times n_r}$ は P の左上ブロック行列である. 逆に, 与えられた行列 $X \in \mathbb{R}^{n_r \times n_r}$ に対し $\mathcal{E}^P(\alpha^2)$ が $\mathcal{L}_2$ 性能保証領域であり, かつ, あるブロック行列 $*$ に対して

$$P = \begin{bmatrix} X & * \\ * & * \end{bmatrix} \quad (23)$$

が成立する行列 $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ が存在するならば, 式 (22) の $\mathcal{E}_\delta^X(\alpha^2)$ は制限付 $\mathcal{L}_2$ 性能保証領域である.

つぎに, 問題 (I) および (II) におけるコントローラのクラスを明確に設定し, 各問題を具体的に記述する.

問題 (I) では, 飽和の制約条件を満たすコントローラ構造のうち最も単純なクラス, すなわち,

$$u = \phi(z), \quad z = K(s)y \quad (24)$$

の構造を持つ $\mathcal{K}$ を考える. ここで, ϕ は式 (1) で定義される飽和関数であり, $K(s)$ は伝達関数である. この場合, 既に述べたループ変換を行うと, 閉ループ系は不感帯関数 φ と $H := G \oplus K$ のフィードバック結合により記述される. ただし, $w = \varphi(z)$ とおくと $G(s)$ の状態空間実現は

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ z \\ z_p \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -B_2 & B_1 & B_2 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ C_1 & -D_{12} & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & 0 & D_{21} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \\ w_p \\ z \end{bmatrix} \quad (25)$$

である. このとき, 制限付 $\mathcal{L}_2$ 性能保証領域を特徴づける基礎として命題 1 を用いると, 問題 (I) はつぎのように記述できる.

問題 (I) 実対称行列 X と制御対象 (21) が与えられたとする. あるブロック行列 $*$ に対して式 (23) が成立し, かつ, 条件 (14), (15) を満たす $P > 0$ とコントローラ (24) が存在するための必要十分条件を求めよ. ただし, A, B, C, D は式 (25) を用いて得られる $G \oplus K$ の状態空間行列である.

問題 (I) の条件を満たす任意の X を用いて集合 $\mathcal{E}_\delta^X(\alpha^2)$ を式 (22) のように定義すると, それがコントローラ (24) で達成可能な制限付 $\mathcal{L}_2$ 性能保証領域となることは明らかである.

Fig. 6 Anti-windup control system

つぎに、問題 (II) を具体的に設定する。ここでは、コントローラ $\mathcal{K}$ が

$$u = \phi(z), \quad z = K(s) \begin{bmatrix} y \\ z - u \end{bmatrix} \quad (26)$$

のような構造 (Fig. 6 参照) を持つ場合について考える。飽和の度合を表す信号 $z - u$ をフィードバックするこの構造は、アンチwindアップ機構として良く知られたものである (例えば文献⁹⁾ 参照)。問題 (I) で考えるコントローラのクラス (24) は、ここで考えるクラス (26) の特別な場合として含まれる。つまり、(24) は、(26) において $K(s)$ の構造を $K(s) = [* \ 0]$ のように制約したものである。

この場合、閉ループ系は Fig. 6 で表され、不感帯関数 φ と $H := G \oplus K$ とのフィードバック結合とみなすことができる。ただし、 $w = \varphi(z)$ とおくと $G(s)$ の状態空間実現は

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ z \\ z_p \\ y \\ z - u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -B_2 & B_1 & B_2 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ C_1 & -D_{12} & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & 0 & D_{21} & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \\ w_p \\ z \end{bmatrix} \quad (27)$$

である。命題 2 の解析条件を使用するには、 w から z への直達項が零でなければならず、そのため、閉ループ系伝達関数 $[I_m \ 0]H(s)$ が厳密にプロパーでなければならない。この性質が一般化制御対象 (27) に対して成立するための必要十分条件は、 $K(s)$ の状態空間実現が

$$\begin{aligned} K(s) &= \left(\begin{array}{c|cc} A_c & B_{c1} & B_{c2} \\ \hline C_c & ND_{21}^\perp & 0 \end{array} \right) \\ &=: \left(\begin{array}{c|cc} A_c & B_{c1} & B_{c2} \\ \hline C_c & D_{c1} & 0 \end{array} \right) =: \left(\begin{array}{c|c} A_c & B_c \\ \hline C_c & D_c \end{array} \right) \end{aligned} \quad (28)$$

の形で与えられることである。 N は任意の行列であり、自由パラメータである。

以上より、問題 (II) を記述するとつぎのようになる。

問題 (II) 実対称行列 X と制御対象 (21) が与えられたとする。あるブロック行列 $*$ に対して式 (23) が成立し、かつ、ある対角行列 $0 \leq R < I$, $T > 0$ に対して条件 (19), (20) を満たす $\mathcal{P} > 0$ およびコントローラ (26) が存在する必要十分条件を求め

よ。ここで、 $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ は式 (27) を用いて得られる $G \oplus K$ の状態空間実現である。

問題 (II) では問題 (I) に比べ考慮するコントローラのクラスが広く、しかも保守性のより低い解析条件 (命題 2) を用いるので、問題 (II) で求まる制限付 $\mathcal{L}_2$ 性能保証領域 $\mathcal{E}_0^X(\alpha^2)$ は問題 (I) で得られる領域より厳密に大きいと期待される。しかしながら、以下の主結果が示すように、この期待は裏切られることになる。

3.2 主結果

まず、以下の二つの補題で問題 (I) および (II) に対する解を与える。

まず、問題 (I) の解は以下のとおりである。

[補題 4] 実対称行列 X 、各要素が正のベクトル $\sigma \in \mathbb{R}^m$ 、および制御対象 (21) が与えられているとする。また、式 (22) により集合 $\mathcal{E}_0^X(\alpha^2)$ を定義する。このとき、行列 X が問題 (I) の条件を満たすための必要十分条件は、

$$\text{He} \begin{bmatrix} XA + LC_2 & XB_1 + LD_{21} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}I & 0 \\ C_1 + D_{12}ND_{21}^\perp C_2 & D_{11} & -\frac{\gamma^2}{2}I \end{bmatrix} < 0, \quad (29)$$

$$\text{He} \begin{bmatrix} AY + B_2F & B_1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}I & 0 \\ C_1Y + D_{12}F & D_{11} & -\frac{\gamma^2}{2}I \end{bmatrix} < 0, \quad (30)$$

$$\begin{bmatrix} X & I & \lambda C_2' D_{21}^\perp N^{i'} \\ I & Y & \lambda F^{i'} \\ \lambda N^i D_{21}^\perp C_2 & \lambda F^i & \sigma_i^2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, m \quad (31)$$

を満たす対称行列 Y 、行列 F , L , N が存在することである。ただし、 F_i , N_i はそれぞれ行列 F , N の第 i 番目の行ベクトルであり、 λ は $\lambda := \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ のように定義される。また、この条件が成立するとき、レベル (β, γ) の制限付 $\mathcal{L}_2$ 性能保証領域 $\mathcal{E}_0^X(\alpha^2)$ を達成するコントローラ (24) が存在する。

(証明) 命題 1 の式 (14) に線形変数変換^{18), 19)} を適用し、変数消去の補題^{20), 21)} を用いることにより式 (29), (30) を得る。また同様に、命題 1 の式 (15) に線形変数変換を適用し、Schur complement を用いることにより式 (31) を得る。 ■

つぎの補題は問題 (II) の解を与える。

[補題 5] 実対称行列 X 、各要素が正のベクトル $\sigma \in \mathbb{R}^m$ 、および制御対象 (21) が与えられているとする。また、式 (22) により集合 $\mathcal{E}_0^X(\alpha^2)$ を定義する。このとき、行列 X が問題 (II) の条件を満たすための必要十分条件は、

$$\text{He} \begin{bmatrix} XA + EC_2 & XB_1 + ED_{21} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}I & 0 \\ C_1 + D_{12}ND_{21}^\perp C_2 & D_{11} & -\frac{\gamma^2}{2}I \end{bmatrix} < 0, \quad (32)$$

$$\text{He} \begin{bmatrix} AY + B_2 F & -B_2 S & B_1 & 0 \\ RF & -S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}I & 0 \\ C_1 Y + D_{12} F & -D_{12} S & D_{11} & -\frac{\gamma^2}{2}I \end{bmatrix} < 0, \quad (33)$$

$$\begin{bmatrix} X & I & \lambda C_2' D_{21}' N'' \\ I & Y & \lambda F'' \\ \lambda N'' D_{21}' C_2 & \lambda F'' & \rho_i^2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, m \quad (34)$$

を満たす対称行列 Y , 対角行列 $0 \leq R < I$, S , 行列 E , F , N が存在することである。ただし, F^i , N^i は, それぞれ, 行列 F , N の第 i 番目の行ベクトルであり, λ は $\lambda := \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ のように定義され, ρ_i は対角行列 R の第 i 番目の対角要素 r_i を用いて $\rho_i := \sigma_i / (1 - r_i)$ のように定義される。また, この条件が成立するとき, レベル (β, γ) の制限付 $\mathcal{L}_2$ 性能保証領域 $\mathcal{E}_0^X(\alpha^2)$ を達成するコントローラ (26) が存在する。

(証明) 命題 2 の式 (19) に線形変数変換と変数消去の補題を適用し, $S = T^{-1}$ を用いる合同変換より式 (32), (33) を得る。また同様に, 命題 2 の式 (20) に線形変数変換を適用し, Schur complement を用いることにより式 (34) を得る。■

補題 5 で特徴づけられる最大の達成可能な制限付 $\mathcal{L}_2$ 性能保証領域 $\mathcal{E}_0^X(\alpha^2)$ を求めるには, 行列 X , Y , E , F , N , S , $0 \leq R < I$ を変数とし, (32) – (34) を制約条件として $\text{tr}(X)$ の最小化を行えばよい。この最適化問題は, 式 (33) に現れる積項 RF のため, 凸計画問題とはならない。解析結果 (命題 2) のときと同様に, R を固定すれば他の変数に関して凸性を持つことになる。しかしながら, R をどの値に固定すれば最大の $\mathcal{E}_0^X(\alpha^2)$ が得られるのか定かでない。

以下に示す本論文の主結果は, 最適な R が零であることを証明する。すなわち, 命題 2 で飽和の非線形性を領域的セクター条件で押さえ込むために導入した領域 $\mathcal{L}(\rho)$ の設計における最適値は, 線形領域 $\mathcal{L}(\sigma)$ と一致するのである。したがって, 補題 5 で与えられる最大の達成可能な制限付 $\mathcal{L}_2$ 性能保証領域は, 補題 4 で与えられるものと同一である。この事実をまとめると以下ようになる。

《定理 1》 与えられた行列 X に対し, 補題 4 の条件と補題 5 の条件は等価である。結果として, 補題 5 で特徴づけられる達成可能なレベル (β, γ) の制限付 $\mathcal{L}_2$ 性能保証領域のクラスは, 補題 4 のそれと一致する。

(証明) まず X を固定し, 補題 4 の条件が成立すると仮定する。このとき, $R = 0$ および十分小さい $\varepsilon > 0$ を用いて $S = \varepsilon I$ に選ぶと, 補題 5 の条件が成立することが確認できる。

逆に, 補題 5 の条件が成立すると仮定する。条件 (33) から,

$$\text{He } T V T' = \text{He} \begin{bmatrix} AY + B_2 \mathcal{F} & B_1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}I & 0 \\ C_1 \mathcal{Y} + D_{12} \mathcal{F} & D_{11} & -\frac{\gamma^2}{2}I \end{bmatrix} < 0$$

$$V := \begin{bmatrix} AY + B_2 F & -B_2 S & B_1 & 0 \\ RF & -S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}I & 0 \\ C_1 Y + D_{12} F & -D_{12} S & D_{11} & -\frac{\gamma^2}{2}I \end{bmatrix}$$

$$T := \begin{bmatrix} I & -B_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & -D_{12} & 0 & I \end{bmatrix}$$

を得る。ここで, $\mathcal{Y} := Y$, $\mathcal{F} := (I - R)F$ である。さらに, $\text{diag}(I, I, 1 - r_i)$ を用いて式 (34) を合同変換すると,

$$\begin{bmatrix} X & I & \lambda C_2' D_{21}' N'' \\ I & \mathcal{Y} & \lambda \mathcal{F}'' \\ \lambda N'' D_{21}' C_2 & \lambda \mathcal{F}'' & \sigma_i^2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, m$$

となる。ただし, $\mathcal{F}_i$, $\mathcal{N}_i$ は, それぞれ, $\mathcal{F}$, $\mathcal{N} := (I - R)N$ の第 i 番目の行ベクトルである。よって, $\mathcal{L} := E$ を定義すると, 変数 $\mathcal{Y}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{N}$ に対して補題 4 の条件が成立する。■

以上より, 「飽和を有する制御において, 達成可能な制限付 $\mathcal{L}_2$ 性能保証領域の大きさを線形解析 (命題 1) に基づく結果以上に改善するため, 円板条件による解析 (命題 2) を用いることはコントローラが式 (26) の構造をもつ場合に有効でない」と結論される。

本論文では, $\mathcal{L}_2$ 性能保証領域の最大化問題に焦点を絞って円板条件の有効性を議論してきたが, 定理 1 は与えられたいかなる $X > 0$, $\beta \geq 0$, $\gamma > 0$ に対しても, 補題 4 の条件と補題 5 の条件が本質的に等価であることを明らかにしている。よって, 文献^{2), 5)} で考察されている除去可能な外乱最大化問題, $\mathcal{L}_2$ ゲイン最小化問題についても本論文と同様の結果, つまり, 線形解析に基づく設計結果以上の結果を得るため, 円板条件による解析を用いることはコントローラが式 (26) の構造をもつ場合に有効でないことになる。これは, 補題 5 の条件を満たす各変数が存在するならば必ず補題 4 の条件を満たす各変数が存在することを定理 1 が証明しているからである。

最後に, 本論文の枠組み内で最大の制限付 $\mathcal{L}_2$ 性能保証領域を達成するコントローラの設計方法を手短かに述べる。

設計方法:

1. LMI 条件を制約とする線形目的関数を最小化するつぎの問題を解く。

$$\text{minimize } \text{tr}(X) \text{ subject to } (29) - (31).$$

2. コントローラの伝達関数 $K(s)$ の状態空間行列 (28) を

つぎのように計算する.

$$\begin{bmatrix} A_c & B_{c1} \\ C_c & D_{c1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X - Y^{-1} & XB_2 \\ 0 & I \end{bmatrix}^{-1} \\ \times \begin{bmatrix} -XAY - (A + B_2ND_{21}^{\perp}C_2)' & L \\ F & ND_{21}^{\perp} \end{bmatrix} \\ \times \begin{bmatrix} -Y & 0 \\ C_2Y & I \end{bmatrix}^{-1}.$$

4. おわりに

飽和要素を持つ非線形系に対し, 初期状態と $\mathcal{L}_2$ 外乱を考慮した $\mathcal{L}_2$ 性能保証領域の解析・設計方法を提案した. 解析では, 線形解析から得られる $\mathcal{L}_2$ 性能保証領域の最大の推定領域に比べ, 円板条件はより大きな推定領域を与えることを数値例により示した. 対照的に, 式 (26) の構造をもつコントローラの設計では同様の事実が成立しない, つまり, 円板条件を用いても線形解析から得られる達成可能な制限付 $\mathcal{L}_2$ 性能保証領域よりも大きな領域を得ることが不可能であることを明らかにした.

なお, 本論文は経験的に認められているアンチワンドアップ機構の有用性自身を否定するものではない. 円板条件を用いる設計では, アンチワンドアップ機構が意味を成さないことを注意しておく.

謝辞: 有益な御意見を頂いた東京工業大学大学院の原辰次教授, また, 査読者の方に感謝いたします.

参考文献

- 1) C. Pittet, S. Tarbouriech and C. Burgat : Stability Regions for Linear Systems with Saturating Controls via Circle and Popov Criteria, *IEEE Conf. Decision Contr.*, 4518/4523 (1997)
- 2) H. Hindi and S. Boyd : Analysis of Linear Systems with Saturation Using Convex Optimization, *IEEE Conf. Decision Contr.*, 903/908 (1998)
- 3) C. Pittet, S. Tarbouriech and C. Burgat : Output Feedback Synthesis via the Circle Criterion for Linear Systems Subject to Saturating Inputs, *IEEE Conf. Decision Contr.*, 401/406 (1998)
- 4) T. Paré, H. Hindi, J. How and S. Boyd : Synthesizing Stability Regions for Systems with Saturating Actuators, *IEEE Conf. Decision Contr.*, 1981/1982 (1998)
- 5) T. Paré, H. Hindi, J. How and D. Banjerdpongchai : Local Control Design for Systems with Saturating Actuators Using the Popov Criteria, *Proceedings of the American Contr. Conf.*, 3211/3215 (1999)
- 6) T. Kiyama and T. Iwasaki : On the Use of Multi-Loop Circle Criterion for Saturating Control Synthesis, *Syst. Contr. Lett.*, 41-2, 105/114 (2000)
- 7) T. Kiyama and T. Iwasaki : Local $\mathcal{H}_2$ Analysis and Synthesis with Saturating Control: Does the Circle Criterion Help? *SICE Dynamical System Theory Symposium*, 9/12 (1999)
- 8) M. G. Safonov and M. Athans : A Multiloop Generalization of the Circle Criterion for Stability Margin Analysis.

IEEE Trans. Auto. Contr., 26-2, 415/422 (1981)

- 9) M. Kothare, P. Campo and M. Morari : A Unified Framework for the Study of Anti-Windup Designs, *Automatica*, 30-12, 1869/1883 (1994)
- 10) N. Kapoor, A. Teel and P. Daoutidis : An Anti-Windup Design for Linear Systems with Input Saturation, *Automatica*, 34-5, 559/574 (1998)
- 11) 渡辺, 内田, 示村, 藤田 : 制御入力制限を受ける制御系に対する Anti-Windup and Bumpless Transfer の新しい設計法, 計測自動制御学会論文集, 30-6, 660/668 (1994)
- 12) 渡辺, 松井, 内田 : 状態フィードバック H^∞ 制御理論を用いたアンチワンドアップコントローラの設計と実装, 電気学会論文誌 C 分冊, 117-3, 307/314 (1997)
- 13) 佐伯, 和田, 土屋 : 飽和時の応答を考慮したアンチワンドアップ制御器の設計, 計測自動制御学会論文集, 35-6, 754/761 (1999)
- 14) A. Saberi, Z. Lin and A. Teel : Control of Linear Systems with Saturating Actuators, *IEEE Trans. Auto. Contr.*, 41-3, 368/378 (1996)
- 15) P. Gahinet, A. Nemirovskii, A. J. Laub and M. Chilali : LMI Control Toolbox, *The MathWorks Inc.* (1994)
- 16) S. P. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron and V. Balakrishnan : *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM Studies in Applied Mathematics (1994)
- 17) V. A. Yakubovich : S-procedure in Nonlinear Control Theory, *Vestnik Leningrad Univ.*, 1, 62/77 (1971)
- 18) C. Scherer, P. Gahinet and M. Chilali : Multiobjective Output-Feedback Control via LMI Optimization, *IEEE Trans. Auto. Contr.*, 42-7, 896/911 (1997)
- 19) I. Masubuchi, A. Ohara and N. Suda : LMI-Based Controller Synthesis: a Unified Formulations and Solution, *Int. J. Robust and Nonlinear Contr.*, 8, 669/686 (1998)
- 20) P. Gahinet and P. Apkarian : A Linear Matrix Inequality Approach to $\mathcal{H}_\infty$ Control, *Int. J. Robust Nonlin. Contr.*, 4, 421/448 (1994)
- 21) T. Iwasaki and R. E. Skelton : All Controllers for the General H_∞ Control Problem: LMI Existence Conditions and State Space Formulas, *Automatica*, 30-8, 1307/1317 (1994)

[著者紹介]

木山 健 (学生会員)

1998年東京工業大学大学院理工学研究科博士後期課程進学(制御工学専攻). 在学中. ロバースト制御を中心に研究に従事.

岩崎 徹也 (正会員)

1993年Purdue大学航空宇宙工学科博士課程修了(Ph. D). 1995年東京工業大学大学院総合理工学研究科システム科学専攻助手, 講師, 1997年同大学工学部制御システム工学科助教授を経て, 2000年Virginia大学機械航空工学科 Assistant Professor となり現在に至る.