双対連鎖散乱表現で記述されたモデル集合のグラフ位相に基づく解析†

軸 屋 一 郎*・木 村 英 紀**

Analysis of a Model Set in the Dual Chain-Scattering Representation Based on the Graph Topology†

Ichiro JIKUYA* and Hidenori KIMURA**

We consider a model set in the dual chain-scattering framework. Given a rational transfer function matrix which we call a generator, a model set is defined by the dual Homographic transformation of the generator and the norm-bounded linear time-invariant uncertainty. We show that the continuity of the dual Homographic transformation with respect to the graph topology is necessary for robust stabilization of two class of controllers; LTI controller and NLTV controller. Moreover, for each class of controller, certain conditions must be included.

Key Words: model set, uncertainty, dual chain-scattering representation, robust stability, graph topology

1. はじめに

本稿では、双対連鎖散乱表現 (dual chain-scattering representation)⁶⁾を用いて表現されるモデル集合を考える。つまり、モデル集合は有理伝達関数行列 (Fig. 1 における G ; 生成因子 (generator) と呼ぶ) を与えることにより定義され、 H_∞ -ノルムが 1 以下の伝達関数行列の集合 (Fig. 1 における Δ) とのフィードバック結合 (双対ホモグラフィック (dual homographic) 変換) により表現されるものを考える。そして、「ロバスト安定化問題」と「グラフ位相により誘導されるロバスト性」という、制御系のロバスト性に関する二つの異なる概念の間の関係について議論する。

ロバスト安定化問題の目的はモデル集合のすべての要素を内部安定とするコントローラを設計することである。一方、プラントがグラフ位相⁹⁾の意味において連続であることは、グラフ位相に基づいて定まる近傍をロバスト安定化し閉ループ伝達関数を連続とするような有限次元線形時不変なコントローラが存在することと同値である。よって、モデル集合内にグラフ位相の意味における特異点が存在しても、閉ループ伝達関数の連続性を犠牲にするかわりにロバスト安定化を達成するようなコントローラは存在する。また、モデル集合内の各点がグラフ位相の意味で連続であっても、集合全体のロバスト安定化を達成するコントローラが存在するとも限らない。このように、閉ループ伝達関数の連続性という観点に

おいて両者は異なる。グラフ位相は制御系の定性的なロバスト性の観点から定義された重要な概念であり、両者の関係を明らかにすることは重要な問題であるが、この違いに着目して両者の関係を陽に論じた研究を筆者らは知らない。

本稿では、ロバスト安定化問題が可解ならばモデル集合を記述する双対ホモグラフィック変換がグラフ位相の意味で連続になることを示す。まず、有限次元線形時不変なコントローラの場合を取り扱い、次により強い仮定のもとで局所的に Lipschitz 連続¹¹⁾かつ非線形時変な厳密に因果的なコントローラを取り扱う。以降では、簡単のため線形時不変、局所的に Lipschitz 連続かつ非線形時変なコントローラをそれぞれ LTI, NLTV コントローラと略記する。

次節以降の構成は次のとおりである。2 節でモデル集合の定義を与える。3 節でモデル集合を記述する双対ホモグラフィック変換がグラフ位相の意味で連続となるための条件を求める。4 節, 5 節では、LTI/NLTV コントローラによるロバスト安定化問題をそれぞれ取り扱い、結果を示す。最後にまとめを行なう。

記号

$R^{n \times m}, C^{n \times m}$	実行列, 複素実行列の空間
$\sigma(X)$	行列 X の最小特異値.
X^{-1}, X^*	行列 X の逆行列, 複素共役転置
C_{+e}	$:= \{s \in C : \operatorname{Re} s \geq 0\} \cup \{\infty\}$
I_n	$n \times n$ の単位行列
H_∞	H_∞ -空間
$\ \cdot\ _\infty$	H_∞ -ノルム
$RH_\infty^{n \times m}$	安定な有理伝達関数行列の集合
BRH_∞	$:= \{\Delta \in RH_\infty : \ \Delta\ _\infty < 1\}$

† 第 29 回制御理論シンポジウムで発表 (2000・5)

* 東京大学大学院工学系研究科計数工学専攻

** 東京大学大学院新領域創成科学研究科複雑理工学専攻

* The University of Tokyo, Graduate School of Engineering

** The University of Tokyo, Graduate School of Frontier Science

(Received August 7, 2000)

(Revised June 18, 2001)

2. 準備

まず双対ホモグラフィック変換を導入する. 行列 $G \in C^{(p+q) \times (p+r)}$, $\Delta \in C^{p \times q}$ に対し双対ホモグラフィック変換 $DHM(G, \Delta)$ は次のように定義される.

$$DHM(G, \Delta) := -(G_{11} - \Delta G_{21})^{-1} (G_{12} - \Delta G_{22}) \quad (1)$$

ただし, $G_{ij} (i=1, 2; j=1, 2)$ は行列 G を適当なサイズで分割して得られるブロック行列とする. $DHM(G, \Delta)$ は図1のようなフィードバック結合を表わし, 線形分変換 (LFT) に変換することができる.

Fig. 1 Structure of the dual-Homographic transformation

本稿では NLTV コントローラの取り扱いを容易にするために双対連鎖散乱表現に基づくモデル集合を考慮する. (cf. 文献3), 4))

【定義】 有理伝達関数行列 $G \in RH_{\infty}^{(p+q) \times (p+r)}$ に対し, モデル集合 $\mathcal{N}_G$ を次のように定義する.

$$\mathcal{N}_G := \{DHM(G, \Delta) : \Delta \in BRH_{\infty}^{p \times q}\} \quad (2)$$

ここで G を生成因子と呼ぶ.

本稿を通して次のような生成因子を考える.

【仮定1】 $\det(G_{11} - \Delta G_{21}) \neq 0, \forall \Delta \in BRH_{\infty}$.

【仮定2】 G_{11}, G_{12} が左既約.

【仮定3】 $G_{21}G_{11}^{-1}G_{12} - G_{22}$ が行フルランク.

仮定1よりモデル集合の各要素が定義されることが保証される. 仮定2はノミナルモデル $G_{11}^{-1}G_{12}$ が左既約であることを意味する. 仮定3は, 以下の補題で示される通り, モデル集合を記述する双対ホモグラフィック変換

$$DHM(G, \cdot) : BRH_{\infty} \rightarrow \mathcal{N}_G \quad (3)$$

が単射であることを意味する.

【補題1】 $DHM(G, \cdot)$ が単射となる為の必要十分条件は $G_{21}G_{11}^{-1}G_{12} - G_{22}$ が行フルランクとなることである.

3. グラフ位相に関する連続性

本節では $DHM(G, \cdot)$ がグラフ位相の意味で連続となる為の必要十分条件を求める. まず必要な補題を導入する.

【補題2】 (文献9) corollary 7.2.28) Λ を第一可算空間 (first-countable topological space) とする. $\lambda \rightarrow P_{\lambda}$ を Λ から BRH_{∞} への関数とする. 以下の条件は等価である.

- (i) $\lambda \rightarrow P_{\lambda}$ が $\lambda = \lambda_0$ でグラフ位相の意味で連続.
- (ii) N_{λ}, D_{λ} が $\lambda = \lambda_0$ において連続となるような P_{λ} の左既約分解 $D_{\lambda}^{-1}N_{\lambda}$ の集合が存在する.

計量空間は位相空間としては第一可算なので (文献9) pp. 411), $DHM(G, \cdot)$ がグラフ位相の意味で連続となるための条件を補題2を用いて解析することができる.

モデル集合の各要素が左分解の形で与えられていることに着目し, 既約性を次のように定義する.

【定義】 すべての $\Delta \in BRH_{\infty}$ に対して $[I - \Delta]G$ が C_{+e} 上で右可逆, つまり

$$\sigma \left(\begin{bmatrix} I_p & -\Delta \end{bmatrix} G \right) > 0 \quad (4)$$

となるとき, G をロバストに左既約と呼ぶ.

$DHM(G, \cdot)$ がグラフ位相の意味で連続となる為の必要十分条件は次のとおりである.

《定理1》 生成因子 G が仮定1-3を満たすとする. 双対ホモグラフィック変換 $DHM(G, \cdot)$ がグラフ位相に関して連続であるための必要十分条件は G がロバストに左既約となることである.

証明: 充分性: (4) より任意の $\Delta \in BRH_{\infty}$ に対し $-G_{11} + \Delta G_{21}, G_{12} - \Delta G_{22}$ は左既約となる. 補題2(ii) $\Rightarrow$ (i) より示される.

必要性: 背理法により示す. $\Delta_0 \in BRH_{\infty}$ が $s_0 \in C_{+e}$ において (4) 式を満たさないと仮定する. 0 と Δ_0 を直線で結び, 点列 $\{DHM(G, \lambda \Delta_0) : \lambda \in [0, 1]\}$ を構成する. 補題1より $DHM(G, 0) \neq DHM(G, \Delta_0)$ となることに注意すると, 一般性を失うことなく $\lambda \in [0, 1]$ 上で $-G_{11} + \lambda \Delta_0 G_{21}, G_{12} - \lambda \Delta_0 G_{22}$ は左既約と仮定することができる. $DHM(G, \Delta_0)$ の左既約分解を $\tilde{D}^{-1}\tilde{N}$ とする.

$$\begin{aligned} & \lim_{\lambda \rightarrow 1} \| [-G_{11} + \lambda \Delta_0 G_{21} \quad G_{12} - \lambda \Delta_0 G_{22}] - [\tilde{D} \quad \tilde{N}] \|_{\infty} \\ &= \| [-G_{11} + \Delta_0 G_{21} \quad G_{12} - \Delta_0 G_{22}] - [\tilde{D} \quad \tilde{N}] \|_{\infty} \\ &\geq \| [-G_{11}(s_0) + \Delta_0(s_0)G_{21}(s_0) \quad G_{12}(s_0) - \Delta_0(s_0)G_{22}(s_0)] - [\tilde{D}(s_0) \quad \tilde{N}(s_0)] \|_{\infty} \\ &> 0 \end{aligned} \quad (5)$$

最後の不等式は, 行フルランクな行列を行フルランクでない行列により誤差なく近似できないことによる. $[0, 1]$ 区間上での既約分解の形によらず (5) と同様の不等式が成立するので, 補題2(ii) $\Rightarrow$ (i) よりグラフ位相の意味で不連続な点が構成され, 矛盾する. ■

定理1において得られた条件は, $\mathcal{N}_G$ のすべての要素が左既約な分解を与えていることを意味する. この条件は極めて自然な条件に思われるが, 仮定2-3が満たされない場合には下記のような反例が存在する.

【例】 生成因子

$$G = \begin{bmatrix} \frac{s-1}{s+1} & \frac{s-1}{s+1} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

は (4) の条件を満たさない. 一方, 生成されるモデル集合 $\mathcal{N}_G = \{-1\}$ の要素の左既約分解は常に $1^{-1}(-1)$ で与えられ, $DHM(G, \cdot)$ はグラフ位相の意味で連続となる.

(4) 式に基づいてグラフ位相の意味での連続性を判定することは必ずしも容易ではない。しかし、生成因子が 2×2 の場合はより厳密にクラスを論じることができる。

[系1] 生成因子 $G \in \mathbf{RH}_\infty^{2 \times 2}$ は仮定 1-3 を満たすと仮定する。 G を安定なブロック上三角伝達関数とユニモジュラ行列 U の積に分解する。

$$\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} =: \begin{bmatrix} \hat{G}_{11} & \hat{G}_{12} \\ 0 & \hat{G}_{22} \end{bmatrix} U \quad (6)$$

s_i を $\hat{G}_{11}$ の不安定零点とする。 $DHM(G, \cdot)$ がグラフ位相に関して連続となるための必要十分条件は各 s_i で

$$\left| \frac{\hat{G}_{12}(s_i)}{\hat{G}_{22}(s_i)} \right| \geq 1 \quad (7)$$

を満たすことである。

証明: (6) 式を満たす分解が存在することは $[G_{21}G_{22}]$ のスミス形を考えることにより自明である。次にグラフ位相に関する連続性のための必要十分条件を求める。まず必要性を示す。ユニモジュラ行列は C_{+e} 上の各点において正則なので、(4) が成立するなら任意の $\Delta \in \mathbf{BRH}_\infty$ に対して C_{+e} 上で

$$\sigma \left(\begin{bmatrix} 1 & -\Delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{G}_{11} & \hat{G}_{12} \\ 0 & \hat{G}_{22} \end{bmatrix} \right) \neq 0 \quad (8)$$

が成り立つ。 $\hat{G}_{11}$ の不安定零点以外では明らかに (8) 式が成立するので、各不安定零点 s_i において

$$\hat{G}_{12}(s_i) - \hat{G}_{22}(s_i)\Delta(s_i) \neq 0$$

を満たせばよい。 s_i が実軸上もしくは無限遠点になれば $\Delta(s_i)$ は絶対値が 1 以下の任意の複素数となりうるので (7) 式の必要性が示される。実軸上もしくは無限遠点にあれば $\Delta(s_i)$ は絶対値が 1 以下の任意の実数のみにしかなりえないが、 $\hat{G}_{12}(s_i), \hat{G}_{22}(s_i)$ も実数となるので同様である。なお、(6) の分解においてスカラユニモジュラ関数だけの自由度があるが、これが上記の解析に影響を及ぼさないことは明らかである。十分性は必要性の逆より明らか。 ■

4. LTI コントローラによるロバスト安定化

本節では、まず LTI コントローラによるロバスト安定化が可能であるための必要十分条件を求め、LTI コントローラによりロバスト安定化が可能ならば $DHM(G, \cdot)$ がグラフ位相の意味で連続であることを示す。

《定理2》 生成因子 G が仮定 1-3 を満たすと仮定する。LTI コントローラにより N_G のロバスト安定化が可能であるための必要十分条件は

$$-G_{11}Y + G_{12}X = I \quad (9)$$

$$\|G_{21}Y - G_{22}X\|_\infty \leq 1 \quad (10)$$

を満たす $X, Y \in \mathbf{RH}_\infty$ が存在することである。ロバスト安定化が可能ならば、コントローラは XY^{-1} により与えられる。

証明: 十分性: (9), (10) を満たす X, Y を用いてコントローラ XY^{-1} を構成する。小ゲイン定理¹¹⁾より閉ループ系の選送差行列

$$\begin{bmatrix} I & -\Delta \end{bmatrix} G \begin{bmatrix} -Y \\ X \end{bmatrix} = I + \Delta(G_{21}Y - G_{22}X)$$

がユニモジュラとなることが示される。よってロバスト安定である。

必要性: ロバスト安定化コントローラが XY^{-1} と右既約分解されると仮定する。 $\Delta = 0$ の場合に、 $-G_{11}^{-1}G_{12}$ を安定化するために (9) が必要であることが示される。 (10) を満たさない、つまり

$$\|G_{21}(i\omega_0)Y(i\omega_0) - G_{22}(i\omega_0)X(i\omega_0)\| > 1 \quad (11)$$

を満たす $X, Y \in \mathbf{RH}_\infty$ と $i\omega_0 \in C_{+e}$ が存在すると仮定して、矛盾することを示す。 $G_{21}Y - G_{22}X$ は C_{+e} 上で解析的なので、 $i\omega_0$ の近傍においても (11) が成り立つことに注意する。

以降では閉ループが不安定となるような $\Delta_0 \in \mathbf{BRH}_\infty$ を構成する。

$$G_{21}(i\omega_0)Y(i\omega_0) - G_{22}(i\omega_0)X(i\omega_0) = U\Sigma V \quad (12)$$

と特異値分解する。つまり U, V はユニタリ行列、 Σ は対角成分のみに非零要素が並ぶように分解する。一般性を失うことなく Σ の左上に最大特異値 $\sigma_{\max}$ があると仮定できる。 Δ_0 として

$$\Delta_0(i\omega_0) = V^* \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sigma_{\max}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^* \quad (13)$$

を満たすようなものを構成する。 $\Delta_0(i\omega_0)$ はランクが 1 の行列なので縦ベクトルと横ベクトルの積で表現することができる。そしてベクトルの各要素をインタ関数に定数をかけたものにより補間すれば、 $\Delta_0(i\omega_0)$ を補間するような Δ_0 を実現することができる。ここで

$$\sigma \left(\begin{bmatrix} I & -\Delta_0(i\omega_0) \end{bmatrix} G(i\omega_0) \begin{bmatrix} -Y_0(i\omega_0) \\ X_0(i\omega_0) \end{bmatrix} \right) = 0 \quad (14)$$

に注意する。一方、一般性を失うことなく

$$\sigma \left(\begin{bmatrix} I & -\Delta_0(i\omega_0) \end{bmatrix} G(i\omega_0) \right) > 0 \quad (15)$$

と仮定できる。このことを示すには右からかけて正則となるような行列が存在することを示せばよい。 $G_{11}^{-1}G_{12}$ の右既約分解を $P_0R_0^{-1}$ とする。仮定より $G_{21}P_0 - G_{22}R_0$ は行フルランクである。 $U^*(G_{21}(i\omega_0)P_0(i\omega_0) - G_{22}(i\omega_0)R_0(i\omega_0)) =: S_0$ の第一行が非零要素を含む場合は

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} I & -\Delta_0(i\omega_0) \end{bmatrix} G(i\omega_0) \begin{bmatrix} -Y(i\omega_0) + P_0(i\omega_0)W(i\omega_0) \\ X(i\omega_0) - R_0(i\omega_0)W(i\omega_0) \end{bmatrix} \\ &= V^* \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sigma_{\max}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} S_0W(i\omega_0)V^* \right) V \end{aligned}$$

が可逆となるよう、 $W(i\omega_0)$ として適当な置換行列と V をかけたものを取り、それを補間するような W を構成することにより (15) が示される。 S_0 の第一行が零成分のみを含む場合は、非零要素を含むような $i\omega_0$ に十分近い点を選び上記の手順を繰り返すことにより示される。

$-G_{11} + \Delta_0G_{21}$ と $G_{12} - \Delta_0G_{22}$ の最大左共通因子を $\tilde{R}$ と

して、 $DH M(G, \Delta_0) = -\tilde{D}^{-1}\tilde{N}$ と左既約分解されるとする。すると

$$\begin{aligned} & \det(-(G_{11} - \Delta_0 G_{21})Y + (G_{12} - \Delta_0 G_{22})X) \\ &= \det R \det(-\tilde{D}Y + \tilde{N}X) \end{aligned} \quad (16)$$

が成り立つ。(15)より $\det R(i\omega_0) \neq 0$ 。よって、(14)より

$$\det(-\tilde{D}(i\omega_0)Y(i\omega_0) + \tilde{N}(i\omega_0)X(i\omega_0)) = 0 \quad (17)$$

が成り立つ。これは閉ループが不安定であることを意味し、矛盾する。■

定理2を用いることにより、LTIコントローラによりロバスト安定化が可能ならば $DH M(G, \cdot)$ がグラフ位相の意味で連続であることを示すことができる。

[系2] 生成因子 G は仮定1-3を満たすと仮定する。 $\mathcal{N}_G$ がLTIコントローラによりロバスト安定化が可能ならば、 $DH M(G, \cdot)$ はグラフ位相の意味で連続である。

証明: 小ゲイン定理¹¹⁾より任意の $\Delta \in \mathbf{BRH}_\infty$ に対して

$$\begin{bmatrix} I & -\Delta \end{bmatrix} G \begin{bmatrix} -Y \\ X \end{bmatrix} = I + \Delta(G_{21}Y - G_{22}X)$$

がユニモジュラとなる。よって、 $-G_{11} + G_{12}\Delta$ と $G_{21} - \Delta G_{22}$ が左既約となる。定理1より題意が示される。■

系2と類似した結果として文献2) 補題1があげられる。文献2)では既約分解摂動を取り扱っているために取り扱っているモデル集合のクラスが一致しないが、LTIコントローラによりロバスト安定化が可能ならば生成因子がロバストに既約でなければならないということに相当する事実が述べられている。

5. NLTV コントローラによるロバスト安定化

最後に、NLTVコントローラによるロバスト安定化が可能な場合にも前節と同様の議論が成立することを、より強い仮定の場合もとで示す。本節では、NLTVコントローラを取り扱うために時間領域におけるオペレータにより入出力関係を取り扱う。

$L_2[0, \infty)$ を自乗可積分な信号空間とする。 $L_2[0, \infty)$ 上で有界で因果的なオペレータを、積がオペレータの合成に対応し、左分配的、非可換で単位をもち、誘導オペレータノルムを備えた Banach 代数の上で取り扱う。 $\|\cdot\|$ は信号の L_2 ノルムもしくはオペレータの L_2 誘導ノルムとする。Banach 代数上での LTI オペレータの集合と周波数領域での $\mathbf{RH}_\infty$ が自然に同一視できるので、本節では時間領域でのオペレータと周波数領域での伝達関数を同じ記号を用いて表現する。詳しくは文献11)等を参照されたい。

LTIシステムに対するNLTVコントローラが存在するための必要十分条件が次のように知られている。

[補題3] (文献7) Lemma 3.6) LTIシステム左既約分解が $d^{-1}n$ により与えられるとする。NLTVコントローラ K により安定化されるための必要十分条件は $na + db$ が $L_2[0, \infty)$

上の単位となり b^{-1} が因果的となるような NLTV オペレータ a, b により $K = ab^{-1}$ と分解されることである。

さらに必要な補題を導入する。

[補題4] (文献5) Lemma 4.5) 一入力一出力、厳密にプロパな LTI システム P_1, P_2 の既約分解が $P_1 = d_1^{-1}n_1, P_2 = d_2^{-1}n_2$ により与えられ、NLTVコントローラ K により安定化されるとする。さらに d_1, d_2 は $\mathbf{RH}_\infty$ 上で既約とする。 $P := P_1 + P_2, K_2 := K(I + P_2K)^{-1}$ とする。 P と K からなる閉ループが安定ならば P_1 と K_2 からなる閉ループも安定である。

[補題5] 生成因子 $G \in \mathbf{RH}_\infty^{2 \times 2}$ を安定な上三角行列 $\hat{G}$ とユニモジュラ行列 U の積

$$G = \hat{G}U, \quad \hat{G} := \begin{bmatrix} \hat{G}_{11} & \hat{G}_{12} \\ 0 & \hat{G}_{22} \end{bmatrix} \quad (18)$$

に分解する。 $\hat{G}_{11}, \hat{G}_{12}, \hat{G}_{22} (\neq 0)$, U は以下の条件を満たすと仮定する。

- (i) $\hat{G}_{11}$ はプロパで虚軸上に零点を持たない。また重複した不安定零点を持たない。
- (ii) $\hat{G}_{12}, \hat{G}_{22}$ は厳密にプロパ。
- (iii) $\hat{G}_{11}, \hat{G}_{12}$ は左既約。
- (iv) $\hat{G}_{11}, \hat{G}_{22}$ は共通した不安定零点を持たない。
- (v) $U_{11}(\infty) \neq 0$ 、ただし U_{11} は U の左上要素を表す。 $DH M(G, \cdot)$ がグラフ位相の意味で不連続ならば、適当な定数 $\epsilon_0 > 0$ に対し、次の条件を満たすスカラ有理伝達関数 g_0, g_1, g_2 が存在する。
- (vi) $g_0 \in \mathbf{RL}_\infty$ かつ $g_0 \notin \mathbf{RH}_\infty$
- (vii) g_2 の不安定極の集合は重複度も含めて g_1 の不安定極の集合に含まれる。
- (viii) すべての $\epsilon \in [0, \epsilon_0)$ に対し g_0 と $g_1 + \epsilon g_2$ は共通の不安定極を持たない。
- (ix) すべての $\epsilon \in [0, \epsilon_0)$ に対し $P_\epsilon \in \mathcal{N}_{\hat{G}}$ 、ただし

$$P_\epsilon := \epsilon g_0 + g_1 + \epsilon g_2 \quad (19)$$

補題5の証明は付録に記載する。生成因子 G が(18)式のように分解され、(i)-(v)を満たすならば、仮定1-3は自動的に満たされ、より強い仮定であることがわかる。以上の補題を用いることにより、モデル集合の要素 $DH M(G, \Delta)$ とそれを構成する Δ がともに一入力一出力 (SISO) であるモデル集合 $\mathcal{N}_G$ に対して、系2と同様の結果を示す。

《定理3》 生成因子 G が補題5の(18)式のように分解され、(i)-(v)を満たすと仮定する。厳密に因果的なNLTVコントローラによるロバスト安定化が可能ならば、 $DH M(G, \cdot)$ はグラフ位相の意味で連続である。

証明: 対偶が成り立つことを示すことにより証明する。補題5より、補題5(vi)-(ix)の条件を満たす g_0, g_1, g_2 が存在する。 U を(18)式のユニモジュラ行列、 P_ϵ を(19)式の ϵ に依存

した伝達関数とする．さらに $U_{ij} (i = 1, 2; j = 1, 2)$ を U の要素とする． $\mathcal{N}_G$ の部分集合 $\{DHM(U, P_\epsilon) : \epsilon \in [0, 1]\}$ をロバスト安定化する厳密に因果的な NLTV コントローラ K が存在するとして矛盾することを示す．

仮定 (ii) より $DHM(U, P_\epsilon)$ は厳密にプロパとなる．よって補題 4 を適用することができる．各 $\epsilon \in [0, \epsilon_0]$ に対し

$$P_\epsilon =: d_\epsilon^{-1} n_\epsilon$$

と左既約分解されると仮定する． U はユニモジュラより

$$DHM(U, P_\epsilon) = (-d_\epsilon U_{11} + n_\epsilon U_{21})^{-1} (d_\epsilon U_{12} - n_\epsilon U_{22})$$

も左既約な分解を与える．NLTV オペレータ a, b を用いて K の右既約分解が

$$K =: ab^{-1}$$

により与えられるとする．ただし K が厳密に因果的なので a も厳密に因果的となる．補題 3 より，各 $\epsilon \in [0, \epsilon_0]$ に対して

$$\begin{aligned} & (-d_\epsilon U_{11} + n_\epsilon U_{21})b + (d_\epsilon U_{12} - n_\epsilon U_{22})a \\ &= \begin{bmatrix} d_\epsilon & n_\epsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & -U_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} \end{aligned}$$

は $L_2[0, \infty)$ 上の単元となる．一般性を失うことなく $\epsilon = 0$ の場合に恒等写像 1 と一致することを仮定できる．ここで

$$\hat{a} := -U_{11}b + U_{12}a, \quad \hat{b} := U_{21}b - U_{22}a$$

とすると， a が厳密に因果的なので

$$\hat{b}^{-1} = b^{-1}(1 - U_{11}^{-1}U_{12}ab^{-1})U_{11}^{-1}$$

は因果的となる．さらに d_ϵ, n_ϵ は左既約より

$$\hat{K} := \hat{a}\hat{b}^{-1}$$

は P_ϵ を安定化する．上記の構成の手順より $\epsilon = 0$ の場合に

$$g_1 = d_0^{-1}n_0 \quad (20)$$

$$d_0\hat{b} + n_0\hat{a} = 1 \quad (21)$$

となることに注意する． $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$ の場合に

$$K_\epsilon := \hat{K}(1 + (g_1 + \epsilon g_2)\hat{K})^{-1}$$

とする．補題 5(viii) と補題 4 より， K_ϵ が ϵg_0 を安定化する．このことは，Fig. 2 において安定性を考慮するループを下のループから上のループに移し変えることができることを意味する．つまり， P_ϵ と K の間の安定性は Fig. 2 の下のループにおける安定性に相当するが，Fig. 2 の上のループにおいて安定性を考慮すればよいことを意味する．よって，以降では Fig. 3 の閉ループの安定性を考慮する．

(20) 式，(21) 式より

$$\begin{aligned} K_\epsilon &= \hat{a}\hat{b}^{-1}(1 + d_0^{-1}(n_0 + \epsilon d_0 g_2)\hat{a}\hat{b}^{-1})^{-1} \\ &= \hat{a}(1 + \epsilon d_0 g_2 \hat{a})^{-1} \end{aligned}$$

となる．補題 5(vii) より $d_0 g_2 \hat{a}$ は有界で因果的なオペレータとなり，十分小さな ϵ に対しては $\|\epsilon d_0 g_2 \hat{a}\| < 1$ となる．さらに，小ゲイン定理¹¹⁾より K_ϵ も有界で因果的なオペレータとなり，ノルムを次の不等式によりおさえることができる．

$$\|K_\epsilon\| \leq \frac{\|\hat{a}\|}{1 - \epsilon\|d_0 g_2 \hat{a}\|}$$

N を $L_2[0, \infty)$ の部分空間で，各要素をラプラス変換したものが g_0 のすべての極を零点として含むようなものを考える．補題 5(vi) より， g_0 の不安定極は虚軸と無限遠点を除く C_{+e} 上にある．よって N は $L_2[0, \infty)$ の閉部分空間となり， N の直交補空間 $N^\perp$ は非零な要素を含む． g_0 が有界となるのは入力を N に制限したときに限ることに注意する． ϵg_0 と K_ϵ からなる閉ループに，非自明な入力 $u_1 \in N^\perp$ を入れる．(Fig. 3 参照)

ϵg_0 と K_ϵ からなる閉ループは安定なので，誤差 e_1 は N の要素でなければならない． u_1 と e_1 は直交しているので次の不等式が成り立つ．

$$\|v_1\|^2 = \|u_1\|^2 + \|e_1\|^2 > \|e_1\|^2$$

一方，次の不等式

$$\|K_\epsilon(\epsilon g_0)|_N\| \leq \frac{\|\hat{a}\|}{1 - \epsilon\|d_0 g_2 \hat{a}\|} \epsilon \|g_0|_N\|$$

が成り立つことに注意すると $v_1 = K_\epsilon \epsilon g_0 e_1$ より十分小さな ϵ に対しては

$$\|v_1\| < \|e_1\|$$

となる．よって矛盾する． ■

定理 3 と関連する研究として文献 1), 5), 7) があげられる．これらは不確かさが L_∞ -ノルムの意味で有界，極の数がノミナルモデルと等しく (もしくは等しいかそれ以下の)，SISO，厳密にプロパな加法的摂動に対して同様の問題を取り扱っている．そして LTI コントローラによるロバスト安定化問題と NLTV コントローラによるロバスト安定化問題が (ほぼ) 同値であるという非常に強い結果が得られている．証明の概略は，LTI コントローラによるロバスト安定化問題が可解でな

Fig. 2 Closed loop configuration

Fig. 3 Closed loop configuration

い場合に、NLTV コントローラによるロバスト安定化が不可能な点列が存在することを示している。文献 1), 5), 7) では陽に示されていないものの、このロバスト安定化が不可能な点列はグラフ位相の意味での特異点に収束する点列であると解釈される。本稿での証明も同様の手順に帰着するが、文献 1), 5), 7) の場合と違ってモデル集合の要素の不安定極の数は一定でなく、自明な結果ではない。

最後に例を示す。

〔例〕 生成因子

$$G = \begin{bmatrix} \frac{3s-1}{2(s+1)} & \frac{2}{s+1} \\ \frac{5}{s+1} & \frac{10}{s+1} \end{bmatrix}$$

は

$$G = \begin{bmatrix} \frac{s-1}{s+1} & 1 \\ 0 & \frac{10}{s+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

と分解される。系 1 より G はロバストに既約でなく、厳密に因果的な NLTV コントローラによる $\mathcal{N}_G$ のロバスト安定化問題は可解でない。

6. む す び

双対連鎖散乱表現で記述されたモデル集合のロバスト安定化可能性について考察した。それぞれ適当な仮定のもとで LTI もしくは NLTV コントローラによるロバスト安定化問題を考える。そして、ロバスト安定化問題が可解ならばモデル集合を記述する双対ホモグラフィック変換 $DHM(G, \cdot)$ がグラフ位相に関して連続であることを示した。この結果は、グラフ位相により保証されるロバスト性と、ロバスト制御問題で議論されているロバスト性の間の関係を明らかにするものである。

最後に、論文を書く上で有益な助言を頂いた査読者に心から感謝いたします。

参 考 文 献

- 1) T. Georgiou, A. Pascoal and P. Khargonekar : On the Robust Stability of Unvertain Linear Time Invariant Plants Using Nonlinear Time Varying Controllers, *Automatica*, **23**-25, 617/624 (1987)
- 2) T. Georgiou and M. Smith : Optimal Robustness in the Gap Metric, *IEEE TAC*, **35**-6 (1990)
- 3) I. Jikuya and H. Kimura : Reduction of Model Sets with Inclusion, *CDC Tampa*, 2201/2206 (1998)
- 4) I. Jikuya and H. Kimura : Representation and Reducion of Model Sets, *CDC Phoenix*, 1482/1287 (1999)
- 5) P. Khargonekar, T. Georgiou and A. Pascoal : On the Robust Stability of Lenear Time-Invariant Plants with Unstructured Uncertainty, *IEEE TAC*, **AC-32**, 201/207 (1987)
- 6) H. Kimura : *Chain-Scattering Approach to H_∞ -Control*, Birkhäuser, Boston (1997)
- 7) A. Pascoal, P. Khargonekar and T. Georgiou : Pointwise Stabilizability of Families of Lineae Time-Time Invariant Plants, *IEEE TAC*, **33**-12, 1161/1165 (1988)
- 8) S. Takeda and A. Bergen : Instability of Feedback Systems by Orthogonal Decomposition of L_2 , *IEEE TAC*, **AC-18**,

631/636 (1973)

- 9) M.S. Vidyasagar : *Control System Synthesis : A Factrization Approach*, MIT Press (1985)
- 10) M.S. Vidyasagar and H. Kimura : Robust Controllers for Uncertain Linear Multivariable Systems, *Automatica*, **22**, 85/94 (1986)
- 11) J. Willems : *The Analysis of Feedback Systems*, MIT Press (1971)

《 付 録 》

A. 補題 1 の証明

必要性 : $G_{21}G_{11}^{-1}G_{12} - G_{22}$ が行フルランクでなければ $\Delta_0(G_{21}G_{11}^{-1}G_{12} - G_{22}) = 0$ を満たす非零な $\Delta_0 \in BRH_\infty$ が存在する。 Δ_0 は $DHM(G, 0) = DHM(G, \Delta_0)$ を満たし、矛盾する。

十分性 : まず G が正方な場合を考える。 G が可逆より

$$HM(G^{-1}, \Delta) = DHM(G, \Delta)$$

$$HM(G, \Delta) := (G_{11}\Delta + G_{12})(G_{21}\Delta + G_{22})^{-1}$$

が成り立つことを用いる。

$$DHM(G, \Delta_1) - DHM(G, \Delta_2)$$

$$= HM(\bar{G}, \Delta_1) - DHM(G, \Delta_2)$$

$$= (G_{11} - \Delta_2 G_{21})^{-1}(\Delta_1 - \Delta_2)(\bar{G}_{21}\Delta_2 + \bar{G}_{22})^{-1}$$

ここで、 $\bar{G} = G^{-1}$ としている。さらに

$$\bar{G}_{21} = -\bar{G}_{22}G_{21}G_{11}^{-1}, \quad \bar{G}_{22} = (G_{22} - G_{21}G_{11}^{-1}G_{12})^{-1}$$

なので、

$$DHM(G, \Delta_1) - DHM(G, \Delta_2)$$

$$= (G_{11} - \Delta_2 G_{21})^{-1}(\Delta_1 - \Delta_2)(-G_{21}G_{11}^{-1}\Delta + I)^{-1}$$

$$(G_{22} - G_{21}G_{11}^{-1}G_{12})$$

が示される。よって単射であることが示される。 G が正方でない場合は、 $G_{11}^{-1}G_{12} = P_0R_0^{-1}$ と右既約分解し、

$$\begin{bmatrix} G_{21} & G_{22} \\ G_{31} & G_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ -R_0 \end{bmatrix}$$

が可逆となるような伝達関数 G_{31}, G_{32} を補う。すると

$$DHM\left(\left[\begin{array}{c} G \\ \left[\begin{array}{cc} G_{31} & G_{32} \end{array}\right] \end{array}\right], \left[\begin{array}{cc} \Delta & 0 \end{array}\right]\right)$$

$$= DHM(G, \Delta)$$

より G が正方な場合と同様な議論が成り立つ。

B. 補題 5 の証明

$\hat{G}_{11}$ の不安定零点を s_i ($i = 1, \dots, m$) とする。仮定 (iii) より $\hat{G}_{12}(s_i) \neq 0$, 仮定 (iv) より $\hat{G}_{22}(s_i) \neq 0$ であることに注意する。ユニモジュラ行列 U は C_{+e} 上の各点において正則なので、 G がロバストに既約でなければある s_i にたいし

$$\begin{bmatrix} 1 & -\Delta_0(s_i) \end{bmatrix} \hat{G}(s_i)$$

$$= \hat{G}_{12}(s_i) - \Delta_0(s_i)\hat{G}_{22}(s_i) = 0 \quad (B.1)$$

を満たすような $\Delta_0 \in BRH_\infty$ が存在する。さらに

$$\hat{G}_{12}(s_i) - \epsilon \Delta_0(s_i) \hat{G}_{22}(s_i) = 0 \quad (\text{B.2})$$

をみたす $\epsilon \in [0, 1]$ の最小値を $\epsilon_0 > 0$ とする. 一般性を失うことなく, 最小値 ϵ_0 は s_i ($i = 1, \dots, l$ ただし $l \leq m$) において達成されると仮定できる. $\hat{G}_{11}$ の不安定零点を最小値 ϵ_0 を達成するものとそうでないものに分けて分解する.

$$\hat{G}_{11} =: \tilde{G}_{11} \prod_{i=1}^l \frac{s - s_i}{s + s_i}$$

各 $c \in [0, \epsilon_0]$ に対し P_c を次のように定義する.

$$P_c := -\hat{G}_{11}^{-1} (\hat{G}_{12} - (\epsilon_0 - c) \Delta_0 \hat{G}_{22}) \quad (\text{B.3})$$

各 $c \in (0, \epsilon_0)$ に対し, s_i ($i = 1, \dots, l$) において部分分数展開を行ない, g_0, g_1, g_2 を定義する.

$$P_c = \epsilon g_0 + g_1 + \epsilon g_2$$

$$g_0 = - \sum_{i=1}^l \frac{\xi_i}{s - s_i}$$

$$g_1 = -\hat{G}_{11}^{-1} (\hat{G}_{12} - \epsilon_0 \Delta_0 \hat{G}_{22})$$

$$g_2 = \sum_{i=1}^l \frac{\xi_i}{s - s_i} - \hat{G}_{11} \Delta_0 \hat{G}_{22}$$

$$\xi_i := 2s_i \left(\prod_{j \neq i} \frac{s_i + s_j}{s_i - s_j} \right) \tilde{G}_{11}^{-1}(s_i) \Delta_0(s_i) \hat{G}_{22}(s_i)$$

s_i ($i = 1, \dots, l$) は無限遠点と虚軸を除く C_{+e} 上の点なので (vi) が成り立つ. その構成より g_0 の不安定極 s_i ($1, \dots, l$) は g_1, g_2 の除去可能特異点であり, g_1 の不安定極と $\tilde{G}_{11}$ の不安定零点は一致し, g_2 は不安定極として高々 $\tilde{G}_{11}$ の不安定零点しか含まない. よって (vii), (viii), (ix) が成り立つ. ■

[著者紹介]

軸 屋 一 郎 (学生会員)

2001年東京大学大学院工学系研究科博士課程修了(工学博士). 同年4月より, Twente大学にて研究員(Post-doc). 現在に至る.

木 村 英 紀 (正会員)

1970年東京大学大学院博士課程修了(工学博士). 同年大阪大学基礎工学部助手. 73年同助教授, 95年東京大学工学部教授を経て現在に至る. 96年California大学Berkeley校Springer教授. 制御理論とシステム理論とその応用, モデリング理論の研究に従事. 72, 83, 93, 97年計測自動学会論文賞, 83年IEEE CSS G. Axelby Paper Awards, 84, 89年Automatica Paper Prize Awards, 本会フェロー, IEEEフェロー.