分布的・集中的柔軟性をもつ大型宇宙構造物の振動系の指数安定化†

松野 文俊*・大野 高史*

Exponential Stabilization of Vibration for a Large Space Structure with Distributed and Lumped Flexibility†

Fumitoshi MATSUNO* and Takashi OHNO*

In this paper, we discuss a simple controller for a large space structure with distributed and lumped flexibility based on a distributed parameter model. As a typical example of large space structures, we consider two flexible beams connected by a spring. The flexible beam and the spring can be regarded as an element of the structure with the distributed flexibility and a connective part with uncertain lumped flexibility, respectively. We propose a sensor output feedback controller for vibration absorption. Using the Energy Multiplier method, we prove the exponential stability of the closed-loop system. As we introduce voigt type damping, the open-loop system is exponential stable. If the damping coefficient is small, we prove that the exponential convergence rate for the closed-loop system, that means performance of controllers, is larger than that of the open-loop system. As we do not need an approximated finite-dimensional model at the controller design phase, the controller based on the original distributed parameter system is robust and simple.

Key Words: distributed parameter system, Energy Multiplier method, exponential stability, robustness

1. はじめに

近年、宇宙ステーションなどの大型柔軟宇宙構造物に関する研究が盛んになってきている^{1)~6)}。一般に、柔軟構造物は分布定数系として表現され、無限次元システムとなる。したがって、無限次元システムに対して、有限次元の制御器を設計することが必要となる。有限次元近似モデルに基づく従来の制御系設計^{2), 3), 7)}では、得られた制御器に対する閉ループ系の安定性は厳密に保証されていない。また、安定性が確保されたとしても、一般に制御器の次数が高くなってしまい、宇宙における計算機パワーが限られていることを考えると、簡単で実装の容易な制御器の構築が必要となる。

この観点から、有限次元化を必要としない、実装の容易な制御則として PDS 制御が提案されており、この制御則が閉ループ系を漸近安定化することが証明されている⁸⁾。PDS 制御は PD 制御に歪みのフィードバックを加えただけの簡便な制御則であり、様々な柔軟宇宙構造物に適用できるが、閉ループ系を指数安定化することはできないことがわかっている⁹⁾。また、1 リンクの柔軟アームの指数安定化制御器の設計についての報告^{10)~12)}がなされているが、より複雑な柔軟構造物への拡張可能性についてはわかっていない。したがっ

て、より一般的な柔軟構造物に対して、有限次元近似を必要とせず、閉ループ系の指数安定性を保証し、ロバストかつ実装容易な制御器を構築することが必要となる。

本論文では、分布的柔軟性と集中的柔軟性をもった柔軟宇宙構造物の基本的なシステムである、バネ結合された2本の柔軟ビーム⁸⁾の分布定数モデルに基づいた振動抑制制御について考える。ここでは、柔軟ビームに内部減衰を仮定するため、開ループ系は指数安定である。しかし、一般に減衰係数は小さく、振動の減衰は非常に遅い。したがって、システムの指数安定度を改善するような、ロバストで実装容易な制御系を構築する。まず、ビームの振動抑制のためにビームの根元における歪みの時間微分に対応する項をフィードバックする制御則を提案する。次に、その閉ループ系が指数安定となること、制御器がシステムの指数安定性を改善することを分布定数系として証明する。最後に、提案した制御則の実装が容易であることを述べる。

2. モデル

本論文では、柔軟宇宙構造物の最も基本的なシステムとして、Fig. 1 に示すようなバネ結合された2本の柔軟なビームについて考える。ビームは分布的柔軟性をもつ大型宇宙構造物の一要素としてみなせ、それらを結合しているバネは構造物の結合部の不確かさをもつ集中的柔軟性とみなせる。ビーム i のヤング率、断面二次モーメント、線密度、長さ、弾性変位、回転角度、先端の負荷質量をそれぞれ $E_i, I_i, \rho_i, L_i, w_i(t, r_i), \theta_i(t), m_i$,

† IEEE CDC99 で一部発表 (1999・12)

* 東京工業大学大学院総合理工学研究科 横浜市緑区長津田 4259

* Tokyo Institute of Technology, Midori, Yokohama

(Received September 5, 2000)

(Revised March 23, 2001)

Fig. 1 Two flexible beams connected by a spring

結合バネのバネ定数を k と定義する。また、時間に関する微分を $\dot{}$ で表わし、空間に関する微分を $'$ で表わすこととする。

本論文において、重力による影響を無視し、ビームのねじれ変形、バネの質量は無視する。また、ビームとバネの運動は $O-XY$ 平面のみと仮定する。さらにビームにはオイラーベールヌーイモデルを適用し、ビームの回転角 $\theta_i(t)$ は小さく、 $w_i(t, r_i) \ll r_i$ と仮定し、非線形項を無視する。voigt 型の内部粘性を考慮し、ハミルトンの原理を用いると、ビームの振動方程式

$$\ddot{w}_i(t, r_i) + \delta \frac{E_i I_i}{\rho_i} \dot{w}_i''''(t, r_i) + \frac{E_i I_i}{\rho_i} w_i''''(t, r_i) = -r_i u_i(t)$$

$$\begin{cases} w_i(t, 0) = 0, w_i'(t, 0) = 0, w_i''(t, L_i) = 0 \\ E_i I_i \left\{ \frac{m_i}{\rho_i} \dot{w}_i''''(t, L_i) + w_i''''(t, L_i) \right\} \\ - k \{ w_1(t, L_1) + w_2(t, L_2) \} \\ = k \{ L_1 \theta_1(t) + L_2 \theta_2(t) \} \end{cases}$$

を得る⁸⁾。ただし、ビームの回転角加速度をシステムの入力とみなし、

$$u_i(t) = \ddot{\theta}_i(t)$$

とおいている。ここで、 $\delta > 0$ はビームの内部減衰係数である。導出された分布定数モデルの境界条件は非同次であるので、新しい変数

$$v_i(t, r_i) = w_i(t, r_i) - (L_1 \theta_1(t) + L_2 \theta_2(t)) \times (-3L_i r_i^2 + r_i^3) c_i \quad (1)$$

を導入して同次化⁸⁾を行う。ただし、

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{k}{6E_1 I_1 + 2k(L_1^3 + L_2^2 \frac{E_1 I_1}{E_2 I_2})} \\ \frac{k}{6E_2 I_2 + 2k(L_1^2 \frac{E_2 I_2}{E_1 I_1} + L_2^3)} \end{bmatrix} \quad (2)$$

である。同次化された振動方程式は

$$\ddot{v}_i(t, r_i) + \delta \frac{E_i I_i}{\rho_i} \dot{v}_i''''(t, r_i) + \frac{E_i I_i}{\rho_i} v_i''''(t, r_i) = b_{i1}(r_i) u_1(t) + b_{i2}(r_i) u_2(t) \quad (3)$$

$$\begin{cases} v_i(t, 0) = 0, v_i'(t, 0) = 0, v_i''(t, L_i) = 0 \\ E_i I_i \left\{ \frac{m_i}{\rho_i} \dot{v}_i''''(t, L_i) + v_i''''(t, L_i) \right\} \\ - k \{ v_1(t, L_1) + v_2(t, L_2) \} = 0 \end{cases} \quad (4)$$

となる。ここで、

$$\begin{bmatrix} b_{11}(r_1) & b_{12}(r_1) \\ b_{21}(r_2) & b_{22}(r_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r_1 + c_1 L_1 (3L_1 r_1^2 - r_1^3) & c_1 L_2 (3L_1 r_1^2 - r_1^3) \\ c_2 L_1 (3L_2 r_2^2 - r_2^3) & -r_2 + c_2 L_2 (3L_2 r_2^2 - r_2^3) \end{bmatrix}$$

である。

3. 制御則と閉ループ系の解の存在

振動方程式 (3), (4) に対する振動抑制制御則として、ビームの根元における歪みの時間微分に対応する項 $\dot{v}_i''(t, 0)$ をフィードバックする入力 $u_i(t)$ を

$$u_1(t) = \frac{k_s}{L_1} \left\{ \frac{E_1 I_1}{L_1} \dot{v}_1''(t, 0) - \frac{E_2 I_2}{L_2} \dot{v}_2''(t, 0) \right\} \quad (5)$$

$$u_2(t) = -\frac{k_s}{L_2} \left\{ \frac{E_1 I_1}{L_1} \dot{v}_1''(t, 0) - \frac{E_2 I_2}{L_2} \dot{v}_2''(t, 0) \right\} \quad (6)$$

と設定する。ここで、 $k_s > 0$ とする。(3), (4) 式に (5), (6) 式を適用すると、閉ループ系は

$$\ddot{v} + B\dot{v} + Av = 0 \quad (7)$$

と書ける。ここで、 $v = [v_1(t, r_1), v_2(t, r_2)]^T$ であり、作用素 A, B は、

$$A \begin{bmatrix} v_1(r_1) \\ v_2(r_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_1 I_1}{\rho_1} v_1''''(r_1) \\ \frac{E_2 I_2}{\rho_2} v_2''''(r_2) \end{bmatrix}, \quad B = \delta A + k_s \bar{B},$$

$$\bar{B} \begin{bmatrix} v_1(r_1) \\ v_2(r_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{r_1}{L_1} \left\{ \frac{E_1 I_1}{L_1} v_1''(0) - \frac{E_2 I_2}{L_2} v_2''(0) \right\} \\ \frac{r_2}{L_2} \left\{ -\frac{E_1 I_1}{L_1} v_1''(0) + \frac{E_2 I_2}{L_2} v_2''(0) \right\} \end{bmatrix}$$

と定義され、その定義域を

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(A) &= \mathcal{D}(B) = \mathcal{D}(\bar{B}) \\ &= \{v = (v_1, v_2)^T \in \mathcal{H}^4([0, L_1]) \times \mathcal{H}^4([0, L_2]) \mid \\ &\quad v_i(0) = v_i'(0) = v_i''(L_i) = 0, \\ &\quad -m_i \frac{E_i I_i}{\rho_i} \dot{v}_i''''(L_i) - E_i I_i \dot{v}_i''''(L_i) \\ &\quad + k \{ v_1(L_1) + v_2(L_2) \} = 0 \} \end{aligned}$$

とする。また、内積を

$$\left\langle \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{bmatrix} \right\rangle = \sum_{i=1}^2 \rho_i \int_0^{L_i} v_{i1}(r_i) v_{i2}(r_i) dr_i + m_i v_{i1}(L_i) v_{i2}(L_i) \quad (8)$$

と定義すると、作用素 A は自己共役・正定であり、 A^{-1} が存在し、コンパクトであることを簡単に示すことができる⁸⁾。

分布定数系において、半群が存在し、唯一であれば、解が存在し、唯一であることが知られている¹³⁾。したがって、ここでは半群の存在を示すことにより、(7) 式の解の存在を証明する。作用素 B が A -dependent 作用素であれば、発展方程式 (7) の半群が存在し、唯一であることが証明されている¹³⁾。

ただし, B が A -dependent であるとは, 以下の3つの条件が成立することである¹³⁾.

1. $\|Bu\| \leq a\|u\| + b\|Au\|$ (A -bounded)
2. $\langle Bu, Av \rangle = \langle Bv, Au \rangle$ (A -symmetric)
3. $\langle Bu, Au \rangle \geq 0$ (A -positive semidefinite)

作用素 B が条件 1-3 を満足することを示すことにより, 次の補題 1 を得る.

[補題 1] 閉ループ系の発展方程式 (7) の解が存在し, 唯一である.

(証明) 付録 A

4. 閉ループ系の指数安定性

発展方程式の解が指数安定であることと, その解が L^n -安定であることは等価であることが知られている¹³⁾. ここでは, Energy Multiplier 法^{14), 15)}を用いて, 閉ループ系である微分方程式 (7) の解が L^4 -安定であることを示し, システムの指数安定性を証明をする.

まず, 微分方程式 (7) の作用素について考える. ここで $\mathcal{D}(\bar{B}) = \mathcal{D}(B) = \mathcal{D}(A)$ が成立するとき, A -dependent 作用素である $\bar{B}$ は, 作用素 A と有界・対称・半正定作用素である Q を用いて以下のように書けることがわかっている¹²⁾.

$$\bar{B} = QA$$

ここで, $R = \delta I + k_s Q$ とすると, 発展方程式 (7) は, 以下のように書くことができる.

$$\ddot{v} + RA\dot{v} + Av = 0 \quad (9)$$

また, $\delta > 0, Q \geq 0$ の定義から, R は有界・対称・正定作用素であることが容易に確かめられる.

ここで, 発展方程式 (9) を, 以下のような 1 階の発展方程式に書き換える.

$$\begin{bmatrix} \dot{v} \\ \ddot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -A & -RA \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \dot{v} \end{bmatrix} \quad (10)$$

この発展方程式 (10) の解の指数安定性を示すことができ, 以下の定理 1 を得る.

《定理 1》 閉ループ系の発展方程式 (10) の解は指数安定である.

(証明) 内積を以下のように定義する.

$$\left\langle \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \right\rangle_E = \langle Ax_1, Ay_1 \rangle + \langle Ax_2, y_2 \rangle \quad (11)$$

ここで, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は (8) 式で定義されるものである. A の自己共役性を考慮すると, (11) 式は内積の定義を満足していることが確認できる.

次に, 以下のようなエネルギー関数を定義する.

$$E(t) = \frac{1}{2} \left\| \begin{bmatrix} v \\ \dot{v} \end{bmatrix} \right\|_E^2 = \frac{1}{2} \langle Av, Av \rangle + \frac{1}{2} \langle A\dot{v}, \dot{v} \rangle \quad (12)$$

(12) 式を時間微分し, 作用素 A が自己共役であり, R が正定であることを用いると,

$$\dot{E}(t) = \langle A\dot{v}, Av \rangle + \langle A\ddot{v}, \dot{v} \rangle = -\langle A\dot{v}, RA\dot{v} \rangle \leq 0$$

となる. したがって, このエネルギー関数は消散関数であることがわかる.

また, エネルギー関数 $E(t)$ を用いて

$$V(t) = 2t(1-\epsilon)E(t) + \langle \dot{v}, Av \rangle \quad (13)$$

という関数を定義する. ここで, ϵ は $1-\epsilon > 0$ を満足するような定数である. (13) 式を時間微分し, 作用素 A^{-1} がコンパクトであること, 作用素 R が有界 ($\exists C$ s.t. $\|Rv\| \leq C\|v\|$) であることを用いると,

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= 2(1-\epsilon)\dot{E}(t) + 2t(1-\epsilon)\dot{E}(t) + \langle \ddot{v}, Av \rangle + \langle \dot{v}, A\dot{v} \rangle \\ &= (2-\epsilon)\langle A\dot{v}, \dot{v} \rangle - \epsilon\|Av\|^2 \\ &\quad - 2t(1-\epsilon)\langle A\ddot{v}, RA\dot{v} \rangle - \langle RA\dot{v}, Av \rangle \\ &\leq (2-\epsilon)\|A^{-1}\|\|A\dot{v}\|^2 - \epsilon\|Av\|^2 \\ &\quad - 2t(1-\epsilon)\langle A\ddot{v}, RA\dot{v} \rangle - \langle RA\dot{v}, Av \rangle \\ &\leq (2-\epsilon)\|A^{-1}\|\|A\dot{v}\|^2 - \epsilon\|Av\|^2 \\ &\quad - 2t(1-\epsilon)\lambda_{\min}(R)\|A\dot{v}\|^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}C\alpha_1^2\|A\dot{v}\|^2 + \frac{1}{2}\frac{C}{\alpha_1^2}\|Av\|^2 \\ &= \|A\dot{v}\|^2 \left\{ (2-\epsilon)\|A^{-1}\| \right. \\ &\quad \left. - 2t(1-\epsilon)\lambda_{\min}(R) + \frac{C\alpha_1^2}{2} \right\} \\ &\quad + \|Av\|^2 \left(-\epsilon + \frac{C}{2\alpha_1^2} \right) \end{aligned}$$

となる. ここで, $\lambda_{\min}(\cdot)$ は作用素の最小固有値であり, α_1 は相加相乗の関係を用いたときに任意に設定できる正の定数である. したがって, $-\epsilon + C/2\alpha_1^2 < 0$ となるような α_1 をとり,

$$(2-\epsilon)\|A^{-1}\| - 2t(1-\epsilon)\lambda_{\min}(R) + \frac{C\alpha_1^2}{2} < 0 \quad (14)$$

となるような t について考える. つまり,

$$t > \frac{(2-\epsilon)\|A^{-1}\| + \frac{C\alpha_1^2}{2}}{2(1-\epsilon)\lambda_{\min}(R)} \stackrel{\text{def}}{=} T_1$$

とすると, $\forall t > T_1$ のときに関数 $V(t)$ は, 消散関数である.

関数 $V(t)$ の定義式 (13) の右辺第 2 項 $\langle \dot{v}, Av \rangle$ に相加相乗の関係を用いると,

$$\begin{aligned} |\langle \dot{v}, Av \rangle| &\leq \|\dot{v}\|\|Av\| \leq \frac{1}{2}(\alpha_2^2\|Av\|^2 + \frac{1}{\alpha_2^2}\|\dot{v}\|^2) \\ &\leq \frac{C'}{2}(\|Av\|^2 + \langle A\dot{v}, \dot{v} \rangle) = C'E(t) \end{aligned}$$

となるような定数 C' が存在し,

$$-C'E(t) \leq \langle \dot{v}, Av \rangle \leq C'E(t)$$

となることがわかる. ここで, α_2 は任意の正の定数である. よって, 関数 $V(t)$ は,

$$E(t)\{2t(1-\epsilon) - C'\} \leq V(t) \leq E(t)\{2t(1-\epsilon) + C'\}$$

と評価できる. ここで, $2t(1-\epsilon) - C' > 0$ となるような任意の t について, つまり,

$$\forall t > \frac{C'}{2(1-\epsilon)} \stackrel{\text{def}}{=} T_2$$

について、関数 $V(t)$ は正であることがいえる。

さて、 $T = \max\{T_1, T_2\}$ としたとき、 $\forall t > T$ に対して、 $V(t) > 0$ であり、 $\dot{V}(t) < 0$ である。したがって、 $\forall t > T$ について

$$\begin{aligned} E(t) &\leq \frac{V(t)}{2t(1-\epsilon) - C'} \leq \frac{V(T)}{2t(1-\epsilon) - C'} \\ &\leq \frac{E(T)\{2T(1-\epsilon) + C'\}}{2t(1-\epsilon) - C'} \\ &\leq \frac{E(0)\{2T(1-\epsilon) + C'\}}{2t(1-\epsilon) - C'} \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$E(t) = \frac{1}{2} \left\| \begin{bmatrix} v \\ \dot{v} \end{bmatrix} \right\|_E^2 = \frac{1}{2} \|S(t) \begin{bmatrix} v_0 \\ \dot{v}_0 \end{bmatrix}\|_E^2$$

であるので、

$$\begin{aligned} \int_T^\infty E^2(t) dt &= \int_T^\infty \frac{1}{4} \|S(t) \begin{bmatrix} v_0 \\ \dot{v}_0 \end{bmatrix}\|_E^4 dt \\ &\leq E^2(0) \{2T(1-\epsilon) + C'\}^2 \int_T^\infty \left\{ \frac{1}{2t(1-\epsilon) - C'} \right\}^2 dt \\ &< \infty \end{aligned}$$

となる。したがって、(7) 式の解が L^4 -安定であることが証明され、 $\forall t > T$ について、 $v, \dot{v}$ が指数安定であることが結論できる。よって、

$$\begin{aligned} \left\| \begin{bmatrix} v \\ \dot{v} \end{bmatrix} \right\|_E &\leq M e^{-\alpha(t-T)} \left\| \begin{bmatrix} v_0 \\ \dot{v}_0 \end{bmatrix} \right\|_E \\ &= \hat{M} e^{-\alpha t} \left\| \begin{bmatrix} v_0 \\ \dot{v}_0 \end{bmatrix} \right\|_E \end{aligned} \quad (15)$$

となり、 $\forall t > 0$ について $v_1(t, r_1), v_2(t, r_2)$ が指数安定となることが示され、閉ループ系の指数安定性が証明された。■

5. 制御性能

振動方程式 (3), (4) は、もともと自然ダンピングを含むシステムであり、制御を行わなくても、指数安定性は保証されている。ここでは、(3), (4) 式に対して、制御則 (5), (6) を用いて、閉ループ系を構築したときに、閉ループ系がもとの開ループ系より、安定性がよくなるための条件を、極の分布を考察することにより導出する。

2 階の発展方程式

$$\ddot{v} + \mathcal{F}A\dot{v} + Av = 0$$

を考える。ここで、 $\mathcal{F}$ は有界作用素である。この発展方程式を以下のような 1 階の発展方程式に書き換える。

$$\begin{bmatrix} \dot{v} \\ \ddot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -A & -\mathcal{F}A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \dot{v} \end{bmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} T \begin{bmatrix} v \\ \dot{v} \end{bmatrix} \quad (16)$$

作用素 T の固有値を λ とする。このとき以下の補題 2 が成立している¹²⁾。

[補題 2] 以下の 2 つの条件は等価である。

条件 1 $\lambda \in \sigma(T)$

条件 2 $\exists \phi \in \mathcal{D}(A), \phi \neq 0$

$$\text{s.t. } \lambda^2 \phi + \lambda \mathcal{F}A\phi + A\phi = 0$$

ここで、 $\sigma(T)$ は、作用素 T の固有値の集合である。

5.1 開ループの極の分布

まず、制御を行わない場合の (3), (4) 式で表された開ループ系の極の分布について考えてみる。補題 2 において $\mathcal{F} = \delta I$ とすれば、 T の固有値 λ は、

$$\lambda^2 \phi + \lambda \delta A\phi + A\phi = 0 \quad (17)$$

の関係式を満足している。 $\forall \phi \in \mathcal{D}(A)$ に対して (17) 式を考え、 λ の分布を調べれば作用素 T の固有値の分布を調べるのには十分である。 $\lambda = a + jb$ とすると、

● $b = 0$ のとき

$$a \rightarrow -\frac{1}{\delta}, \quad a \rightarrow -\infty \quad (18)$$

● $b \neq 0$ のとき

$$\left| \lambda + \frac{1}{\delta} \right|^2 = \frac{1}{\delta^2} \quad (19)$$

となる (付録 B 参照)。したがって、Fig. 2 の外円周上と実軸上に開ループ極 (一部を ● で表わした) が分布している。

Fig. 2 Pole distribution for open-loop (●) and closed-loop (○) systems

5.2 閉ループの極の分布

次に、閉ループ系の極の分布について考える。この場合、 $\mathcal{F} = \mathcal{R} = \delta I + k_s Q$ であるので、5.1 節と同様に、対応する方程式の解を $\lambda = \hat{a} + j\hat{b}$ とすると、

● $\hat{b} = 0$ のとき

$$\hat{a} \rightarrow -\frac{1}{\lambda_{\min}(\mathcal{R})}, \quad \hat{a} \rightarrow -\infty \quad (20)$$

● $\hat{b} \neq 0$ のとき

$$\left| \lambda + \frac{1}{\lambda_{\min}(\mathcal{R})} \right|^2 \leq \frac{1}{\lambda_{\min}^2(\mathcal{R})} \quad (21)$$

となる (付録 B 参照)。したがって、Fig. 2 の内円周上および内部と実軸上に極 (等号が成り立つ場合の極の一部を ○ で表わした) が分布していることがわかる。開ループ系・閉ループ系とも実数極と複素極をもつので、極の変化のパターンは 4 通りになる。

ここで、開ループ系の複素極の実部は、

$$a = -\frac{\langle \delta A\phi, A\phi \rangle}{2\langle A\phi, \phi \rangle} \quad (22)$$

となり、閉ループ系の複素極の実部は、

$$\hat{a} = -\frac{\langle \mathcal{R}A\phi, A\phi \rangle}{2\langle A\phi, \phi \rangle} = a - \frac{k_s \langle Q A\phi, A\phi \rangle}{2\langle A\phi, \phi \rangle} \quad (23)$$

となる。作用素 Q は正定であるので、閉ループ系の複素極のうち対応する閉ループ極も複素極になる場合は、(23) 式の関係より、複素平面において閉ループ極のほうが開ループ極より左に分布することがわかり、安定度が増していることが結論できる。

しかし、閉ループ系の複素極に対応する閉ループ極が実数極の場合と開ループ系の極が実数の場合には、対応する閉ループ極のほうがより安定であることを結論することはできない。したがって、制御則によってシステムの安定度が改善されるためには、Fig. 2 の斜線の範囲に、もともとの開ループ系が複素極を持たなければならない。その十分条件は、以下の不等式として表現される。

$$-\frac{1}{\lambda_{\min}(\mathcal{R})} = -\frac{1}{\delta + k_s \lambda_{\min}(Q)} < \max\{a\} \quad (24)$$

(22) 式を用い、不等式 (24) を δ に関して解くと、

$$0 < \delta < \sqrt{\frac{k_s^2 \lambda_{\min}^2(Q)}{4} + \frac{2}{\lambda_{\min}(A)}} - \frac{k_s \lambda_{\min}(Q)}{2} \quad (25)$$

となる (付録 C 参照)。したがって、自然ダンピングの減衰係数が (25) 式を満足していれば、制御によってシステムの指数安定度が改善されることがわかる。一般的に δ は十分小さく (通常は $10^{-4} \sim 10^{-5}$ オーダーである)、 $\lambda_{\min}(A)$ は小さいので、(25) 式は強い条件ではないと考えられる。

ここまでで得られた結果をまとめると以下の定理 2 を得る。
《定理 2》 振動方程式 (3), (4) における内部減衰係数 δ が (25) 式を満足するならば、提案制御則 (5), (6) によって、システムの指数安定度が改善される。

ここで、(20), (21) 式から、フードバックゲイン k_s を大きくするにつれ、 $\lambda_{\min}(\mathcal{R})$ が大きくなることがわかり、閉ループ極の分布を表わす円は小さくなり、また実軸の極の $-\infty$ でない集積点は、より虚軸に近づくことがわかる。したがって、フィードバックゲインを大きくすると、複素数極に対する振動は周波数が小さくなるものの減衰は速くなり振動は抑制されると考えられ、一部の実数極に対する速応性は悪くなり、両者の間にトレードオフがあると考えられる。

6. 制御則の実装

この章では、3 章で提案した制御則 (5), (6) の実装について考える。モータのドライバとして速度指令型を用いると、モータ i の速度指令電圧 $V_{refi}(t)$ は、モータの角速度 $\dot{\theta}_i(t)$ と等価であるとみなせ、以下の関係が成立している¹⁶⁾。

$$V_{refi}(t) = \dot{\theta}_i(t) = \int_0^t u_i(\tau) d\tau + \dot{\theta}_i(0) \quad (26)$$

したがって、 $\dot{\theta}_i(0) = 0$ とすれば、制御則 (5), (6) は (26) 式から、以下のように書ける。

$$V_{ref1}(t) = k_s \left(-\frac{E_1 I_1}{L_1} v_1''(t, 0) - \frac{E_2 I_2}{L_2} v_2''(t, 0) \right)$$

$$V_{ref2}(t) = k_s \left(-\frac{E_1 I_1}{L_1} v_1''(t, 0) + \frac{E_2 I_2}{L_2} v_2''(t, 0) \right)$$

ここで、変数変換の定義 (1) から、

$$v_i''(t, 0) = w_i''(t, 0) + 6c_i L_i (L_1 \theta_1(t) + L_2 \theta_2(t))$$

であり、定数 c_i の定義 (2) から、

$$c_1 E_1 I_1 = c_2 E_2 I_2$$

が成立していることがわかるので、実際の制御則は以下のようになる。

$$V_{ref1}(t) = k_s \left(\frac{E_1 I_1}{L_1} w_1''(t, 0) - \frac{E_2 I_2}{L_2} w_2''(t, 0) \right) \quad (27)$$

$$V_{ref2}(t) = k_s \left(-\frac{E_1 I_1}{L_1} w_1''(t, 0) + \frac{E_2 I_2}{L_2} w_2''(t, 0) \right) \quad (28)$$

ここで、 $w_i''(t, 0)$ はビームの根元にはりつけた歪みゲージにより測定できる。3 章で提案した制御則 (5), (6) は、歪みの時間微分に対応する項 $\dot{v}_i''(t, 0)$ を必要とするが、速度指令型のモータドライバを用いれば、制御則は (27), (28) のようにセンサ出力の直接フィードバックとなり、容易に実装できることがわかる。また、提案制御則は不確実な結合部のバネ定数を必要としないので、ロバストである。

7. おわりに

本論文では、分布的柔軟性と集中的柔軟性をもつ柔軟宇宙構造物の基本的なモデルとして、バネ結合した 2 本の柔軟なビームについて考えた。ビームの振動に対して、閉ループ系の指数安定度を改善するような実装容易な制御系を構築した。まず、閉ループ系の微分方程式の解が存在し、一意であることを示し、Energy Multiplier 法を用いて、その解が指数安定となることを証明した。次に、システムの極の分布について考察することで、提案した制御則により閉ループ系の指数安定度を改善できることを示した。

提案した制御則は、無限次元モデルを有限次元近似することなく、また、不確実な物理パラメータに依存することなく構築できる。したがって、閉ループ系のスピルオーバー現象はなく、制御則は物理定数の不確実さに対してもロバストである。また、速度指令型のモータを使用すれば制御則の実装は容易である。したがって、実装が容易でロバストなセンサ出力の直接フィードバック則を導出することができた。

ビームの角度の位置決めと振動抑制を達成するハイブリッド制御系設計と実験による提案制御則の有効性の検証については稿を改めて報告する。

今後の課題としては、ビームの自然ダンピングを考慮しないシステムに対して、閉ループ系の指数安定性を保証する制御系の設計、曲げ・ねじり結合振動が問題となる構造物や n 個の構成要素が直列にバネ結合された構造物などのモデリングと制御が挙げられる。なお、本研究は文部科学省科学研究費 (東工大 COE 形成基礎研究費スーパーメカノシステム、基盤研究 (c) 11650243) を使用して行なわれました。

最後に、ご討論いただきました羅 正華先生に感謝致します。

参 考 文 献

- 1) 特集号 宇宙構造物の力学と制御, システム/制御/情報, **39**-3, 101/148 (1995)
- 2) 狼, 木田, 山口: LSS のダイナミクス, モデリングおよび低次元化, 計測と制御, **26**-10, 845/854 (1987)
- 3) 松野, 池田: 宇宙構造物のための制御理論-集中定数アプローチ, システム/制御/情報, **39**-3, 124/129 (1995)
- 4) 藤井, 大塚: 宇宙構造物のための制御理論-分布定数系アプローチ, システム/制御/情報, **39**-3, 130/135 (1995)
- 5) 松野: 柔軟構造物の制御, 計測と制御, **35**-12, 953/954 (1996)
- 6) H. Fujii, T. Ohtsuka and S. Udou: Mission Function Control for a Slew Maneuver Experiment, J. of Guidance, Control and Dynamics, **14**-5, 986/992 (1991)
- 7) F. Matsuno and M. Tanaka: Modeling and Robust Control of Two Flexible Beams Connected by a Spring, Proc. the 35th IEEE CDC, 4216/4221 (1996)
- 8) 松野, 大野, 田中: 集中的および分布的柔軟性をもった大型宇宙構造物の分布定数制御, 計測自動制御学会論文集, **34**-12, 1889/1896 (1998)
- 9) 羅: 高階微分方程式を用いた Euler-Bernoulli ビーム方程式のフィードバック安定化について, システム/制御/情報, **41**-9, 343/350 (1997)
- 10) Z.H. Luo: Direct Strain Feedback Control of Flexible Robot Arms: New Theoretical and Experimental Results, IEEE Trans. Auto. Cont., **38**-11, 1610/1622 (1993)
- 11) Z.H. Luo and B. Guo: Further Theoretical Results on Direct Strain Feedback Control of Flexible Robots Arms, IEEE Trnas. Auto. Cont., **40**-4, 747/751 (1995)
- 12) B. Guo and Y. Luo: Semigroup Approach to the Stability of a Direct Strain Feedback Control System of Elastic Vibration with Strucure Damping, Appl. Math. Lett., **7**-1, 95/100 (1994)
- 13) 羅: 二階発展方程式の半群生成性と指数安定性—最近の進展, 計測と制御, **33**-6, 479/486 (1994)
- 14) G. Chen, M.C. Delfour, A.M. Krall and G. Payre: Modeling, Stabilization and Control of Serially Connected Beams, SIAM J. Cont. and Optim., **25**-3, 526/546 (1987)
- 15) O. Morgule: Dynamic Boundary Control of a Euler-Bernoulli Beam, IEEE Trans. Auto. Cont., **37**-5, 639/642 (1992)
- 16) Y. Sakawa and F. Matsuno: Modeling and Control of a Flexible Manipulator with Parallel Drive Mechanism, Int. J. Control, **44**-2, 299/313 (1985)

《付 録》

A. 補題 1 の証明

この付録では, 補題 1 の証明について述べる. 作用素 $\delta\mathcal{A}$ が $\mathcal{A}$ -dependent 作用素であることは明らかであり, $\mathcal{A}$ -dependent 作用素は和について閉じている. したがって, 作用素 $\mathcal{B}$ の $\mathcal{A}$ -dependent 性を証明するには, 作用素 $\bar{\mathcal{B}}$ が $\mathcal{A}$ -dependent 作用素であることを示せばよい.

(証明) 1. $\mathcal{A}$ -bounded

振動方程式 (3) における $b_{ij}(r_i)$ と作用素 $\mathcal{A}$ について

$$v_i''(0) = -\frac{1}{E_i I_i} \left\langle \begin{bmatrix} b_{1i} \\ b_{2i} \end{bmatrix}, \mathcal{A} \begin{bmatrix} v_1(r_1) \\ v_2(r_2) \end{bmatrix} \right\rangle$$

の関係が成立していることが容易に確かめられる. この関係を用いると,

$$\|\bar{\mathcal{B}} \begin{bmatrix} v_1(r_1) \\ v_2(r_2) \end{bmatrix}\|^2$$

$$\begin{aligned} &= \rho_1 \int_0^{L_1} \frac{r_1^2}{L_1^2} \left\{ \frac{E_1 I_1}{L_1} v_1''(0) - \frac{E_2 I_2}{L_2} v_2''(0) \right\}^2 dr_1 \\ &\quad + m_1 \left\{ \frac{E_1 I_1}{L_1} v_1''(0) - \frac{E_2 I_2}{L_2} v_2''(0) \right\}^2 \\ &\quad + \rho_2 \int_0^{L_2} \frac{r_2^2}{L_2^2} \left\{ -\frac{E_1 I_1}{L_1} v_1''(0) + \frac{E_2 I_2}{L_2} v_2''(0) \right\}^2 dr_2 \\ &\quad + m_2 \left\{ -\frac{E_1 I_1}{L_1} v_1''(0) + \frac{E_2 I_2}{L_2} v_2''(0) \right\}^2 \\ &= \left(\frac{1}{3} \rho_1 L_1 + m_1 + \frac{1}{3} \rho_2 L_2 + m_2 \right) \\ &\quad \left\{ \frac{E_1 I_1}{L_1} v_1''(0) - \frac{E_2 I_2}{L_2} v_2''(0) \right\}^2 \\ &= \kappa \left\{ \frac{E_1 I_1}{L_1} v_1''(0) - \frac{E_2 I_2}{L_2} v_2''(0) \right\}^2 \\ &\leq \kappa \left\{ \left(\frac{1}{L_1} \right)^2 \left\| \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix} \right\|^2 \left\| \mathcal{A} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2 \frac{1}{L_1 L_2} \left| \left\langle \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix}, \mathcal{A} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\rangle \right| \left| \left\langle \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{bmatrix}, \mathcal{A} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\rangle \right| \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(\frac{1}{L_2} \right)^2 \left\| \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{bmatrix} \right\|^2 \left\| \mathcal{A} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\|^2 \right\} \right\} \\ &\leq \bar{\kappa} \left\| \mathcal{A} \begin{bmatrix} v_1(r_1) \\ v_2(r_2) \end{bmatrix} \right\|^2 \end{aligned}$$

となり, 作用素 $\bar{\mathcal{B}}$ が, $\mathcal{A}$ -bounded であることが示された.

2. $\mathcal{A}$ -symmetric

作用素の定義から,

$$\begin{aligned} &\left\langle \bar{\mathcal{B}} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, \mathcal{A} \begin{bmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \end{bmatrix} \right\rangle \\ &= \frac{E_1 I_1}{L_1} \left\{ \frac{E_1 I_1}{L_1} v_1''(0) - \frac{E_2 I_2}{L_2} v_2''(0) \right\} \int_0^{L_1} r_1 \bar{v}_1''''(r_1) dr_1 \\ &\quad + m_1 \frac{E_1 I_1}{\rho_1} \bar{v}_1''''(L_1) \left\{ \frac{E_1 I_1}{L_1} v_1''(0) - \frac{E_2 I_2}{L_2} v_2''(0) \right\} \\ &\quad - \frac{E_2 I_2}{L_2} \left\{ \frac{E_1 I_1}{L_1} v_1''(0) - \frac{E_2 I_2}{L_2} v_2''(0) \right\} \int_0^{L_2} r_2 \bar{v}_2''''(r_2) dr_2 \\ &\quad - m_2 \frac{E_2 I_2}{\rho_2} \bar{v}_2''''(L_2) \left\{ \frac{E_1 I_1}{L_1} v_1''(0) - \frac{E_2 I_2}{L_2} v_2''(0) \right\} \\ &= \left\{ \frac{E_1 I_1}{L_1} v_1''(0) - \frac{E_2 I_2}{L_2} v_2''(0) \right\} \left\{ \frac{E_1 I_1}{L_1} \bar{v}_1''(0) - \frac{E_2 I_2}{L_2} \bar{v}_2''(0) \right\} \\ &= \left\langle \bar{\mathcal{B}} \begin{bmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \end{bmatrix}, \mathcal{A} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\rangle \end{aligned}$$

となり, 作用素 $\bar{\mathcal{B}}$ が $\mathcal{A}$ -symmetric であることが示された.

3. $\mathcal{A}$ -positive semidefinite

2 の証明において, $\bar{v}_i = v_i$ とすると,

$$\begin{aligned} &\left\langle \bar{\mathcal{B}} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, \mathcal{A} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\rangle \\ &= \left\{ \frac{E_1 I_1}{L_1} v_1''(0) - \frac{E_2 I_2}{L_2} v_2''(0) \right\}^2 \geq 0 \end{aligned}$$

となり, 作用素 $\bar{\mathcal{B}}$ が $\mathcal{A}$ -positive semidefinite であることが示された.

以上のことから, 作用素 $\bar{\mathcal{B}}$ は, $\mathcal{A}$ -dependent 作用素であるこ

とがわかり、作用素 B の A -dependent 性が示された。よって、発展方程式 (7) の解が存在し、唯一であることが証明された。 ■

B. 極の分布について

この付録では、開ループ系の極が (18), (19) 式のように分布し、閉ループ系の極が (20), (21) 式のように分布していることを示す。

B.1 開ループ極

まず、開ループ極の分布について考える。補題2において $\mathcal{F} = \delta I$ とし、作用素 $\mathcal{T}$ の固有値 λ を $\lambda = a + jb$ とする。(17) 式の両辺に対して $A\phi$ との内積をとり、整理すると

$$\begin{cases} (a^2 - b^2)\langle A\phi, \phi \rangle + a\langle \delta A\phi, A\phi \rangle + \langle A\phi, A\phi \rangle = 0 \\ 2ab\langle A\phi, \phi \rangle + b\langle \delta A\phi, A\phi \rangle = 0 \end{cases}$$

が導出される。ここで、作用素 A の固有値 μ_n と固有関数 ϕ_n の性質⁸⁾ ($\|\phi_n\| = 1$, $0 < \mu_1 < \mu_2 < \dots$) を用いると、

$$\begin{cases} (a^2 - b^2)\mu_n + a\delta\mu_n^2 + \mu_n^2 = 0 \\ 2ab\mu_n + b\delta\mu_n^2 = 0 \end{cases}$$

と書ける。

• $b = 0$ のとき (λ が実数)

$$a^2\mu_n + a\delta\mu_n^2 + \mu_n^2 = 0$$

が成立する。したがって、

$$a = -\frac{\delta\mu_n}{2} \pm \frac{\sqrt{\delta^2\mu_n^2 - 4\mu_n}}{2}$$

となる。ここで $n \rightarrow \infty$ としたときの a の収束値について考える。

$$(1) \quad a = -\frac{\delta\mu_n}{2} - \frac{\sqrt{\delta^2\mu_n^2 - 4\mu_n}}{2} \text{ のとき}$$

$n \rightarrow \infty$ とすると、 $a \rightarrow -\infty$ を示すことができる。

$$(2) \quad a = -\frac{\delta\mu_n}{2} + \frac{\sqrt{\delta^2\mu_n^2 - 4\mu_n}}{2} \text{ のとき}$$

$n \rightarrow \infty$ のときに、 $a \rightarrow -\frac{1}{\delta}$ となることを示すことができる。

• $b \neq 0$ のとき (λ が複素数)

$$2ab\mu_n + b\delta\mu_n^2 = 0$$

であることから、以下の式が成立する。

$$a = -\frac{\delta\mu_n}{2}, \quad b^2 = -\frac{\delta^2\mu_n^2}{4} + \mu_n$$

したがって、以下の等式が成立している。

$$|\lambda + \frac{1}{\delta}|^2 = |a + jb + \frac{1}{\delta}|^2 = \frac{1}{\delta^2}$$

以上のことから、(18), (19) 式が導出された。

B.2 閉ループ極

次に、閉ループ系の極の分布について考える。開ループ系の場合と同様に、補題2において $\mathcal{F} = \delta I + k_s Q$ とし、対応する式の解を $\lambda = \hat{a} + j\hat{b}$ とすると、

$$\begin{cases} (\hat{a}^2 - \hat{b}^2)\langle A\phi, \phi \rangle + \hat{a}\langle \mathcal{R}A\phi, A\phi \rangle + \langle A\phi, A\phi \rangle = 0 \\ 2\hat{a}\hat{b}\langle A\phi, \phi \rangle + \hat{b}\langle \mathcal{R}A\phi, A\phi \rangle = 0 \end{cases}$$

を得る。ここで、作用素 A の固有値と固有関数の性質を用いると、

• $\hat{b} = 0$ のとき

$$\hat{a} = -\frac{\langle \mathcal{R}\phi_n, \phi_n \rangle \mu_n}{2} \pm \frac{\sqrt{\langle \mathcal{R}\phi_n, \phi_n \rangle^2 \mu_n^2 - 4\mu_n}}{2}$$

• $\hat{b} \neq 0$ のとき

$$\hat{a} = -\frac{\langle \mathcal{R}\phi_n, \phi_n \rangle \mu_n}{2}, \quad \hat{b}^2 = -\frac{\langle \mathcal{R}\phi_n, \phi_n \rangle^2 \mu_n^2}{4} + \mu_n$$

となる。さらに、 $\mathcal{R}$ の有界・対称・正定性を用いると、本付録 B.1 の開ループ極の場合と同様に (20), (21) 式が導出される。

C. 内部減衰係数 δ の範囲について

この付録では、(25) 式の導出過程について説明する。開ループ系の極の実部は、(22) 式と表されており、付録 B で用いた作用素 A の固有値 μ_n 、固有関数 ϕ_n の性質を用いると、

$$\max\{a\} < -\frac{\delta\mu_1}{2} = -\frac{\delta\lambda_{\min}(A)}{2}$$

を得る。また、(24) 式が成立しているので、

$$-\frac{1}{\delta + k_s\lambda_{\min}(Q)} < -\frac{\delta\lambda_{\min}(A)}{2}$$

となり、 δ に関して平方完成すると、

$$(\delta + \frac{k_s\lambda_{\min}(Q)}{2})^2 < \frac{k_s^2\lambda_{\min}^2(Q)}{4} + \frac{2}{\lambda_{\min}(A)}$$

となる。したがって、 $\delta > 0$ であることから

$$0 < \delta < \sqrt{\frac{k_s^2\lambda_{\min}^2(Q)}{4} + \frac{2}{\lambda_{\min}(A)}} - \frac{k_s\lambda_{\min}(Q)}{2} \quad (C.1)$$

となり、(25) 式が導出された。

[著者紹介]

松野 文 俊 (正会員)

1986年大阪大学大学院基礎工学研究科博士課程修了、大阪大学基礎工学部助手、神戸大学工学部講師、助教授を経て96年より東京工業大学大学院総合理工学研究科助教授(知能システム科学専攻)となり、現在に至る。主に、ロボット・大型宇宙構造物の制御、分布定数系の制御に関する研究に従事。最近は、地理情報システムを基盤とした、災害時のレスキュー活動支援システムの開発・研究を行なっている。IEEE、日本ロボット学会、システム制御情報学会などの会員(工学博士)。

大野 高 史

1997年東京工業大学工学部制御システム工学科卒業、99年同大学大学院総合理工学研究科知能システム科学専攻修士課程修了。現在、(株)ブリヂストンに勤務。在学中、大型宇宙構造物の分布定数モデルに基づいた制御に関する研究に従事。