BMPC 法における解領域と解領域更新新アルゴリズム

鳥海 不二夫*・曹 麗**
大山 真司*・小林 彬*

Solution Domain of Band Function Model Paired Comparison Method
and New Algorithm for Solution Domain Renewal

Fujio TORIUMI*, Li CAO**,
Shinji OHYAMA* and Akira KOBAYASHI*

Band function model paired comparison (BMPC) method is effective for scaling of ambiguity quantity in the case such as sensory evaluation. The solution algorithm for BMPC method needs a large memory capacity and spends a lot of time. This reason is that the conventional method didn't utilize the functional relation between edge vectors and hyper planes on the solution domain. In this paper, we consider some natures of the inequalities to obtain solution domain and discuss about the edge vectors expressing solution domain. And we proposed the new effective algorithm to renewal solution domain based on the revealed natures of the inequalities. The new algorithm is examined and improved calculational performance are shown in the point of view of calculation time and memory capacities.

Key Words: paired comparison, sensory evaluation, solution domain, linear inequalities

1. はじめに

人間の感覚による曖昧量の計測, すなわち尺度付けにおいて比較的良い結果が得られる手法の一つに一对比較法がある。一般的な一对比較法として Sheffé 法や Thurstone 法があるが, それらの手法では, 与えるべき尺度値の差と一对比較判断結果の間の関係として直線性を仮定した比較判断モデルが用いられる。

一方, 帯関数モデル型一对比較法^{1)~3)} (Band function model paired comparison method; 以下 BMPC 法と略記する) は比較判断モデルを改良し, 直線性の仮定の代わりに単調増加関係を仮定している。すなわち, 人が比較判断する際, 与えるべき尺度値の差が大きい試料間の比較ほど判断はより明確になり大きな値の判断結果が得られるものと考え, さらに判断に飽和現象が現れる可能性も考慮してモデル化がなされている。また, 人の判断には曖昧さがあり, ばらつき

も生じるので, 単調増加関係に適当な幅を持たせた帯状の関数で比較判断特性が表現されている。一方, 尺度付けに対応する解を得る場合, 比較判断モデルの関数型を規定していないため一对比較結果から解析的に解を直接得ることはできないので, 単調増加関係を根拠として, 与えるべき尺度値の差の間の大小関係から定まる不等式を利用し, 多数個の大小関係から導かれる連立不等式を解くことにより解を求めている。連立不等式から解が求められることに伴い, 解は一意でなく領域として定まり, この解領域はその端点を意味する複数の稜ベクトルを用いて記述されるが, ここに BMPC 法の大きな特徴が現れる。

BMPC 法のアルゴリズムは最終的に得られる解領域である凸包の端点列挙に帰着される。凸包端点列挙のすぐれたアルゴリズムとして D.Avis らによる Reverse Search⁴⁾がある。このアルゴリズムは与えられた連立不等式に互いに矛盾がなく解が凸包になることが明らかである場合, 非常に有効なアルゴリズムである。しかし, BMPC 法においては, 一对比較表から得られる連立不等式には矛盾する不等式が含まれる可能性が高く, 与えられた連立不等式から凸包がつけられることが保証されていない。そのため, 不等式を選出しては矛盾を起こさず, 採用できるかどうかを判定しながら解領域となる凸包を求める必要がある。そこで, BMPC 法のための連立不等式の解法では, 解領域を逐次的に更新する解領域更新法^{2), 3)}を用いている。ただし, この解法アルゴリズムに

* 東京工業大学大学院理工学研究科
東京都目黒区大岡山 2-12-1

** 中国 清華大学自動化系

* Graduate School of Science and Engineering, Tokyo Institute of Technology, Meguro-ku, Tokyo

** Department of Automation, Tsinghua University, Beijing, CHINA

(Received October 18, 2000)

(Revised April 9, 2001)

においてこれまで多くのメモリ容量と計算時間を必要とし、特に、帯幅が変化することを考慮する解法^{5), 6)}においては、従来よりも多くの不等式を用いて解を求めるためこの問題は深刻となる。

本論文では解領域を求めるための不等式および解領域を記述する稜ベクトルの特質を議論し、その特質を効果的に活用する解領域更新新アルゴリズムを提案すると共に、新アルゴリズムによる計算はメモリ容量の点でも計算時間の点でもはるかに改善された性能を有することを明らかにする。

2. BMPC法の解領域更新アルゴリズムの概要²⁾

2.1 連立不等式の導出²⁾

まず、各試料 $X_i (i = 1, 2, \dots, n)$ があるとき、それぞれに与えるべき尺度値を $m_i (i = 1, 2, \dots, n)$ とし、 X_i の X_j に対する比較判断結果を φ_{ij} とする。

最終的な目標は各試料に対し適切な尺度値 $m_i (i = 1, 2, \dots, n)$ を定めることにあるが、直接入手できる情報は φ_{ij} だけである。そこで、BMPC法では φ_{ij} と m_i, m_j との間に次の関係があるものとする。

$$f_d(m_j - m_i) \leq \varphi_{ij} \leq f_u(m_j - m_i) \quad (1)$$

ここで $f_d(x), f_u(x)$ は x に関する適当な単調増加関数である。

問題は φ_{ij} および式 (1) を出発点として、各試料の尺度値 $m_i (i = 1, 2, \dots, n)$ を求めることであるが、まず簡単のため帯幅 $f_u(x) - f_d(x) \rightarrow 0$ となった極限、つまり $f_d(x) = f_u(x) = f_c(x)$ として、

$$\varphi_{ij} = f_c(m_j - m_i) \quad (2)$$

の場合について考える。ここで、 $f_c(x)$ が単調増加関数であることを考慮すると、一対の $\varphi_{ij}, \varphi_{kl}$ の間の大小関係から、

$$\begin{aligned} \varphi_{ij} > \varphi_{kl} &\iff f_c(m_j - m_i) > f_c(m_l - m_k) \\ &\iff m_j - m_i > m_l - m_k \\ &\iff m_j - m_i - m_l + m_k > 0 \end{aligned} \quad (3)$$

という m_i, m_j, m_k, m_l に関する不等式を導出することができる。

φ_{ij} のすべての対に対し式 (3) のような不等式が得られるから、それらを連立し、得られた連立不等式を解くことによって各試料の尺度値 $m_i (i = 1, 2, \dots, n)$ が定められる。

次に $f_u(x) - f_d(x) \neq 0$ の場合、つまり判断にばらつきや曖昧さがある場合について考える。(Fig. 1 参照)

このとき便宜上帯関数の幅を、

$$\omega(x) = f_u(x) - f_d(x) \quad (4)$$

と表わすことにすると、ある φ_{ij} と φ_{kl} との大小関係から間違いない m_i に関する不等式が導出できるためには、

$$\varphi_{ij} - \omega(m_j - m_i) > \varphi_{kl} \quad (5)$$

が成り立つ必要がある。

Fig. 1 Band function model

そこで非負の定数 ε を仮に採用し、式 (3) の代わりに

$$\begin{aligned} \varphi_{ij} - \varepsilon &> \varphi_{kl} \\ \iff m_j - m_i - m_l + m_k &> 0 \end{aligned} \quad (6)$$

により不等式を導出することとする。

この時、もし ε が小さ過ぎれば、誤った向きの不等号の不等式を採用する可能性が生じ、そのような場合他の不等式と連立させると解は空集合となる。そのようなことが生じた場合は ε を漸増させ改めて不等式を導出することにすれば不等号の逆転した不等式は順次取り除かれ、最終的に正しい向きの不等号のみをもつ連立不等式が得られる。したがって連立不等式が解を持つ最小の ε が定まり、そのような連立不等式について m_i の解を求めることになる。

なお、 m_i については間隔尺度の範囲で数値化することを考えるので原点と単位の取り方に任意性があるが、適当な数値解を得るため、一般性を失うことなく次の式 (8), (9) の条件を付け加える。すなわち BMPC 法での尺度付けは以下の連立不等式を解くことに帰着される。

$$m_{j_s} - m_{i_s} - m_{l_s} + m_{k_s} > 0, s \in \{1, 2, \dots, K\} \quad (7)$$

$$\sum_{i=1}^n m_i = 0 \quad (8)$$

$$\sum_{i=1}^n m_i^2 = 1 \quad (9)$$

ただし、 K は得られる連立不等式の個数である。

2.2 解領域の表現

連立不等式 (7) を行列表現すると

$$A\mathbf{m} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_k \\ \vdots \\ \mathbf{a}_K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{bmatrix} > 0 \quad (10)$$

となる。 A は、これを係数行列と呼ぶが、 $K \times n$ 行列であり、その成分である n 次元行ベクトル $\mathbf{a}_k$ を係数ベクトルと呼ぶ。 $\mathbf{m}$ は n 次元列ベクトルであり、各係数ベクトルは 1 つの不等式を代表している。以上の表記にしたがって、式 (8) と式 (9)

を行列で表現すると、それぞれ、

$$\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{m} = [1, 1, \dots, 1] \cdot \mathbf{m} = 0 \quad (11)$$

$$|\mathbf{m}| = 1 \quad (12)$$

となる。

連立不等式 (10) の中の不等式の一つ

$$\mathbf{a}_k \cdot \mathbf{m} = [a_{k1} a_{k2} \dots a_{kn}] \begin{bmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{bmatrix} > 0 \quad (13)$$

の解は n 次元空間内で原点を通り $\mathbf{a}_k$ を法線とする超平面によって定まる一つの開半空間である。したがって連立不等式 (10) と (11), (12) の解は、それら開半空間の共通領域であり Fig. 2 のように n 次元ユークリッド空間内の式 (10) を満たす超平面を境界面とし原点に頂点を有する凸多面錐の内点で、原点からの距離 1 の点の集合となる。

この凸多面錐の各稜について原点から長さ 1 のベクトルを稜ベクトルと呼び $g_i, i \in \{1, \dots, r\}$ で表わす。また、 $\mathbf{a}_k$ の中からほかの係数ベクトルの非負線形結合で表わせないものを抜き出し、 $h_j, j \in \{1, \dots, s\}$ と表わす。これは、式 (10) の不等式の中から解領域を規定するのに必要十分な不等式を抜き出すことに相当し、これらの h_j を必要十分係数ベクトルと呼ぶ。これによって解 (領域) はつぎのように表現できる。

$$\begin{aligned} & \{\mathbf{m} | \mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{m} = 0, \mathbf{A}\mathbf{m} > 0, |\mathbf{m}| = 1\} \\ &= \{\mathbf{m} | \mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{m} = 0, \mathbf{H}\mathbf{m} > 0, |\mathbf{m}| = 1\} \\ &= \{\mathbf{m} | \mathbf{m} = \sum_{i=1}^r \lambda_i g_i, \lambda_i > 0, |\mathbf{m}| = 1\} \end{aligned} \quad (14)$$

$$\text{ただし, } \mathbf{H} = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_s \end{pmatrix}$$

Fig. 2 Solution domain

2.3 解を求めるアルゴリズムの概要²⁾

以下に BMPC 法の解領域更新法における逐次的解領域更新アルゴリズムを示すが、アルゴリズムは連立不等式を一挙に解くのではなく、必要最小限の個数の連立不等式から適当に初期解を求め、以下、未考慮の不等式を 1 つ追加しては解領域を更新する逐次的アルゴリズムになっている。これは、式 (7) の連立不等式には互いに矛盾する不等式が含まれることが多く、単純に式 (7) から解領域を求めると空集合になる危

険性があるためである。そこで、矛盾のない信頼のおける不等式だけを選び出しつつ順次、解領域を更新する方法をとる。

(1) $\mathbf{a}_k \in \{1, \dots, K\}$ の中から互いに独立な $n-1$ 個の係数ベクトルを抜き出し $\{^0 h_j\}$ とする。

$\{^0 h_j\}$ と $\mathbf{a}_0$ によってできる正方行列の逆行列を求め、その列ベクトルの符合を変えたもののうち $\mathbf{a}_0$ と直交する $n-1$ 個を $g_i, i \in \{1, \dots, n-1\}$ とし、その集合を $\{^0 g_i\}$ で表わす。これにより初期解領域が決まり、 $\{^0 g_i\}$ は初期解領域を表現する稜ベクトルの集合となる。以降、 k 番目までの不等式から得られる解領域を $\{^k h_j\}, \{^k g_i\}$ によって与えられるものとする。

(2) 次に、 $k+1$ 番目の未考慮の係数ベクトル $\mathbf{a}_{k+1}$ を付け加えることによって得られる解領域を求める。まず、

$$p_i = \mathbf{a}_{k+1} \cdot g_i \quad (15)$$

を計算し、 p_i が正、零、負に対応して g_i をそれぞれ g_i^+, g_i^0, g_i^- に分類する。

(3) (a) $\{g_i^+\}$ が空集合の場合

解は空集合となるため $\mathbf{a}_{k+1}$ を係数ベクトルとする不等式が連立不等式に含まれなくなるまで ε を増加させ改めて不等式を導出し、(1) に戻る。

(b) $\{g_i^+\}$ が空集合でなく、 $\{g_i^-\}$ が空集合の場合

新しい係数ベクトルは解領域を変化させないため、解領域の更新の必要はない。これは、係数ベクトル $\mathbf{a}_{k+1}$ に対応する不等式がこの段階までに考慮された不等式について冗長な不等式になっていることを意味する。

(c) $\{g_i^+\}, \{g_i^-\}$ がともに空集合でない場合

それまでの解領域は $\mathbf{a}_{k+1}$ によって二分される。このとき、どの g_i^+ とも直交しない $^k h_j$ は、変更後の解領域を規定するものではないため取り除き $\{^{k+1} h_j\}$ は以下のようになる。

$$\begin{aligned} \{^{k+1} h_j\} &= \mathbf{a}_{k+1} \cup \{h | h \in \{^k h_j\}, \\ &\exists g_i^+ \text{ s.t. } h \cdot g_i^+ = 0\} \end{aligned} \quad (16)$$

$\{^k h_j\}$ の中の独立な $n-3$ 本の係数ベクトルと同時に直交する g^-, g^+ のすべての対に関して以下の式 (17), (18) を用いて新たな稜ベクトル g^{new} をつくる。

$$g'^{new} = (\mathbf{a}_{k+1} \cdot g^-) \cdot g^+ - (\mathbf{a}_{k+1} \cdot g^+) \cdot g^- \quad (17)$$

$$g^{new} = \frac{g'^{new}}{|g'^{new}|} \quad (18)$$

これにより、更新後の新しい解領域を記述する稜ベクトルの集合 $\{^{k+1} g\}$ は

$$\{^{k+1} g_i\} = \{g^+\} \cup \{g^0\} \cup \{g^{new}\} \quad (19)$$

となる。

(4) 未考慮の係数ベクトルがまだ残っていれば (2) に戻る。

以下係数ベクトルをすべて考慮し尽くすまで逐次的に以上を実行する。

3. 稜ベクトルの性質を考慮した解領域更新新アルゴリズム

前章で説明したように、新たな係数ベクトルを考慮したとき、 $\{g_i^+\}\{g_i^-\}$ がともに空集合でなければ解領域は更新される。これは、Fig. 3に図示するように新たに考慮した係数ベクトルに対応する超平面が解領域を分断する場合を意味している。このとき、更新後の解領域の稜ベクトルはすべて改めて求める必要はなく、領域が切断されたことによって新たに生じた稜ベクトルのみを求めればよい。また、新しい解領域を記述するための新しい稜ベクトルは、 g^-, g^+ のすべての対に対して求める必要はなく、 $\{h_i\}$ の中の独立な $n-3$ 本の係数ベクトルと同時に直交する g^-, g^+ のすべての対に関して新しい稜ベクトルを求めればよい。Fig. 3を例にして言えば、 g_1^- と g_6^+ 、および g_4^- と g_5^+ の二組の対についてのみ考えるだけでよい。これらの二組の対における g^-, g^+ の関係を考えると、いずれも解領域の境界をなすある超平面に隣接して並ぶ関係となっていることがわかる。

そこで、本章では、各稜ベクトルの特質の記述方法を工夫することにより、稜ベクトル同士の位置関係の把握を容易にし、隣接して並ぶ稜ベクトルの対を効率的に探し出すため方法を提案する。結果としてこのことにより効率的な解領域更新法が実現される。

Fig. 3 Solution domain renewal

3.1 稜ベクトルの特質の記述⁵⁾

解領域は、式(7)で表わされる K 個の不等式の解の共通領域であり、凸多面錐をなすがその稜線、つまり稜ベクトルについて以下のようなことが指摘できる。すなわち、 $n-1$ 次元超平面同士の交わりによってできる空間は1次元減り $n-2$ 次元になり、さらにその空間と超平面が交わることによってできる空間の次元はまた一つ次元が減ることになる。これを繰返すことを考えると、稜ベクトルの次元は1次元であるから1つの稜ベクトルは $n-2$ 個の超平面の交わりによってできていることになる。このことを考慮すると、各稜ベクトルの特質として以下のことが言える。

「稜ベクトル g_i は、 $\mathbf{a}_0 = \{1, \dots, 1\}$ と直交し、また同時に一次独立な $n-2$ 個の係数ベクトルとも直交している。したがって、どの超平面の交線としてできたかによって各稜ベクトルの特質を記述することができる」

このとき、各稜ベクトル g_i と直交する $\mathbf{a}_0$ 以外の $n-2$ 個の係数ベクトルをその稜ベクトルの「登録係数ベクトル」と呼び、各稜ベクトルはすべて登録係数ベクトルによって特質付けられる。ただし、以降では、たとえベクトルとして全く同じ稜ベクトルでも登録係数ベクトルが異なれば異なる稜ベクトルとし扱うことに注意する。これは、稜ベクトルが直交する $n-2$ の係数ベクトルの組は1種類のみとは限らないためである。

Table 1に BMPC 法における稜ベクトルを記述するデータ構造を示す。

Table 1 Representative indexes of edge vector

ID	The ID Number of Edge Vector
Elements	Elements of Edge Vector.
FaceList	ID's of registered Hyper Planes which are orthogonal to the EdgeVector.

3.2 隣接稜ベクトル対の探索

前節で述べた解領域更新アルゴリズムのとおり解領域更新時、新たな稜ベクトルの計算が必要になるのは、新しい係数ベクトル $\mathbf{a}_{k+1}$ を加えたときに $\{h_i\}$ の中の独立な $n-2$ 本の係数ベクトルと同時に直交する g^-, g^+ のすべての対に対してである。このような対をなす2つの稜ベクトルは互いに隣接する稜ベクトルであり、それぞれの登録係数ベクトルは1つを除き残りはすべて互いに共通する登録係数ベクトルをもつこととなる。

このため、各稜ベクトルについては、そのデータ構造の中に直交する係数ベクトルを登録係数ベクトルとして登録して併せ記憶するものとする。ただしこの場合、係数ベクトルには一貫番号がIDとして付けられ、それらID番号の組を各稜ベクトル固有の標識として活用することとする。

以上の準備の下に、ある稜ベクトル g_1 に隣接する稜ベクトルの探索について考える。 g_1 の標識、すなわちその登録係数ベクトルの一貫番号の組を簡単化のため $[\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{n-2}]$ とし、係数ベクトル $\mathbf{a}_{k+1}$ を追加して考慮した時、前章2.3内のアルゴリズムの概要(3)(c)の状況の下に、解領域が分断されたとする。ここで、 $\mathbf{a}_{k+1}$ のもつIDを δ_{new} とする。

g_1 と隣接する稜ベクトル g_2 のIDは、登録係数ベクトルが一つだけ違うことから $[\delta_1, \dots, \delta_{i-1}, \delta_{i+1}, \dots, \delta_{n-2}, \delta_j]$ と表わすことができる。

ここで、稜ベクトル g_1 の登録係数ベクトルの各ID番号の総和を S_1 とする。

$$S_1 = \sum_{k=1}^n \delta_k \quad (20)$$

一方 S_2 は S_1 を用いて

$$S_2 = S_1 - \delta_i + \delta_j \quad (21)$$

と表わされる。ここで、 g_1 の登録係数ベクトルの番号はID番号の小さい順にソートされているとすれば、 S_2 が最小となるのは $\delta_i = \delta_{n-2}, \delta_j = 0$ のときで、 $S_2 = S_1 - \delta_{n-2}$ とな

る．一方連立に追加される係数ベクトルの順を，その ID 番号の小さい順に合わせるとすれば δ_j の最大は δ_{new} となるため， S_2 が最大となるのは $\delta_i = \delta_1, \delta_j = \delta_{new}$ のときで，最大値は $S_2 = S_1 - \delta_1 + \delta_{new}$ となる．したがって， g_1 に隣接する稜ベクトルの ID 番号総和 S_s は

$$S_1 - \delta_{n-2} \leq S_s \leq S_1 - \delta_1 + \delta_{new} \quad (22)$$

の範囲にあることがわかる．

この点に着目すると，登録係数ベクトルの ID 番号総和によってあらかじめ稜ベクトルをソートしておけば隣接稜ベクトル探索の際その候補を大幅に減らすことができる．

4. 不等式の追加順と計算効率の考察

4.1 不等式追加順による解領域更新経過の変化

BMPC 法において最終的に定まる解領域を記述する不等式の個数は一対比較行列から得られるすべての不等式の個数の数パーセントにすぎない．これは，不等式の大部分が冗長であることを意味している．一方，解領域の更新経過を分析して見るとその更新回数は最終的な解領域を記述する不等式の個数の数十倍にもおよぶことが多い．これはつまり，工夫すれば省くことのできる更新作業を多数行なっていることを示唆している．

そこで簡化のため Fig. 4 に示されるような場合を例にとって考える．図は，新しい超平面 (不等式) を考慮することによって解領域が実線で表わされる領域に更新されることを示しているが，同時に点線で表わされる 3 個の超平面に対応する不等式が新しい不等式によって冗長な不等式になることも意味している．つまり，ここで追加した新しい不等式が先に考慮されていれば省くことのできた解領域更新がここまでの段階までに少なくとも 3 回はあったことになる．

この考え方を進めれば，最終的な解領域を記述する不等式のみを当初から連立させていけば最も少ない更新回数で解領域が得られるということになるが，実際にはどのような不等式の組が最終的な解領域を記述する不等式なのかは最初には不明である．

しかし，明らかに冗長となる不等式を後の段階で考慮するようにすれば，このことによって解領域の更新回数を減らすことは可能となる．したがって，次節では明らかに冗長となる不等式はどのような不等式かについて考察する．

4.2 不等式追加順入れ替えのアルゴリズム

まず，BMPC 法において作られる不等式は，不等式の形式上次の 3 種類に分類される．

- (1) 2つの試料の尺度値の大小関係を直接示す不等式 (直接比較不等式)

$$\varphi_{ij} - \varepsilon > \varphi_{ji} \iff 2m_j - 2m_i > 0 \quad (23)$$

- (2) 2つの試料の尺度値の大小関係を他の試料に対する比較から導出した不等式 (間接比較不等式)

$$\varphi_{ij} - \varepsilon > \varphi_{kj} \iff m_k - m_i > 0 \quad (24)$$

Fig. 4 Image of redundant inequalities

$$\varphi_{ij} - \varepsilon > \varphi_{ik} \iff m_j - m_k > 0 \quad (25)$$

- (3) その他の不等式 (差分比較不等式)

$$\varphi_{ij} - \varepsilon > \varphi_{kl} \iff m_j - m_i - m_l + m_k > 0 \quad (26)$$

$$\varphi_{ij} - \varepsilon > \varphi_{ki} \iff -2m_i + m_j + m_k > 0 \quad (27)$$

なお，直接比較不等式の形式は，結果において間接比較不等式と同じ形式になる．

ここで，次のような二つの直接 (または間接) 比較不等式

$$m_j - m_i > 0 \quad (28)$$

$$m_l - m_k > 0 \quad (29)$$

が存在する場合，以下の差分比較不等式

$$m_j - m_i - m_k + m_l > 0 \quad (30)$$

が存在する可能性はかなり高く，この不等式 (30) は不等式 (28)，(29) に対し常に冗長な不等式となる．したがって，式 (28)，(29) を先に考慮すれば解領域の更新回数を減らすことが可能となる．

そこで，連立不等式に追加する不等式の順序を直接比較不等式 → 間接比較不等式 → 差分比較不等式の順とすることとし，これによって処理時間の短縮を図る．

5. 高速化された解領域更新新アルゴリズム

本章では，前章までに述べた，稜ベクトルの性質，および不等式の連立順を考慮した解領域更新のための新しいアルゴリズムの手順を以下に示す．

- (1) $\mathbf{a}_k \in \{1, \dots, K\}$ を直接比較，間接比較，差分比較の順に並べ変える．

- (2) $\mathbf{a}_k \in \{1, \dots, K\}$ の中から互いに独立な $n-1$ 個の係数ベクトルを抜き出し $\{^0h_j\}$ とする．

$\{^0h_j\}$ と $\mathbf{a}_0$ によってできる正方行列の逆行列を求め，その列ベクトルの符号を変えたもののうち $\mathbf{a}_0$ と直交する $n-1$ 個を $g_i, i \in \{1, \dots, n-1\}$ とし，その集合を $\{^0g_i\}$ で表わす．これにより初期解領域が決まり， $\{^0g_i\}$ は初期解領域を表現する稜ベクトルの集合となる．以降， k 番目までの不等式から得られる解領域を $\{^k h_j\}, \{^k g_i\}$ によって与えられるものとする．

- (3) 次に， $k+1$ 番目の未考慮の係数ベクトル $\mathbf{a}_{k+1}$ を付

け加えることによって得られる解領域を求める。まず、

$$p_i = \mathbf{a}_{k+1} \cdot \mathbf{g}_i \quad (31)$$

を計算し、 p_i が正、零、負に対応して $\mathbf{g}_i$ をそれぞれ $\mathbf{g}_i^+, \mathbf{g}_i^0, \mathbf{g}_i^-$ に分類する。

(4) (a) $\{\mathbf{g}_i^+\}$ が空集合の場合

解は空集合となるため ε を増加させ再び不等式を導出し、(1)に戻る。

(b) $\{\mathbf{g}_i^+\}$ が空集合でなく、 $\{\mathbf{g}_i^-\}$ が空集合の場合

新しい係数ベクトルは解領域を変化させないため、解領域の更新の必要はない。

(c) $\{\mathbf{g}_i^+\}, \{\mathbf{g}_i^-\}$ がともに空集合でない場合

それまでの解領域は $\mathbf{a}_{k+1}$ によって二分される。このとき、どの $\mathbf{g}_i^+$ とも直交しない $\mathbf{h}_j$ は、変更後の解領域を規定するものではないため取り除き $\{\mathbf{h}_j^{k+1}\}$ は以下のようになる。

$$\begin{aligned} \{\mathbf{h}_j^{k+1}\} &= \mathbf{a}_{k+1} \cup \{\mathbf{h} \mid \mathbf{h} \in \{\mathbf{h}_j^k\}, \\ &\quad \exists \mathbf{g}_i^+ \text{ s.t. } \mathbf{h} \cdot \mathbf{g}_i^+ = 0\} \end{aligned} \quad (32)$$

$\{\mathbf{g}_i^+\}$ と $\{\mathbf{g}_i^-\}$ から一つずつ稜ベクトルを選び出し登録係数ベクトルを調べ、 $n-3$ 個の登録係数ベクトルが一致していれば、二つの稜ベクトルは隣接する位置関係にあるため、 $\mathbf{g}^{new}$ を計算する。

$$\begin{aligned} \mathbf{g}^{new} &= (\mathbf{a}_{k+1} \cdot \mathbf{g}^-) \cdot \mathbf{g}^+ - (\mathbf{a}_{k+1} \cdot \mathbf{g}^+) \cdot \mathbf{g}^- \quad (33) \\ \mathbf{g}^{new} &= \frac{\mathbf{g}^{new}}{|\mathbf{g}^{new}|} \quad (34) \end{aligned}$$

$\mathbf{g}^{new}$ の登録係数ベクトルとして共通する $n-3$ 個の係数ベクトルと $\mathbf{a}_{k+1}$ を登録する。すべての $\{\mathbf{g}_i^+\}$ と $\{\mathbf{g}_i^-\}$ の組合せについて同様の操作を行なう。

以上により、更新後の新しい解領域を記述する稜ベクトルの集合 $\{\mathbf{g}\}$ は

$$\{\mathbf{h}_j^{k+1}\} = \{\mathbf{g}^+\} \cup \{\mathbf{g}^0\} \cup \{\mathbf{g}^{new}\} \quad (35)$$

となる。

(5) 登録係数ベクトルのID番号総和によって $\{\mathbf{h}_j^{k+1}\}$ をソートする。

(6) 未考慮の係数ベクトルがまだ残っていれば(3)に戻る。

(7) $\{\mathbf{g}\}$ のそれぞれのベクトルの長さを1に正規化する。

6. 高速化アルゴリズムの効果

本章では、高速化アルゴリズムによる新解法と従来法とにつき計算効率の比較を行なう。人工的に作った一対比較表を対象に計算を行ない、解領域更新回数、途中段階で現れる異なる稜ベクトル数と処理時間、の観点から比較を行なった。

実験に用いた一対比較表は、各試料に固有の得点を与え、その得点差の形で一対比較結果を与えたものである。なお、各試料に与えられる固有の得点はランダムに与えられ、試料数4~10個でそれぞれ10回ずつ異なる一対比較表を作成した。Table 2はそのような一対比較表の一例である。なお、

Table 2 Example of paired comparison table

i \ j	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	-	-82	-66	-36	-55	-6	-8	-55	-80
1	82	-	16	46	27	76	74	27	2
2	66	-16	-	30	11	60	58	11	-14
3	36	-46	-30	-	-19	30	28	-19	-44
4	55	-27	-11	19	-	49	47	0	-25
5	6	-76	-60	-30	-49	-	-2	-49	-74
6	8	-74	-58	-28	-47	2	-	-47	-72
7	55	-27	-11	19	-0	49	47	-	-25
8	80	-2	14	44	25	74	72	25	-

Table 3 Number of solution space renewals

Num.of objects	new method	old method
4	12.4	20.0
5	27.9	52.3
6	52.1	114
7	105	218
8	171	380
9	253	-
10	375	-

いずれの場合も試料数9, 10に対する従来法の計算は、処理に時間がかかりすぎ計算が困難なため行っていない。

Table 3は従来法と新解法による解領域更新回数の平均を比べたものである。表を見れば、従来法に比較し、新アルゴリズムでは、解領域の更新回数が半分程度になっていることがわかる。また、途中段階で現れる異なる稜ベクトルの総数はTable 4のようであり、試料数8の場合で稜ベクトル総数は1/4程度に減っている。試料数が増加すればするほどより効果が期待でき、これによってメモリ容量を大幅に節約することが可能であると言える。

一方、最終的な解領域を求めるまでの計算時間の平均はTable 5のようである。なお、表中の()内にその標準偏差を示す。これら表からわかるとおり試料数が増えるにつれ高速化の効果は大きく、試料数を8にした場合は計算時間が1/10程度にまで短縮されている。この結果、旧解法では処理に時間がかかり過ぎ、対応できなかった試料数の多い一対比較データについても解を求めることが可能となり、多数の試料を用いる検査に関する尺度付けに道を拓くものであることが明らかになった。同様に、被験者の個人差分析⁷⁾においても、計算対象となる一対比較表の個数が多くなるため、高速化は大きな効果をもたらすものと期待できる。

Table 4 Number of appeared edge vectors

Num.of objects	new method	old method
4	21.8	37.0
5	122.9	285
6	604	2176.4
7	5040	17900
8	34200	138000
9	59500	-
10	427000	-

Table 5 Spent time compairison

Num.of objects	new method	old method
4	0.006sec(0.00)	0.02sec(0.00)
5	0.021(0.00)	0.03(0.00)
6	0.087(0.01)	0.197(0.02)
7	0.74(0.23)	4.01(0.72)
8	13.1(5.0)	135(37.2)
9	29.6(7.8)	-
10	1954(2510)	-

7. 結 論

以上、解領域を記述する稜ベクトルの性質を分析し、データ構造として「登録係数ベクトル」を活用することを提案し、この方法により解領域更新時、隣接稜ベクトルの探索が容易になることを明らかにした。また、BMPC法において不等式を立てる際に冗長な不等式が数多くできることから、不等式を連立不等式に追加する順番について考察し、直接比較不等式および間接比較不等式を差分比較不等式に先行させる方法を提案し、効率的な解領域更新が行なえることを実証した。2つの新手法の導入により計算速度、必要メモリー容量は大幅に改善され、これまで計算が困難であった個数の多い試料に対する尺度付けの計算も容易に行なうことができるようになった。

参 考 文 献

- 1) 小林, 芝田: 対比較のための非計量的手法. 計測自動制御学会論文集, 14-2, 189/195(1978)
- 2) 小林, 坂本: 帯関数モデル型対比較法のための数値処理法とその解領域. 計測自動制御学会論文集, 18-4, 377/384(1982)
- 3) 小林, 坂本: 帯関数モデル型対比較法であらわれる連立不等式の誤差を含まない数値計算法. 計測自動制御学会論文集, 19-7, 544/550(1983)
- 4) D.Avis and K.Fukuda: A Reverse search for enumeration. Discrete Applied Mathematics, 65, 21/46(1996)
- 5) 青木, 曹, 大山, 小林: 帯関数モデル型対比較法による人間感覚の数量化. 第13回センシングフォーラム資料, 141/146(1996)
- 6) 鳥海, 大山, 小林: BMPC法における矛盾不等式排除方法と高速化処理アルゴリズム. 第38回SICE学術講演会予稿集, 639/640(1999)
- 7) 鳥海, 大山, 小林: BMPC法における評価関数を用いた被験者の選別. 第39回SICE学術講演会予稿集, 講演番号202A-3(2000)

[著 者 紹 介]

鳥 海 不二夫 (学生会員)

2001年, 東京工業大学大学院理工学研究科制御工学専攻修士課程修了, 同年同大学院理工学研究科機械制御システム専攻博士課程入学, 現在に至る。

曹 麗 (正会員)

1992年, 東京工業大学大学院博士課程修了. 同年花王(株)入社. 94年東京工業大学助手. 98年より中国清華大学 自動化系 副教授, 現在に至る. 空間フィルタリング計測法, 官能検査, 多次元信号処理およびセンサ応用の研究に従事. 88年度本学会学術奨励賞受賞(工学博士).

大 山 真 司 (正会員)

1984年, 東京工業大学大学院修士課程修了. 同年(株)日立製作所日立研究所入社. 90年, 東京工業大学工学部助手, 現在, 同学大学院理工学研究科助教授. 計測工学, 計測システム構成論等の研究, 教育に従事. 86年度本学会論文賞受賞. IEEE, 電子情報通信学会の会員(工学博士).

小 林 彬 (正会員)

1969年, 東京工業大学大学院博士課程修了. 同年東京工業大学助手. 87年同教授, 現在に至る. 計測用空間フィルタ, 感覚計測, 解領域法による信号処理, 信号場, 高SN比計測法などの研究に従事. 73, 80, 86年度本学会論文賞受賞. 本会フェロー(工学博士).