正規直交梯子形フィルタ構造を用いた 低感度状態推定フィードバック制御器の合成[†]

雛元孝夫*・井上卓也*

Synthesis of State-Estimate Feedback Controllers with Very Low L_2 -Sensitivity
Using Orthonormal Ladder Filter Structures[†]

Takao HINAMOTO* and Takuya INOUE*

For a continuous-time linear system, a measure for evaluating the L_2 -sensitivity of a closed-loop transfer function with respect to the coefficients of a state-estimate feedback controller is presented by using a pure L_2 norm and taking into account 0, ± 1 coefficients. A technique is then developed for synthesizing a state-estimate feedback controller in orthonormal ladder filter structure with several 0 coefficients. Finally, through a numerical example it is shown that the state-estimate feedback controller realized in orthonormal ladder filter structure has very low L_2 -sensitivity.

Key Words: state-estimate feedback controllers, orthonormal ladder filters, very low L_2 -sensitivity, linear continuous-time systems

1. ま え が き

制御対象の線形連続時間システムに、状態観測器とレギュレータからなる状態推定フィードバック制御器を用いて所望の極配置を行ない、閉ループシステム全体の安定化を図る場合、回路的に構成された状態推定フィードバック制御器のパラメータ値が環境の変化などによって変動する可能性がある。このほか、モデリングの際の非線形性の線形化による誤差や動特性の測定誤差などによる影響も考えられる。このため、状態推定フィードバック制御器のパラメータ変動や誤差が、閉ループシステムの入出力特性に与える偏差を最小にするロバストな状態推定フィードバック制御器のシステム構造を統一的に合成する技術の開発が望まれる。この閉ループシステムの入出力特性の偏差を小さく抑えるための一つの方法は、状態推定フィードバック制御器を記述する状態空間モデルの係数に対する閉ループシステムの伝達関数感度を最小化するように、制御器のシステム構造を合成することである。

これまでに、この種の研究が状態空間デジタルフィルタにおける係数感度最小化問題について数多く行なわれて来た^{1)~11)}。これらの研究は、 L_1 ノルムと L_2 ノルムを混在し

て係数感度を評価しその上限値を最小化する場合^{1)~7)}、 L_2 ノルムのみを用いて係数感度を評価しこれを直接最小化する場合^{8)~11)}の2つに大別される。このうち、前者については得られた上限値が見かけ上 L_2 ノルムに統一されており解析が容易になっている。一方、後者については最初から L_2 ノルムに統一されている点で合理性はあるが、解析が難しくなる。換言すれば、前者では解析的に閉じた形で最適解が求まるのに対し、後者では逐次的にしか最適解を求めることができない。

また、線形連続時間システムにおいてパラメータ変動による入出力特性の劣化を最小にするロバストなシステム構造を統一的に設計する研究もいくつか報告されている^{12)~19)}。ここでは、 L_1/L_2 ノルムの混成を用いて係数感度を評価しその上限値を最小化する場合^{16), 17)}、統計的感度を最小化する場合¹⁸⁾、 L_2 ノルムのみを用いて係数感度を評価しこれを最小化する場合¹⁹⁾がある。

さらに、線形離散時間システムで記述された制御対象に対して、状態推定フィードバックデジタル制御器を構成し、その係数量子化誤差に起因した閉ループシステムの入出力特性の偏差を小さく抑える技術についても研究が行なわれている^{20), 21)}。一つは L_1/L_2 ノルムが混在した形で係数感度を評価し²⁰⁾、ほかは L_2 ノルムのみを用いて係数感度を評価している²¹⁾。

本論文では、線形連続時間システムで記述された制御対象に対して、状態推定フィードバック制御器の係数変動に対する閉ループシステムの入出力特性の偏差を評価する関数を導

[†] 第16回 IEICE デジタル信号処理シンポジウムで発表 (2001・11)

* 広島大学大学院工学研究科 東広島市鏡山 1-4-1

* Graduate School of Engineering, Hiroshima University, Higashi-Hiroshima

(Received December 3, 2001)

(Revised August 23, 2002)

出し、正規直交梯子形フィルタ構造を用いた状態推定フィードバック制御器の合成法について提案している。ここでは、 L_2 ノルムのみを用いて 0, ± 1 要素を考慮した係数感度の評価を行なっている。また、係数行列に 0 要素を数多く含む正規直交梯子形フィルタ構造²²⁾を用いて状態推定フィードバック制御器を構成している。0 要素は回路的には非接続を意味しており、これらの要素が数多く含まれていれば回路構成がそれだけ簡単になり実現コストが安価になる。また、これらの要素はパラメータ変動を生じないために、閉ループシステムの入出力特性の偏差に直接影響を及ぼさない¹¹⁾。最後に、正規直交梯子形フィルタ構造を用いて状態推定フィードバック制御器を実現した場合、制御器の閉ループシステムに対する係数感度を大幅に低減出来ることが、数値例を通して確認されている。

2. 状態推定フィードバック制御器の感度解析

つぎの可制御かつ可観測で安定な線形システム

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}_o \mathbf{x}(t) + \mathbf{b}_o u(t) \\ y(t) &= \mathbf{c}_o \mathbf{x}(t)\end{aligned}\quad (1)$$

について考える。ただし、 $\mathbf{x}(t)$ は $n \times 1$ 状態変数ベクトル、 $u(t)$ はスカラー入力、 $y(t)$ はスカラー出力、さらに $\mathbf{A}_o, \mathbf{b}_o, \mathbf{c}_o$ は適当なサイズの実行列である。(1) 式の伝達関数は

$$H_o(s) = \mathbf{c}_o (s\mathbf{I} - \mathbf{A}_o)^{-1} \mathbf{b}_o \quad (2)$$

によって与えられる。

このシステムに対して同次元オブザーバを利用したレギュレータを設計したとき、つぎの状態推定フィードバック制御器が得られる。

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) &= \mathbf{D}_o \hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{b}_o u(t) + \mathbf{g}_o y(t) \\ u(t) &= -\mathbf{k}_o \hat{\mathbf{x}}(t) + r(t)\end{aligned}\quad (3)$$

ただし、 $\hat{\mathbf{x}}(t)$ はオブザーバの $n \times 1$ 状態変数ベクトル、 $r(t)$ はスカラー参照信号、 $\mathbf{g}_o$ は $n \times 1$ オブザーバ係数ベクトル、 $\mathbf{k}_o$ は $1 \times n$ フィードバック係数ベクトルである。さらに、

$$\mathbf{D}_o = \mathbf{A}_o - \mathbf{g}_o \mathbf{c}_o \quad (4)$$

(3) 式のシステムを実際に実現したとき、現実の状態推定フィードバック制御器は、次式によって記述されるものとする。

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) &= \mathbf{D} \hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{b} u(t) + \mathbf{g} y(t) \\ u(t) &= -\mathbf{k} \hat{\mathbf{x}}(t) + r(t)\end{aligned}\quad (5)$$

(1) 式と (5) 式によって表わされたシステムの構成が、Fig. 1 のブロック線図によって示される。

Fig. 1 に示された閉ループシステムは

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_o & -\mathbf{b}_o \mathbf{k} \\ \mathbf{g} \mathbf{c}_o & \mathbf{D} - \mathbf{b} \mathbf{k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \hat{\mathbf{x}}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{b}_o \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} r(t) \\ y(t) &= [\mathbf{c}_o \quad \mathbf{0}] \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \hat{\mathbf{x}}(t) \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (6)$$

によって表わされる。また、閉ループシステムの伝達関数は

Fig. 1 The control system with a state-estimate feedback controller

$$H_c(s) = \bar{\mathbf{c}}(s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}})^{-1} \bar{\mathbf{b}} \quad (7)$$

で与えられる。ただし、

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{A}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_o & -\mathbf{b}_o \mathbf{k} \\ \mathbf{g} \mathbf{c}_o & \mathbf{D} - \mathbf{b} \mathbf{k} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_o \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} \\ \bar{\mathbf{c}} &= [\mathbf{c}_o \quad \mathbf{0}]\end{aligned}$$

ここでは、状態推定フィードバック制御器の係数行列 $\mathbf{D}, \mathbf{b}, \mathbf{k}, \mathbf{g}$ の各要素 d_{ik}, b_i, k_i, g_i に対する $H_c(s)$ の感度を定義し、これらを $\mathbf{A}_o, \mathbf{b}_o, \mathbf{c}_o, \mathbf{k}_o, \mathbf{g}_o$ の値を用いて評価する。すなわち、

$$\begin{aligned}S_{d_{ik}} &= \frac{\partial H_c(s)}{\partial d_{ik}} = -\mathbf{G}(s) \mathbf{e}_i \mathbf{W}_1(s) \mathbf{e}_k^T \mathbf{F}(s) \phi_{ik} \\ S_{b_i} &= \frac{\partial H_c(s)}{\partial b_i} = -\mathbf{W}_1(s) (1 - \mathbf{W}_2(s)) \mathbf{G}(s) \mathbf{e}_i \varphi_i \\ S_{k_i} &= \frac{\partial H_c(s)}{\partial k_i} = -\mathbf{F}^T(s) \mathbf{W}_1(s) \mathbf{e}_i \psi_i \\ S_{g_i} &= \frac{\partial H_c(s)}{\partial g_i} = -\mathbf{W}_1^2(s) \mathbf{G}(s) \mathbf{e}_i \gamma_i\end{aligned}\quad (8)$$

ここで、 $\mathbf{e}_i$ と $\mathbf{e}_k$ はそれぞれ第 i 要素または第 k 要素が 1 の $n \times 1$ 単位ベクトルである。また、

$$\phi_{ik} = \begin{cases} 0, & \text{for } d_{ik} = 0, \pm 1 \\ 1, & \text{for } d_{ik} \neq 0, \pm 1 \end{cases}$$

$$\varphi_i = \begin{cases} 0, & \text{for } b_i = 0, \pm 1 \\ 1, & \text{for } b_i \neq 0, \pm 1 \end{cases}$$

$$\psi_i = \begin{cases} 0, & \text{for } k_i = 0, \pm 1 \\ 1, & \text{for } k_i \neq 0, \pm 1 \end{cases}$$

$$\gamma_i = \begin{cases} 0, & \text{for } g_i = 0, \pm 1 \\ 1, & \text{for } g_i \neq 0, \pm 1 \end{cases}$$

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{k}_o [s\mathbf{I} - (\mathbf{A}_o - \mathbf{g}_o \mathbf{c}_o)]^{-1}$$

$$\mathbf{F}(s) = [s\mathbf{I} - (\mathbf{A}_o - \mathbf{b}_o \mathbf{k}_o)]^{-1} \mathbf{b}_o$$

$$\mathbf{W}_1(s) = \mathbf{c}_o [s\mathbf{I} - (\mathbf{A}_o - \mathbf{b}_o \mathbf{k}_o)]^{-1} \mathbf{b}_o$$

$$\mathbf{W}_2(s) = \mathbf{k}_o [s\mathbf{I} - (\mathbf{A}_o - \mathbf{b}_o \mathbf{k}_o)]^{-1} \mathbf{b}_o$$

定義 1: $X(s)$ を複素変数 s に関する $m \times n$ 複素行列関数, $x_{kr}(s)$ をその第 (k, r) 要素とする. このとき, $X(s)$ の L_p ノルムを次式で定義する.

$$\|X\|_p = \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \|X(jw)\|_F^p dw \right]^{\frac{1}{p}} \quad (9)$$

ただし, $\|X(jw)\|_F$ はつぎのような Frobenius ノルムである.

$$\begin{aligned} \|X(jw)\|_F &= \left[\sum_{k=1}^m \sum_{r=1}^n |x_{kr}(jw)|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= [\text{tr}(X^*(jw)X(jw))]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

定義 1 を用いると, (5) 式の実現 $(D, b, k, g)_n$ に対する伝達関数の L_2 ノルムのみを用いた係数感度は,

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial H_c(s)}{\partial d_{ik}} \right) \left(\frac{\partial H_c(s)}{\partial d_{ik}} \right)^* \right. \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H_c(s)}{\partial b_i} \right) \left(\frac{\partial H_c(s)}{\partial b_i} \right)^* \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H_c(s)}{\partial k_i} \right) \left(\frac{\partial H_c(s)}{\partial k_i} \right)^* \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H_c(s)}{\partial g_i} \right) \left(\frac{\partial H_c(s)}{\partial g_i} \right)^* \right] ds \quad (10) \end{aligned}$$

によって定義される. (8) 式を (10) 式に代入すれば,

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} |S_{d_{ik}}|^2 ds \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} |S_{b_i}|^2 ds \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} |S_{k_i}|^2 ds \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} |S_{g_i}|^2 ds \quad (11) \end{aligned}$$

が得られる. (11) 式に (8) 式の右辺を代入して各項を計算すれば,

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \phi_{ik} k_o M_1(\Phi_{1ik}) k_o^T + \sum_{i=1}^r \varphi_i W_9(i, i) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \psi_i K_1(i, i) + \sum_{i=1}^n \gamma_i N_9(i, i) \quad (12) \end{aligned}$$

になる (付録参照). ここで, M_1, W_9, K_1, N_9 はつぎのリアプノフ方程式を解くことによって求めることができる.

$$\begin{aligned} \Phi_{1ik} \begin{bmatrix} M_1 & M_2 & M_3 \\ M_4 & M_5 & M_6 \\ M_7 & M_8 & M_9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_1 & M_2 & M_3 \\ M_4 & M_5 & M_6 \\ M_7 & M_8 & M_9 \end{bmatrix} \Phi_{1ik}^T \\ = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_o b_o^T \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_2^T \begin{bmatrix} W_1 & W_2 & W_3 \\ W_4 & W_5 & W_6 \\ W_7 & W_8 & W_9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} W_1 & W_2 & W_3 \\ W_4 & W_5 & W_6 \\ W_7 & W_8 & W_9 \end{bmatrix} \Phi_2 \\ = - \begin{bmatrix} c_o^T c_o & -c_o^T c_o & 0 \\ -c_o^T c_o & c_o^T c_o & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\Phi_3 \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \\ K_3 & K_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \\ K_3 & K_4 \end{bmatrix} \Phi_3^T = - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b_o b_o^T \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Phi_4^T \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 \\ N_4 & N_5 & N_6 \\ N_7 & N_8 & N_9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 \\ N_4 & N_5 & N_6 \\ N_7 & N_8 & N_9 \end{bmatrix} \Phi_4 \\ = - \begin{bmatrix} c_o^T c_o & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (13) \end{aligned}$$

ただし,

$$\begin{aligned} \Phi_{1ik} &= \begin{bmatrix} A_o - g_o c_o & e_i c_o & 0 \\ 0 & A_o - b_o k_o & b_o e_k^T \\ 0 & 0 & A_o - b_o k_o \end{bmatrix} \\ \Phi_2 &= \begin{bmatrix} A_o - b_o k_o & b_o k_o & 0 \\ 0 & A_o - b_o k_o & b_o k_o \\ 0 & 0 & A_o - g_o c_o \end{bmatrix} \\ \Phi_3 &= \begin{bmatrix} A_o - b_o k_o & b_o c_o \\ 0 & A_o - b_o k_o \end{bmatrix} \\ \Phi_4 &= \begin{bmatrix} A_o - b_o k_o & b_o c_o & 0 \\ 0 & A_o - b_o k_o & b_o k_o \\ 0 & 0 & A_o - g_o c_o \end{bmatrix} \end{aligned}$$

また, $M_1(\Phi_{1ik})$ は Φ_{1ik} に依存し, 所与の Φ_{1ik} に対する行列 M_1 の値を表す. さらに, $W_9(i, i)$, $K_1(i, i)$, $N_9(i, i)$ はそれぞれ行列 W_9 , K_1 , N_9 の第 (i, i) 要素を表す.

3. 正規直交梯子形フィルタ構造をもつ状態推定フィードバック制御器の合成

3.1 正規直交梯子形フィルタ

つぎの状態空間モデル $(A_{orth}, b_{orth}, c_{orth})_n$ について考える²²⁾.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_{orth} x(t) + b_{orth} u(t) \\ y(t) &= c_{orth} x(t) \end{aligned} \quad (14)$$

ただし, $u(t)$ はスカラー入力, $x(t)$ は $n \times 1$ 状態変数ベクトル, $y(t)$ はスカラー出力, A_{orth} と b_{orth} はそれぞれ $n \times n$ と

$n \times 1$ の行列でつぎのように表わされる.

$$\mathbf{A}_{orth} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha_1 & & & 0 \\ -\alpha_1 & 0 & \alpha_2 & & \\ & -\alpha_2 & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & & -\alpha_{n-1} & -\alpha_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b}_{orth} = [0, \dots, 0, \sqrt{2\alpha_n}]^T \quad (15)$$

ここで, $\alpha_i > 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) は実数である. $\mathbf{A}_{orth}$ は 3 重対角行列で非零対角要素を除けば歪対称行列になる. $\mathbf{b}_{orth}$ は最終要素を除きすべて 0 である. $\mathbf{c}_{orth}$ は n 次元の行ベクトルで特に制限はない. (14) 式の伝達関数は次式によって与えられる.

$$H_s(s) = \mathbf{c}_{orth}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{orth})^{-1}\mathbf{b}_{orth} \quad (16)$$

(15) 式で与えられた係数行列をもつフィルタは正規直交フィルタと呼ばれる. $n = 5$ のときの正規直交フィルタのブロック線図が Fig. 2 に示される.

次数が n の場合, 正規直交フィルタは Fig. 3 に示される 2 端子 LC 梯子形フィルタから容易に合成できる. すなわち, 2 端子 LC 梯子形フィルタの分母は伝達関数 $H_s(s) = P_s(s)/E_s(s)$ としたとき, 連分数展開²³⁾を用いて

$$E_s(s) = r_n s + \frac{1}{r_{n-1}s + \frac{1}{r_{n-2}s + \frac{1}{r_{n-3}s + \frac{1}{\ddots \frac{1}{r_1 s}}}}} \quad (17)$$

と表わすことができる. そして, その状態空間モデルにおける係数行列 $\mathbf{A}_{LC}$ と $\mathbf{b}_{LC}$ は, つぎのように与えられる.

$$\mathbf{A}_{LC} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{r_1} & & & 0 \\ -\frac{1}{r_2} & 0 & \frac{1}{r_2} & & \\ & -\frac{1}{r_3} & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & & -\frac{1}{r_n} & \frac{1}{r_n} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b}_{LC} = [0, \dots, 0, \frac{1}{r_n}]^T \quad (18)$$

このモデルの状態変数をスケールリングすることによって, (15) 式の係数行列をもつ正規直交フィルタに変換できる. すなわち,

$$\mathbf{A}_{orth} = \mathbf{T}\mathbf{A}_{LC}\mathbf{T}^{-1}, \quad \mathbf{b}_{orth} = \mathbf{T}\mathbf{b}_{LC} \quad (19)$$

ただし,

$$\mathbf{T} = \text{diag}(\sqrt{2r_1}, \sqrt{2r_2}, \dots, \sqrt{2r_n})$$

$$\alpha_i = \sqrt{\frac{1}{r_i r_{i+1}}} \quad (1 \leq i \leq n-1), \quad \alpha_n = \frac{1}{r_n}.$$

Fig. 2 Block diagram of an orthonormal ladder filter

2 端子 LC 梯子形フィルタから導かれた (14) 式と (15) 式によって記述されるフィルタは, 正規直交梯子形フィルタと呼ばれる.

(14) の双対フィルタは $(\mathbf{A}_{orth}^T, \mathbf{c}_{orth}^T, \mathbf{b}_{orth}^T)_n$ によって表わされる. この場合, もとのフィルタとその双対フィルタは同じ伝達関数をもつ.

3.2 状態推定フィードバック制御器の合成

(3) 式の状態推定フィードバック制御器は, 2 入力 1 出力システムとみなされる. 正規直交フィルタでは極が指定されたとき, (14) 式の $\mathbf{A}_{orth}$ と $\mathbf{b}_{orth}$ は一意的に決定される.

状態推定フィードバック制御器では, 2 つの入力係数ベクトル $\mathbf{b}_o$ と $\mathbf{g}_o$ があるため正規直交フィルタをそのまま用いることはできない. 一方, 出力係数ベクトル $\mathbf{k}_o$ は 1 つである. そのため, ここでは正規直交フィルタの転置形である双対フィルタを用いることにする.

まず, 入力係数ベクトルを $\mathbf{b}_o$ とした場合と $\mathbf{g}_o$ とした場合の伝達関数を, それぞれつぎのように表わす.

$$H_1(s) = \mathbf{k}_o(s\mathbf{I} - \mathbf{D}_o)^{-1}\mathbf{b}_o = \frac{P_1(s)}{E(s)} \quad (20)$$

$$H_2(s) = \mathbf{k}_o(s\mathbf{I} - \mathbf{D}_o)^{-1}\mathbf{g}_o = \frac{P_2(s)}{E(s)}$$

つぎに, $E(s)$ を連分数展開して 2 端子 LC 梯子形フィル

Fig. 3 A singly terminated ladder and its states

タを導き、これにスケーリングを施して正規直交梯子形フィルタの係数行列 D_{orth} と $b_{orth} = g_{orth}$ を得る。

また、2つの可制御対 (D_o, b_o) と (D_{orth}, b_{orth}) 間の座標変換行列 T_1 、2つの可制御対 (D_o, g_o) と (D_{orth}, g_{orth}) 間の座標変換行列 T_4 をそれぞれ次式から求める。

$$\begin{aligned} T_1 &= [b_o, D_o b_o, \dots, D_o^{n-1} b_o] \\ &\quad \cdot [b_{orth}, D_{orth} b_{orth}, \dots, D_{orth}^{n-1} b_{orth}]^{-1} \\ T_2 &= [g_o, D_o g_o, \dots, D_o^{n-1} g_o] \\ &\quad \cdot [g_{orth}, D_{orth} g_{orth}, \dots, D_{orth}^{n-1} g_{orth}]^{-1} \end{aligned} \quad (21)$$

したがって、 $H_1(s)$ と $H_2(s)$ における正規直交フィルタの出力係数ベクトル k_1 と k_2 は、それぞれ次式から求めることができる。

$$k_1 = k_o T_1, \quad k_2 = k_o T_2 \quad (22)$$

以上より、各入力係数ベクトルに対する2つの正規直交梯子形フィルタが合成できる。

このとき、状態推定フィードバック制御器は次式によって与えられる。

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}(t) &= D_{orth}^T \tilde{x}(t) + k_1^T u(t) + k_2^T y(t) \\ u(t) &= -b_{orth}^T \tilde{x}(t) + r(t) \end{aligned} \quad (23)$$

4. 数 値 例

つぎの線形連続時間システムを取り上げる。²⁴⁾

$$\begin{aligned} A_o &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1.2440 \\ 1 & 0 & 0.3956 \\ 0 & 1 & -3.1450 \end{bmatrix}, \quad b_o = \begin{bmatrix} 1.2440 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ c_o &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

このシステムに対する同一次数状態オブザーバの極を $-2 \pm j2\sqrt{3}$, $-\frac{7}{2}$, レギュレータの極を $-\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{2}{3}$ とした場合、状態オブザーバの係数ベクトル g_o と状態フィードバックの係数ベクトル k_o は、

$$g_o = [57.2440, 30.3956, 4.3550]^T$$

$$K_o = [-1.1884, 5.3952, -15.9021]$$

となり、係数行列 D_o がつぎのように計算される。

$$D_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -56.0000 \\ 1 & 0 & -30.0000 \\ 0 & 1 & -7.5000 \end{bmatrix}$$

このとき、 L_2 感度が (12) 式からつぎのように計算される。

$$S = 175.6970$$

つぎに、(20) 式で表わされる $H_1(s)$ と $H_2(s)$ が、

$$\begin{aligned} H_1(s) &= \frac{P_1(s)}{E(s)} \\ &= \frac{-1.4783s^2 - 4.3759s - 13.7950}{s^3 + 7.5000s^2 + 30.0000s + 56.0000} \\ H_2(s) &= \frac{P_2(s)}{E(s)} \\ &= \frac{26.7095s^2 + 130.1495s + 72.2157}{s^3 + 7.5000s^2 + 30.0000s + 56.0000} \end{aligned}$$

のように求められる。 $E(s)$ を連分数展開したとき、(18) 式で示される各要素の値がつぎのように求まる。

$$(r_1, r_2, r_3) = (0.4024, 0.3328, 0.1333)$$

また、(19) 式を用いて

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (2.7325, 4.7469, 7.5000)$$

が得られる。これより、 D_{orth} と $b_{orth} = g_{orth}$ は、

$$\begin{aligned} D_{orth} &= \begin{bmatrix} 0 & 2.7325 & 0 \\ -2.7325 & 0 & 4.7469 \\ 0 & -4.7469 & -7.5000 \end{bmatrix} \\ b_{orth} = g_{orth} &= [0 \quad 0 \quad 3.8730]^T \end{aligned}$$

のように求まる。また、(21) 式を用いて T_1 と T_2 を求めた後、 k_1 と k_2 がつぎのように求まる。

$$k_1 = [-0.0549, -0.2380, -0.3817]$$

$$k_2 = [-2.5323, 7.0792, 6.8964]$$

このとき、得られた状態推定フィードバック制御器の L_2 感度の値は、つぎのように計算される。

$$S = 13.3394$$

ここで、初期実現、 L_2 感度最小実現²⁵⁾、本論文で提案した正規直交フィルタ構造による実現のそれぞれについて、 L_2 感度の値を Table 1 にまとめている。

Table 1 L_2 -sensitivity in each realization

Realization	L_2 -Sensitivity
Original	175.6970
L_2 -Optimal	21.3734
Orthonormal	13.3394

Table 1 より、正規直交フィルタ構造は初期実現に比べて感度が非常に小さく、係数変動に対して入出力特性の劣化が少ない実現であることがわかる。この場合、不感要素 0 を多く含んでいるために、 L_2 感度最適実現に比べてより低い L_2 感度を達成している。また、正規直交フィルタ構造は L_2 感度最適実現に比べて構造的に簡単であり、コスト面でも有利な実現であるといえる。

5. む す び

線形連続時間システムにおいて、状態推定フィードバック制御器を含む閉ループシステムを対象に、 L_2 ノルムのみを用いて 0, ± 1 要素を考慮した、状態推定フィードバック制御器の係数に対する閉ループシステムの伝達関数感度を評価する関数を導出した。つぎに、正規直交梯子形フィルタ構造を用いて、状態推定フィードバック制御器を合成する方法を提案した。最後に、正規直交梯子形フィルタ構造を用いて実現されたフィードバック制御器が低感度になることを数値例を通して確認した。

参 考 文 献

- 1) L. Thiele: Design of Sensitivity and Roundoff Noise Optimal State-Space Discrete Systems, *Int. J. Circuit Theory, Applications*, **12**-1, 39/46 (1984)
- 2) V. Tavsanglu and L. Thiele: Optimal Design of State-Space Digital Filters by Simultaneous Minimization of Sensitivity and Roundoff Noise, *IEEE Trans. Circuits Syst., CAS-31*-10, 884/888 (1984)
- 3) 川又, 岩月, 樋口: 線形システムにおける感度最小構造としての平衡実現, 計測自動制御学会論文集, **21**-9, 900/906 (1985)
- 4) L. Thiele: On the Sensitivity of Linear State-Space Systems, *IEEE Trans. Circuits Syst., CAS-33*-5, 502/510 (1986)
- 5) M. Iwatsuki, M. Kawamata and T. Higuchi: Statistical Sensitivity and Minimum Sensitivity Structures with Fewer Coefficients in Discrete Time Linear Systems, *IEEE Trans. Circuits Syst.*, **37**-1, 72/80 (1990)
- 6) 雛元, ヌリ-シラジマハダド, 山口: 多入力多出力状態空間ディジタルフィルタに対する周波数依存重み付き感度の最小化, 信学論 (A), **J73-A**-6, 1058/1065 (1990)
- 7) G. Li, B.D.O. Anderson, M. Gevers and J.E. Perkins: Optimal FWL Design of State-Space Digital Systems with Weighted Sensitivity Minimization and Sparseness Consideration, *IEEE Trans. Circuits Syst.-I*, **39**-5, 365/377 (1992)
- 8) D.V. Bhaskar Rao: Analysis of Coefficient of Quantization Errors in State-Space Digital Filters, *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, **ASSP-34**-1, 131/139 (1986)
- 9) W.-Y. Yan and J.B. Moore: On L^2 -Sensitivity Minimization of Linear State-Space Systems, *IEEE Trans. Circuits Syst.-I*, **39**-8, 641/648 (1992)
- 10) M. Gevers and G. Li: Parametrizations in Control, Estimation and Filtering Problems: Accuracy Aspects, Springer-Verlag (1993)
- 11) C. Xiao: Improved L_2 -Sensitivity for State-Space Digital System, *IEEE Trans. Signal Processing*, **45**-4, 837/840 (1997)
- 12) W.J. Kerwin, L.P. Huelsman and R.W. Newcomb: State-Variable Synthesis for Insensitive Integrated Circuit Transfer Functions, *IEEE J. Solid-State Circuits*, **SC-2**-9, 87/92 (1967)
- 13) 藤田昭平: 最小感度の定係数線形系の一構成法, 制御工学, **13**-3, 208/216 (1969)
- 14) R. MacKay and A. Sedra: Generation of Low-Sensitivity State-Space Active Filters, *IEEE Trans. Circuits Syst.*, **CAS-27**-10, 863/870 (1980)
- 15) W.M. Snelgrove and A.S. Sedra: Synthesis and Analysis of State-Space Active Filters Using Intermediate Transfer Functions, *IEEE Trans. Circuits Syst.*, **CAS-33**-3, 287/301 (1986)
- 16) W.J. Lutz and S.L. Hakimi: Design of Multi-Input Multi-Output Systems with Minimum Sensitivity, *IEEE Trans. Circuits Syst.*, **35**-9, 1114/1122 (1988)
- 17) 岩月, 川又, 樋口: 連続時間線形システムにおける周波数感度と感度最小構造, 計測自動制御学会論文集, **24**-8, 831/836 (1988)
- 18) 岩月, 川又, 樋口: 連続時間線形システムにおける統計的感度, 計測自動制御学会論文集, **24**-10, 1064/1070 (1988)
- 19) 雛元, 井上: 最小 L_2 感度をもつ線形連続時間システムの合成, 計測自動制御学会論文集, **36**-10, 826/832 (2000)
- 20) G. Li and M. Gevers: Optimal Finite Precision Implementation of a State-Estimate Feedback Controller, *IEEE Trans. Circuits Syst.*, **CAS-37**-12, 1487/1498 (1990)
- 21) 雛元, 河野: 最小 L_2 感度を有する状態推定フィードバック制御器の実現, 計測自動制御学会論文集, **36**-11, 930/936 (2000)
- 22) D.A. Johns, W.M. Snelgrove and A.S. Sedra: Orthonormal Ladder Filters, *IEEE Trans. Circuits Syst.*, **36**-3, 337/343 (1989)
- 23) D.S. Humpherys: The Analysis, Design, and Synthesis of Electrical Filters, Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall (1970)
- 24) K. Ogata: Modern Control Engineering, Prentice-Hall, 3rd Edition 894 (1997)
- 25) T. Hinamoto and T. Inoue: Optimal Synthesis of State-Estimate Feedback Analog Controllers with Minimum L_2 Sensitivity, *Proc. IEEE Int. Midwest Symp. on Circuits Syst.*, Aug. (2002) (to appear)

《付 録》

A. (12) 式の導出

$\phi_{ik}^2 = \phi_{ik}, \varphi_i^2 = \varphi_i, \psi_i^2 = \psi_i, \gamma_i^2 = \gamma_i$ であることに注意すれば, (11) 式の右辺第 2, 3, 4 項に (8) 式を代入して,

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} |S_{b_i}|^2 ds \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} |-W_1(s)(1-W_2(s))G(s)e_i\varphi_i|^2 ds \\ &= \sum_{i=1}^n \varphi_i e_i^T \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} [W_1(s)(1-W_2(s))G(s)]^* \\ & \quad \cdot W_1(s)(1-W_2(s))G(s) ds e_i \\ &= \sum_{i=1}^n \varphi_i e_i^T W_9 e_i = \sum_{i=1}^n \varphi_i W_9(i, i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} |S_{k_i}|^2 ds \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} |-F^T(s)W_1(s)e_i\psi_i|^2 ds \\ &= \sum_{i=1}^n \psi_i e_i^T \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} F(s)W_1(s)[F(s)W_1(s)]^* ds e_i \\ &= \sum_{i=1}^n \psi_i e_i^T K_1 e_i = \sum_{i=1}^n \psi_i K_1(i, i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{j\infty} |S_{g_i}|^2 ds \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{j\infty} |-W_1^2(s)G(s)e_i\gamma_i|^2 ds \\
&= \sum_{i=1}^n \gamma_i e_i^T \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{j\infty} [W_1^2(s)G(s)]^* W_1^2(s)G(s) ds e_i \\
&= \sum_{i=1}^n \gamma_i e_i^T N_9 e_i = \sum_{i=1}^n \gamma_i N_9(i, i)
\end{aligned}$$

が得られる。ただし,

$$\begin{aligned}
W_9 &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{j\infty} [W_1(s)(1-W_2(s))G(s)]^* \\
&\quad \cdot W_1(s)(1-W_2(s))G(s) ds \\
K_1 &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{j\infty} F(s)W_1(s)[F(s)W_1(s)]^* ds \\
N_9 &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{j\infty} [W_1^2(s)G(s)]^* W_1^2(s)G(s) ds
\end{aligned}$$

ここで,

$$W_1(s)(1-W_2(s))G(s) = [-c_o \quad c_o \quad 0][sI - \Phi_2]^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}$$

$$F(s)W_1(s) = [I \quad 0][sI - \Phi_3]^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ b_o \end{bmatrix}$$

$$W_1^2(s)G(s) = [c_o \quad 0 \quad 0][sI - \Phi_4]^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}$$

であるから, (13) 式に示すリアプノフ方程式をそれぞれ解くことにより求めることができる。

さらに, (11) 式の右辺第1項は以下になる。まず, 次式を定義する。

$$E(i, k, s) =$$

$$\left(sI - \begin{bmatrix} A_o - g_o c_o & e_i c_o & 0 \\ 0 & A_o - b_o k_o & b_o e_k^T \\ 0 & 0 & A_o - b_o k_o \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_o \end{bmatrix}$$

$$M(\Phi_{1ik}) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{j\infty} E(i, k, s) E^*(i, k, s) ds$$

ただし, Φ_{1ik} は (13) 式で定義されている。上式を用いれば,

$$\begin{aligned}
& G(s)e_i W_1(s)e_k^T F(s) \\
&= k_o [sI - (A_o - g_o c_o)]^{-1} e_i c_o [sI - (A_o - b_o k_o)]^{-1} \\
&\quad \cdot b_o e_k^T [sI - (A_o - b_o k_o)]^{-1} b_o \\
&= [k_o \quad 0 \quad 0]
\end{aligned}$$

$$\cdot \left(sI - \begin{bmatrix} A_o - g_o c_o & e_i c_o & 0 \\ 0 & A_o - b_o k_o & b_o e_k^T \\ 0 & 0 & A_o - b_o k_o \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_o \end{bmatrix}$$

$$= k_o [I \quad 0 \quad 0] E(i, k, s)$$

となるから,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{j\infty} |S_{d_{ik}}|^2 ds \\
&= \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{j\infty} \phi_{ik} G(s) e_i W_1(s) e_k^T F(s) \\
&\quad \cdot [G(s) e_i W_1(s) e_k^T F(s)]^* ds
\end{aligned}$$

$$= \phi_{ik} k_o [I \quad 0 \quad 0] \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{j\infty} E(i, k, s) E^*(i, k, s) ds \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} k_o^T$$

$$= \phi_{ik} k_o [I \quad 0 \quad 0] M(\Phi_{1ik}) \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} k_o^T$$

$$= \phi_{ik} k_o M_1(\Phi_{1ik}) k_o^T$$

のように表わされる。よって, $M_1(\Phi_{1ik})$ は (13) 式で与えられるリアプノフ方程式を解くことにより求められた M_1 に相当する。

[著者紹介]

籾 元 孝 夫 (正会員)

1969年岡山大学工学部電気工学科卒。71年神戸大学大学院工学研究科電気工学専攻修士課程了。同年シャープ(株)入社。72年神戸大学工学部助手。79~81年カナダ国クイーンズ大学客員研究員。84年4月~8月カナダ国クイーンズ大学, トロント大学各客員研究員。神戸大学工学部講師を経て, 88年鳥取大学工学部教授。92年広島大学工学部第二類(電気系)教授。2001年広島大学大学院工学研究科教授。工学博士。93~95年 IEEE Trans. on Circuits and Systems II の Associate Editor。02年1月より IEEE Trans. on Circuits and Systems I の Associate Editor。デジタル信号・画像処理, システム理論の研究に従事。IEEE Fellow。電子情報通信学会, 電気学会, システム制御情報学会各会員。共編著「2次元信号と画像処理」(計測自動制御学会, コロナ社)。

井 上 卓 也

1999年広島大学工学部第二類(電気系)卒。2001年広島大学大学院工学研究科システム工学専攻博士課程前期了。同年富士通システムソリューションズ(株)入社。在学中, デジタル信号処理に関する研究に従事。