線形放物形分布系に対する出力安定化

南部 隆 夫*

Output Stabilization of a Class of Linear Parabolic Distributed Systems

Takao NAMBU*

We study output stabilization or stability enhancement of output for a class of linear parabolic systems by means of a finite-dimensional compensator. In regular state stabilization problem, the number of sensors and actuators are chosen large enough so that they satisfy the observability and controllability conditions regarding the associated basis. We then ask the following: What control theoretic results do we have, when an enough number of sensors and actuators are not expected? Output stabilization (stability enhancement), a concept weaker than regular state stabilization, answers the question. New algebraic conditions are proposed, the feature of which is fairly different from those of state stabilization. The result is applied to a parabolic system with boundary observation/control.

Key Words: output stabilization, parabolic systems, compensator design, boundary observation/control

1. はじめに

最近の20年間における分布系安定化論の発達には、数学的見地からも工学的見地からも目覚ましいものがある。通常の安定化則、あるいは安定性増大則は、システムの状態が $t \rightarrow \infty$ の際に、事前に設定された関数空間の距離（ノルム）に関して強い意味で0に収束するように設計される^{3),8),12), etc.}。本論文では、あるクラスの放物系に対して、これまで論じられることの少なかった「出力」安定化、あるいは「出力」安定性増大問題について論じ、そのためのフィードバック制御機構を設計することを目的とする。そして、そのための条件が通常の状態安定化の条件とはかなり異なった様相をもつことを示す。

線形放物形分布系は状態 $u(\cdot)$ をもち、可分な Hilbert 空間 H における抽象放物形方程式:

$$\frac{du}{dt} + Lu = \sum_{k=1}^M f_k(t)h_k, \quad u(0) = u_0 \quad (1)$$

により記述される。システムの出力は、自明でない N 個の観測値（線形汎関数）:

$$\langle u, w_k \rangle_H, \quad 1 \leq k \leq N \quad (2)$$

により与えられるものとする。ここで、 f_k は制御入力; $h_k \in H$ はアクチュエータ; $w_k \in H$ は観測重みベクトル; $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ は

H における内積を表わす。

通常の状態安定化においては、以下の(4)において定義される $N \times m_i$ 可観測行列 W_i , $m_i \times N$ 可制御行列 H_i は十分条件として、有限個の条件:

$$\text{rank } W_i = m_i \quad \text{かつ} \quad \text{rank } H_i = m_i$$

を満たすように設計される (m_i は固有値の多重度を表わす)。そのためには、 M, N は $\max m_i$ 以上に大きく選ぶ必要がある。それでは、“より少ない数の w_k, h_k を用いて、制御論として何がどこまで主張できるのか?” という問題を提起することは、制御科学 (control sciences) の観点から自然であろう。実は、出力安定化問題 (あるいは、安定性増大問題) は、この問題の一つの解答になっている。たとえば、 $\max m_i$ が2以上で $M = N = 1$ の場合でも、出力安定化機構は設計可能になる。

ところで、出力安定化は、必ずしも状態安定化を保証しない。多くの物理系では、しかしながら、それらの系に固有の強い非線形性のおかげで、たとえ線形化された数学近似モデルにおける状態が不安定でも、物理的には有界に留まり、物理的な系の爆発を心配しなくてもよいことがある。数学モデル(1)の背景にある物理系が上のような強い非線形性をもつ場合には、(1)の出力安定化にのみ関心をもつことは十分意味のあることである (本文では、以下の(iii)において、いくぶん制約的な仮定のもとで論じる)。そして、通常の状態安定化と本文で考察される出力安定化との間には、本質的な条件の違いが現れることが示される。前者の場合には、 w_k, h_k に対して、それぞれ、上記の可観測性、可制御性の互いに独立した仮定をおくことで安定化制御系を構成できるが、後者

* 神戸大学工学部応用数学教室 神戸市灘区六甲台町1-1

* Department of Applied Mathematics, Faculty of Engineering, Kobe University, Nada, Kobe
(Received June 4, 2001)

(Revised December 10, 2001)

の場合には、互いに従属した仮定 (5) をおく必要がある。

本文, 第 1, 2 節では, 作用素 L は, つぎの条件を満たすと仮定する:

- (i) L は稠密な定義域 $\mathcal{D}(L)$ をもつ自己共役閉作用素;
- (ii) L はコンパクトなリゾルベント $(\lambda - L)^{-1}$ をもつ;
- (iii) $\sigma(L) \subset \mathbb{C}_+$.

議論の簡単化のために, 観測値 (2) は u に関して有界, 入力分布入力であり, L についてはいくぶん制約的な仮定 (i) をおいた。しかしながら, 境界観測・境界入力等に起因する非有界性を仮定することは可能である。実際, 第 2 節において, 本文の結果を境界観測・境界制御系に適用できることを示す。また, L を応用上しばしば現れ, 柔軟構造物等を記述するスペクトル作用素⁴⁾に置きかえても本文の議論はそのまま成り立つ: 複素固有値の存在以外は, Riesz 基底の存在を共有するからである。また (iii) は, 出力安定化 (安定性増大) 機構において, 内部安定性 (状態 $u(\cdot)$ の安定性) を保証するための仮定である。

$f_k(t) = \langle u, w_k \rangle_H$, $1 \leq k \leq N (= M)$ の場合, 出力安定化問題は, 可観測行列 W_i に対するランク条件のもとで h_k を構成することである。しかしながら, h_k に対する厳しい条件を課す必要があり⁹⁾, たとえば境界制御系に対しては適用できない。一般には w_k, h_k を自由には設計できず, スピルオーバーの影響をつねに考慮する必要があるため, $\mathbb{C}^m$ における動的補償器:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} + B_1 v &= \sum_{k=1}^N \langle u, w_k \rangle_H \xi_k + \sum_{k=1}^M f_k(t) \alpha_k, \\ v(0) &= v_0 \quad f_k(t) = \langle v, \rho_k \rangle_{\mathbb{C}^m}. \end{aligned} \quad (3)$$

を導入する (dynamic feedback スキーム)。そして, 制御系 (1), (3) において, 出力 (2) が任意の初期値 u_0, v_0 に対して指数オーダーで 0 に収束するよう補償器 (3) を設計する。 w_k, h_k が与えられるとき, 設計すべきパラメータは, 補償器 (3) における次元 m , ベクトル ξ_k, α_k, ρ_k である。

出力を制御しようとする立場での最近の優れた研究に, 文献 2) がある: 分布系の出力を, ある集中系から生成される有界な「特別なクラス」の振動に追従 (tracking) させる問題である。可制御性, 可観測性の大前提のもとで, 分布系の内部安定性に対する配慮がある一方, それ以外のクラスの振動の追従には適用できないという大きな欠点がある。上記で述べたように, 本論文では問題提起の発想がまったく異なる: 分布系の可制御性, 可観測性が失われたときに, いったい何がどこまで主張できるのかを明らかにしようと試みるのである。

最近の数学サイドでの研究では, たとえば非有界性の限界を探索すること等, (大切ではあるが) 制御論の枠組みそれ自体よりも数学 technique を強調する傾向が強い。本文ではむしろ, 制御論として非本質的な煩雑さを取り去った立場で議論を進める。

2. 主要結果

Hilbert-Schmidt の理論¹⁾によれば, 作用素 L のスペクトラム $\sigma(L)$ は相異なる実固有値 λ_i , $i \geq 1$ のみよりなり, つぎの性質をもつ固有ペア $(\lambda_i, \varphi_{ij})$ の存在が知られている:

- (i) $\lambda_1 < \dots < \lambda_i < \dots \rightarrow \infty$;
- (ii) $(\lambda_i - L)\varphi_{ij} = 0$, $i \geq 1$, $1 \leq j \leq m_i (< \infty)$;
- (iii) 集合 $\{\varphi_{ij}\}$ は, H の正規直交基底になる。

ここで m_i は, 固有値 λ_i の多重度を表わす。第 1 節の仮定により, $\lambda_1 > 0$, したがって, (1) は制御がない場合, 元々安定であることに注意する。 P_n を最初の n 個の固有値 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ に対応する射影作用素, $Q_n = 1 - P_n$ とする。このとき,

$$u = \sum_{i,j (i \leq n)} u_{ij} \varphi_{ij} + Q_n u, \quad u_{ij} = \langle u, \varphi_{ij} \rangle_H$$

となる。 w_k, h_k に対する同様の展開を行なった後, 可観測行列 W_i と可制御行列 H_i を, それぞれ

$$\begin{aligned} W_i &= \begin{pmatrix} w_{ij}^k; & k \downarrow 1, \dots, N \\ & j \rightarrow 1, \dots, m_i \end{pmatrix}, \\ H_i &= \begin{pmatrix} h_{ij}^k; & k \rightarrow 1, \dots, N \\ & j \downarrow 1, \dots, m_i \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4)$$

により定義する。ただし, $w_{ij}^k = \langle w_k, \varphi_{ij} \rangle_H$, $h_{ij}^k = \langle h_k, \varphi_{ij} \rangle_H$ 。“少ない数の w_k, h_k の下での研究”であるので, 以下では $M, N < \max_{1 \leq i \leq n} m_i$ と仮定する。この際, 前節で述べた可制御性, 可観測性が失われる固有値モードが現れる (定理 1, N_1 を見よ)。本文の主要結果は, つぎのように述べられる:

《定理 1》 $\lambda_n < \mu < \lambda_{n+1}$ なる任意の μ をえらび, $M = N$ とする。 $\{i \in \mathbb{N}; 1 \leq i \leq n\}$ を,

$$\begin{aligned} N_1 &= \{i \in \mathbb{N}; m_i > N, 1 \leq i \leq n\} \neq \emptyset, \\ N_2 &= \{i \in \mathbb{N}; m_i \leq N, 1 \leq i \leq n\} \end{aligned}$$

と分解する。このとき,

$$\begin{aligned} \text{rank } W_i H_i &= N, & i \in N_1, \\ \text{rank } W_i &= \text{rank } H_i = m_i, & i \in N_2 \end{aligned} \quad (5)$$

と仮定すれば, 適当な次元 m の補償器 (3) を構成できて, 評価

$$|\langle u, w_k \rangle_H|, \|v\|_{\mathbb{C}^m} \leq c e^{-\mu t} \{\|u_0\|_H + \|v_0\|_{\mathbb{C}^m}\} \quad (6)$$

が任意の初期値 $u_0 \in H$, $v_0 \in \mathbb{C}^m$, $1 \leq k \leq N$, $t \geq 0$ に対して成り立つようにできる。このとき, 状態 $u(\cdot)$ 自身は, $t \rightarrow \infty$ の際に有界に留まる。

注意 定理 1 は, static feedback スキームのもとでの出力安定化の結果⁹⁾の拡張になっている。そこでは, h_k は厳しい制約: $Q_{n_1} h_k = 0$ を課せられたが, 定理 1 では, この制約が完全に取り除かれている。

証明 証明のアイデアは, 出力が満たすべき別の微分方程式を導き出し, 新しく得られた方程式に対する状態安定化

の問題に帰着させることである。以下で現れる c は、さまざまな正定数を表わす。必要ならば λ_i の順序を変更して、 $\mathbb{N}_1 = \{i \in \mathbb{N}; 1 \leq i \leq n_1\}$, $\mathbb{N}_2 = \{i \in \mathbb{N}; n_1 < i \leq n\}$ としても一般性を失わない。

(出力方程式の導出)

$$\begin{aligned}\hat{u}_i &= {}^t(u_{i1} \dots u_{im_i}), \\ \hat{w}_i^k &= (\langle w_k, \varphi_{i1} \rangle_H \dots \langle w_k, \varphi_{im_i} \rangle_H)\end{aligned}$$

とおく。ここで、 ${}^t(\dots)$ はベクトルの転置を表わす。 $\hat{y}$ と u_2 を、それぞれ、

$$\begin{aligned}\hat{y} &= {}^t(\hat{y}_1 \dots \hat{y}_N), \quad \hat{y}_k = {}^t(\hat{w}_1^k \hat{u}_1 \dots \hat{w}_{n_1}^k \hat{u}_{n_1}), \\ u_2 &= (1 - P_{n_1})u = Q_{n_1}u\end{aligned}$$

とすれば、出力 (2) は

$$\langle u, w_k \rangle_H = \underbrace{(1 \dots 1)}_{n_1 \text{ 1's}} \hat{y}_k + \langle u_2, w_k \rangle_H, \quad 1 \leq k \leq N,$$

あるいは、ベクトル形式でつぎのように書かれる:

$$\langle u, w \rangle_H = \Phi \hat{y} + \langle u_2, w \rangle_H = (\Phi \langle \cdot, w \rangle_H) \begin{pmatrix} \hat{y} \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

ここで、 Φ は $N \times n_1 N$ 行列で、

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1 \dots 1 & 0 \dots 0 & \dots & 0 \dots 0 \\ 0 \dots 0 & 1 \dots 1 & \dots & 0 \dots 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 \dots 0 & 0 \dots 0 & \dots & 1 \dots 1 \end{pmatrix}.$$

$x = \begin{pmatrix} \hat{y} \\ u_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n_1 N} \times Q_{n_1} H$ とおけば、

$$\frac{dx}{dt} + \mathbb{L}x = \begin{pmatrix} WH \\ Q_{n_1} h_1 \dots Q_{n_1} h_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix} = Kf \quad (7)$$

を得る。ここで、

$$\begin{aligned}\mathbb{L} &= \begin{pmatrix} A_N & 0 \\ 0 & L_2 \end{pmatrix}, \\ A_N &= \text{diag}(\underbrace{\Lambda \Lambda \dots \Lambda}_{N \text{ } \Lambda\text{'s}}), \quad \Lambda = \text{diag}(\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{n_1});\end{aligned}$$

$$L_2 = L|_{Q_{n_1} H}, \quad \mathcal{D}(L_2) = \mathcal{D}(L) \cap Q_{n_1} H;$$

$$W = \begin{pmatrix} \hat{W}_1 \\ \vdots \\ \hat{W}_N \end{pmatrix}, \quad \hat{W}_k = \begin{pmatrix} \hat{w}_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \hat{w}_2^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \hat{w}_{n_1}^k \end{pmatrix};$$

$$H = \begin{pmatrix} H_1 \\ \vdots \\ H_{n_1} \end{pmatrix} = \left(h_{ij}^k; \begin{matrix} k \rightarrow 1, \dots, N \\ (i, j) \downarrow (1, 1), \dots, (n_1, m_{n_1}) \end{matrix} \right).$$

作用素 $\mathbb{L}$ は、 L の特性をそのまま受け継ぐ: たとえば、 $\mathbb{L}$ は自己共役 (L がスペクトル作用素ならば、 $\mathbb{L}$ もそうなる)

; $\mathcal{D}(\mathbb{L}) = \mathbb{C}^{n_1 N} \times \mathcal{D}(L_2)$; $\sigma(\mathbb{L}) = \sigma(L)$ で; コンパクトリゾルベントをもつ。

(補償器の設計) ここでは、設計の容易な identity compensator を考える。(7) と同じ空間 $\mathcal{H} = \mathbb{C}^{n_1 N} \times Q_{n_1} H$ における無限次元補償器:

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dt} + Bv &= \sum_{k=1}^N \langle u, w_k \rangle_H \xi_k + \sum_{k=1}^N f_k(t) \alpha_k \\ &= (\xi_1 \dots \xi_N) (\Phi \langle \cdot, w \rangle_H) x + (\alpha_1 \dots \alpha_N) f \\ &= -Cx + (\alpha_1 \dots \alpha_N) f\end{aligned} \quad (8)$$

を考える。ここで、作用素 B は

$$B = \mathbb{L} - C = \mathbb{L} + (\xi_1 \dots \xi_N) (\Phi \langle \cdot, w \rangle_H) \quad (9)$$

により与えられ、 $-B$ は解析半群の生成素である。

$\mathcal{P}_\nu$, $\nu > n_1$ を $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ における射影作用素で、 $\mathbb{L}$ の固有値 $\lambda_1, \dots, \lambda_\nu$ に対応するものとすれば、

$$\mathcal{P}_n B \mathcal{P}_n \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \Lambda_N & 0 \\ 0 & \tilde{\Lambda} \end{pmatrix} + (\xi_1 \dots \xi_N) (\Phi W_{n_1+1} \dots W_n).$$

ただし、

$$\tilde{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_{n_1+1} I_{m_{n_1+1}} \dots \lambda_n I_{m_n})$$

であり、 $\xi_1, \dots, \xi_N$ を $\mathcal{P}_n \mathcal{H} = \mathbb{C}^{n_1 N+J} \times \{0\}$, $J = \sum_{n_1 < i \leq n} m_i$ において選ぶ。 $\mathbb{C}^{n_1 N+J} \times \{0\}$ を $\mathbb{C}^{n_1 N+J}$ と同一視する。 $\sigma(\mathcal{P}_n B \mathcal{P}_n)$ の構造が e^{-tB} の安定性を決定づけることは明らかであろう。 $n_1 N \times n_1 N$ 行列 Π_1 を

$$\Pi_1 = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \overbrace{10\dots 0}^N & \overbrace{10\dots 0}^N & \dots & \overbrace{00\dots 0}^N & & \\ & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ 00\dots 0 & & \dots & 10\dots 0 & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0\dots 01 & & \dots & 00\dots 0 & & \\ & 0\dots 01 & & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ 00\dots 0 & & \dots & 0\dots 01 & & \end{array} \right) \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} n_1$$

により与える。簡単な計算により、

$$\begin{aligned}& \begin{pmatrix} \Pi_1 & 0 \\ 0 & I_J \end{pmatrix}^{-1} \left\{ \begin{pmatrix} \Lambda_N & 0 \\ 0 & \tilde{\Lambda} \end{pmatrix} + (\xi_1 \dots \xi_N) \right. \\ & \cdot (\Phi W_{n_1+1} \dots W_n) \left. \right\} \begin{pmatrix} \Pi_1 & 0 \\ 0 & I_J \end{pmatrix} \\ &= \text{diag}(\lambda_1 I_N \dots \lambda_{n_1} I_N \tilde{\Lambda}) \\ & + \begin{pmatrix} \Pi_1 & 0 \\ 0 & I_J \end{pmatrix}^{-1} (\xi_1 \dots \xi_N) \cdot (I_N \dots I_N W_{n_1+1} \dots W_n).\end{aligned}$$

仮定により

$$\begin{aligned} \text{rank } I_N &= N, \quad 1 \leq i \leq n_1, \\ \text{rank } W_i &= m_i, \quad n_1 + 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

であるから, $\sigma(\mathcal{P}_n B \mathcal{P}_n)$ を任意に指定できるアクチュエータ $\xi_1, \dots, \xi_N \in \mathbb{C}^{n_1 N + J}$ が存在する¹³⁾. それらを,

$$\min \text{Re } \sigma(\mathcal{P}_n B \mathcal{P}_n) > \lambda_{n+1}$$

となるように選んでおくと,

$$\|e^{-tB}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq c e^{-\lambda_{n+1}t}, \quad t \geq 0 \quad (10)$$

を得る.

$$(\alpha_1 \dots \alpha_N) = \begin{pmatrix} WH \\ Q_{n_1} h_1 \dots Q_{n_1} h_N \end{pmatrix} \in \mathcal{H}^N$$

とおくことにより, $x(t) - v(t) = e^{-tB}(x_0 - v_0)$, $t \geq 0$ がわかる. したがって,

$$\frac{dx}{dt} + (\mathbb{L} - K\langle \cdot, \rho \rangle_H)x = K\langle e^{-tB}(v_0 - x_0), \rho \rangle_{\mathcal{H}}. \quad (11)$$

ベクトル $\rho_1, \dots, \rho_N$ を $\mathcal{P}_n \mathcal{H} = \mathbb{C}^{n_1 N + J} \times \{0\}$ で考えることにより, 集合 $\{\rho_1, \dots, \rho_N\}$ は $N \times (n_1 N + J)$ 行列と同一視することができ, それを Ψ とする. このとき,

$$\mathcal{P}_n(\mathbb{L} - K\langle \cdot, \rho \rangle_{\mathcal{H}})\mathcal{P}_n \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \Lambda_N & 0 \\ 0 & \tilde{A} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} WH \\ H_{n_1+1} \\ \vdots \\ H_n \end{pmatrix} \Psi. \quad (12)$$

$n_1 N \times n_1 N$ 行列 Π_2 を

$$\Pi_2 = \left(\begin{array}{cccc} \overbrace{10\dots 0}^{n_1} & \overbrace{10\dots 0}^{n_1} & \dots & \overbrace{00\dots 0}^{n_1} \\ & & & \\ & 10\dots 0 & \dots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 00\dots 0 & & \dots & 10\dots 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0\dots 01 & & \dots & 00\dots 0 \\ & 0\dots 01 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 00\dots 0 & & \dots & 0\dots 01 \end{array} \right) \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} N \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} N$$

により定めれば, 容易にわかるように $\Pi_2 = \Pi_1^{-1}$ である.

(12) の右辺の極配置問題は,

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \Pi_1 & 0 \\ 0 & I_J \end{pmatrix}^{-1} \left\{ \begin{pmatrix} \Lambda_N & 0 \\ 0 & \tilde{A} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} WH \\ H_{n_1+1} \\ \vdots \\ H_n \end{pmatrix} \Psi \right\} \begin{pmatrix} \Pi_1 & 0 \\ 0 & I_J \end{pmatrix} \\ &= \text{diag}(\lambda_1 I_N \dots \lambda_{n_1} I_N \tilde{A}) \\ & \quad - \begin{pmatrix} \Pi_2 WH \\ H_{n_1+1} \\ \vdots \\ H_n \end{pmatrix} \Psi \begin{pmatrix} \Pi_1 & 0 \\ 0 & I_J \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (12')$$

の問題と同一である. また, ただちに

$$\Pi_2 WH = \begin{pmatrix} W_1 H_1 \\ \vdots \\ W_{n_1} H_{n_1} \end{pmatrix}$$

がわかる. 仮定 (5) により, $\text{rank } W_i H_i = N$, $1 \leq i \leq n_1$, $\text{rank } H_i = m_i$, $n_1 + 1 \leq i \leq n$ であるから, (12') の右辺のスペクトラムを任意に指定する Ψ が存在する. とくに Ψ , すなわち, $\rho_1, \dots, \rho_N \in \mathbb{C}^{n_1 N + J}$ を,

$$\min \text{Re } \sigma(\mathcal{P}_n(\mathbb{L} - K\langle \cdot, \rho \rangle_{\mathcal{H}})\mathcal{P}_n) > \lambda_{n+1}$$

となるように選ぶ. このとき,

$$\|\exp t(-\mathbb{L} + K\langle \cdot, \rho \rangle_{\mathcal{H}})\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq c e^{-\lambda_{n+1}t}, \quad t \geq 0 \quad (13)$$

となる. これと (10), (11) により, 任意の μ' , $\mu < \mu' < \lambda_{n+1}$ に対して,

$$\begin{aligned} & \|x(t)\|_{\mathcal{H}} + \|v(t)\|_{\mathcal{H}} \\ & \leq c e^{-\mu't} (\|x(0)\|_{\mathcal{H}} + \|v(0)\|_{\mathcal{H}}), \quad t \geq 0 \end{aligned} \quad (14)$$

を得る. $\{\varphi_{ij}\}$ は H における正規直交基底であることから, つぎの補題がただちに仕がう:

[補題 2] 作用素 $\mathcal{P}_\nu B - B \mathcal{P}_\nu$ は $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ の要素への一意な拡張をもち, つぎの評価を満たす:

$$\begin{aligned} & \|(\mathcal{P}_\nu B - B \mathcal{P}_\nu)v\|_{\mathcal{H}} \leq \epsilon_\nu \|v\|_{\mathcal{H}}, \quad v \in \mathcal{D}(B), \\ & \epsilon_\nu \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

無限次元補償器 (8) の右辺に摂動 $\mathcal{P}_\nu B - B \mathcal{P}_\nu$ を加え, 摂動を受けた補償器を (8') とする. もし $\nu (> n)$ が十分大きければ, (7), (8') に対する解 x, v は, 評価

$$\begin{aligned} & \|x(t)\|_{\mathcal{H}} + \|v(t)\|_{\mathcal{H}} \\ & \leq c e^{-\mu t} (\|x(0)\|_{\mathcal{H}} + \|v(0)\|_{\mathcal{H}}), \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

を満たす. そのような ν を固定して, $v_1 = \mathcal{P}_\nu v$ とおけば, x, v_1 は微分方程式

$$\frac{dx}{dt} + \mathbb{L}x = K\langle v_1, \rho \rangle_{\mathcal{P}_\nu \mathcal{H}}, \quad (15)$$

$$\frac{dv_1}{dt} + \mathcal{P}_\nu B \mathcal{P}_\nu v_1 = -\mathcal{P}_\nu Cx + \mathcal{P}_\nu(\alpha_1 \dots \alpha_N) \langle v_1, \rho \rangle_{\mathcal{P}_\nu \mathcal{H}} \quad (16)$$

を満たす. ここで, $\mathcal{P}_\nu B \mathcal{P}_\nu$ は有限次元空間 $\mathcal{P}_\nu \mathcal{H}$ における有界作用素である. (15), (16) に対する解は, 評価

$$\|x(t)\|_{\mathcal{H}} + \|v_1(t)\|_{\mathcal{P}_\nu \mathcal{H}} \leq c e^{-\mu t} (\|x(0)\|_{\mathcal{H}} + \|v_1(0)\|_{\mathcal{P}_\nu \mathcal{H}}), \quad t \geq 0$$

を満たす. これにより, 出力安定化が達成された. 方程式 (16) が, 有限次元補償器 (3) に対応する.

定理の最後の主張: 「状態 $u(\cdot)$ の有界性」については, (1) と $f_k(t) = \langle v, \rho_k \rangle_{\mathbb{C}^m}$ の安定性により, 明らかであろう. 実際, $\|u(t)\|$ は, 少なくとも上界 $\text{const } e^{-\lambda_1 t}$ をもつ. Q.E.D.

注意 補償器のパラメーター ξ_k, ρ_k, α_k は, それぞれ

- (i) $\min \text{Re } \sigma(\mathcal{P}_n B \mathcal{P}_n) > \lambda_{n+1},$
- (ii) $\min \text{Re } \sigma(\mathcal{P}_n (\mathbb{L} - K \langle \cdot, \rho \rangle_{\mathcal{H}}) \mathcal{P}_n) > \lambda_{n+1},$
- (iii) $\mathcal{P}_\nu (\alpha_1 \dots \alpha_N) = \mathcal{P}_\nu \begin{pmatrix} WH \\ Q_{n_1} h_1 \dots Q_{n_1} h_N \end{pmatrix} \in (\mathcal{P}_\nu \mathcal{H})^N$

となるように設計されることを思い起こそう.

境界制御系への応用: 本文では理解を容易にするために, 以上のような抽象論を展開した. しかしながら, 境界制御系においては, これまで仮定しなかったさまざまな非有界性が現れる. この抽象論が具体的な境界制御系にも同様に応用でき, また非有界性に関わる難点がどのように克服されるかを見よう. $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ を, $(m-1)$ -次元の滑らかな境界 Γ をもつ有界領域とする. 作用素 $\mathcal{L}$ を Ω における形式的に自己共役な一様楕円形作用素:

$$\mathcal{L}z = - \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial z}{\partial x_j} \right) + c(x)z$$

とし, 付随する境界作用素 τ を

$$\tau z = \frac{\partial z}{\partial \nu} + \sigma(\xi)z = \sum_{i,j=1}^m a_{ij}(\xi) \nu_i(\xi) \frac{\partial z}{\partial x_j} + \sigma(\xi)z$$

とする. ここで, $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$, $1 \leq i, j \leq m$, $x \in \overline{\Omega}$, $\nu(\xi) = (\nu_1(\xi), \dots, \nu_m(\xi))$ は $\xi \in \Gamma$ における外向き単位法線を表す. $(\mathcal{L}, \tau)$ の係数には, 十分な滑らかさが仮定されているものとする. つぎの境界制御系を考える:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial t} + \mathcal{L}z &= 0, & \text{in } (0, \infty) \times \Omega, \\ \tau z &= \sum_{k=1}^N f_k(t) h_k, & \text{on } (0, \infty) \times \Gamma, \\ z(0, \cdot) &= z_0, & \text{in } \Omega \end{aligned} \quad (17)$$

境界上の観測は,

$$\langle z, w_k \rangle_{\Gamma}, \quad 1 \leq k \leq N \quad (18)$$

により与えられる. ここで, $h_k \in H^{1/2}(\Gamma)$, $w_k \in L^2(\Gamma)$ であり, $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Gamma}$ は $L^2(\Gamma)$ における内積を表す. この場合, (17) に対応する分布入力をもつ微分方程式 (1) が何であるかを導こう. 通常のように,

$$\mathcal{L}u = \mathcal{L}u, \quad u \in \mathcal{D}(\mathcal{L}) = \{u \in H^2(\Omega); \tau u = 0 \text{ on } \Gamma\}$$

とし, $H = L^2(\Omega)$ とおく. 作用素 L は自己共役であり, 第1節における仮定をすべて満たす. $\inf c(x) > 0$ と仮定すれば, $\sigma(L) \subset \mathbb{C}_+$ であり, L の分数べきが定義できる.

$$u(t) = L^{-1/4-\epsilon} z(t, \cdot), \quad t > 0 \quad (19)$$

とおく ($0 < \epsilon < 1/4$). このとき, $u(t) \in \mathcal{D}(L)$ であり, $H = L^2(\Omega)$ において分布入力をもつ微分方程式:

$$\frac{du}{dt} + Lu = \sum_{k=1}^N f_k(t) L^{3/4-\epsilon} \psi_k, \quad u(0) = L^{-1/4-\epsilon} z_0 \quad (20)$$

が得られる⁸⁾. ここで, よく知られた関係⁵⁾:

$$\mathcal{D}(L^\alpha) = H^{2\alpha}(\Omega), \quad 0 \leq \alpha < \frac{3}{4}$$

を用いた (上式右辺は分数次 Sobolev 空間). $\psi_k \in H^2(\Omega)$ は, 境界値問題:

$$\mathcal{L}\psi_k = 0, \quad \tau\psi_k = h_k, \quad 1 \leq k \leq N$$

に対する一意な解である. 行列 W_i, H_i は, それぞれ

$$\begin{aligned} W_i &= \left(\langle w_k, \varphi_{ij} \rangle_{\Gamma}; \quad \begin{matrix} k \downarrow 1, \dots, N \\ j \rightarrow 1, \dots, m_i \end{matrix} \right), \\ H_i &= \left(\langle h_k, \varphi_{ij} \rangle_{\Gamma}; \quad \begin{matrix} k \rightarrow 1, \dots, N \\ j \downarrow 1, \dots, m_i \end{matrix} \right) \end{aligned}$$

により置きかえられる. ベクトル $\hat{y}_k$ において, $\hat{w}_i^k$ を

$$\hat{w}_i^k = \lambda_i^{1/4+\epsilon} (\langle w_k, \varphi_{i1} \rangle_{\Gamma} \dots \langle w_k, \varphi_{im_i} \rangle_{\Gamma})$$

により置きかえる. このとき, 出力 $\langle z, w_k \rangle_{\Gamma}$, $1 \leq k \leq N$ は, ベクトル形式で

$$\langle z, w \rangle_{\Gamma} = (\Phi \langle L^{1/4+\epsilon} \cdot, w \rangle_{\Gamma}) \begin{pmatrix} \hat{y} \\ u_2 \end{pmatrix}$$

と書かれる. v に対する方程式は, (8) において C を

$$Cx = -(\xi_1 \dots \xi_N) (\Phi \langle L^{1/4+\epsilon} \cdot, w \rangle_{\Gamma}) x$$

にかえた方程式になる. $(\alpha_1 \dots \alpha_N)$ は, h_k を $L^{3/4-\epsilon} \psi_k$ で置きかえたもので与えられるが, Green の公式により,

$$\langle L^{3/4-\epsilon} \psi_k, \varphi_{ij} \rangle_{\Omega} = \lambda_i^{-1/4-\epsilon} \langle h_k, \varphi_{ij} \rangle_{\Gamma}$$

であるから, 結局, 境界上の w_k, h_k により記述されることがわかる. われわれの目標は, 出力 (18) に対する減衰評価である.

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix}, \quad M = \mathbb{L} - K \langle \cdot, \rho \rangle_{\mathcal{H}}$$

とおく. ここで, 同等なグラフノルムで, $\mathcal{D}(S) = \mathcal{D}(M) = \mathbb{C}^{n_1 N} \times \mathcal{D}(L_2)$ である. 作用素 S, M はともに極大増大 (m -accretive) であり, $\sigma(S), \sigma(M) \subset \mathbb{C}_+$ となることに注意する. したがって⁶⁾,

$$\mathcal{D}(S^\alpha) = \mathcal{D}(M^\alpha), \quad S^\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & L^\alpha \end{pmatrix}, \quad 0 \leq \alpha \leq 1.$$

この関係を見れば, $\beta = 1/2 + 2\epsilon$ として, $L^\beta u_2$ に対する評価を求めればよい. 微分方程式 (11) の表現より,

$$\begin{aligned} S^\beta x(t) &= S^\beta M^{-\beta} M^{\beta/2} e^{-tM} M^{\beta/2} S^{-\beta/2} S^{\beta/2} x_0 \\ &+ \int_0^t S^\beta M^{-\beta} M^{\beta/2} e^{-(t-s)M} \\ &\quad \cdot K \langle e^{-sB} (v_0 - x_0), \rho \rangle_{\mathcal{H}} ds. \end{aligned}$$

$u_0 = L^{-\beta/2} z_0 \in \mathcal{D}(L^{\beta/2})$ より $x_0 \in \mathcal{D}(S^{\beta/2})$ となることを利用すれば, これからただちに

$$\|S^\beta x(t)\|_{\mathcal{H}} \leq c t^{-\beta/2} e^{-\mu t} \{\|x_0\|_{\mathcal{H}} + \|v_0\|_{\mathcal{H}}\}, \quad t > 0$$

を得る. 初期値に滑らかさを仮定する場合を考慮すれば, 内部安定性 ($u(\cdot)$ の有界性) とともに, 最終的に

$$| \langle z(t), w \rangle_{\Gamma} | \leq \begin{cases} c t^{-\beta/2} e^{-\mu t} \{\|z_0\|_{\Omega} + \|v_0\|_{\mathbb{C}^m}\}, & t > 0, \\ c e^{-\mu t} \{\|z_0\|_{H^\beta(\Omega)} + \|v_0\|_{\mathbb{C}^m}\}, & t \geq 0 \end{cases} \quad (21)$$

が得られることになる.

3. 作用素 L のクラスの拡張

前節までは, L を自己共役あるいはスペクトル作用素であると仮定した. この仮定を, いくぶん緩和することができる. 条件 (i), (ii), (iii) (第1節) のかわりに, 以下の (i), ..., (v) を仮定しよう:

- (i) L は稠密な定義域 $\mathcal{D}(L)$ をもつ閉作用素;
- (ii) L はコンパクトリゾルベント $(\lambda - L)^{-1}$ をもつ;
- (iii) リゾルベントは, ある扇状集合 $\bar{\Sigma}$ において評価

$$\|(\lambda - L)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq \frac{c}{1 + |\lambda|}$$

を満たす. ここで, $\bar{\Sigma} = \{\lambda - b; \theta_0 \leq |\arg \lambda| \leq \pi\}$, $0 < \theta_0 < \pi/2$, $b \in \mathbb{R}^+$;

- (iv) $\sigma(L) \subset \mathbb{C}_+$;
- (v) L の不安定固有値に対応する一般化固有ベクトルは存在しない.

(i), ..., (iv) は通常の条件であるが, (v) は制約的である. 安定固有値については, 一般化固有ベクトルは存在してもよい. Riesz-Schauder の理論¹⁾により, $\sigma(L)$ は相異なる固有値 λ_i , $i \geq 1$ のみよりなり,

$$0 < \operatorname{Re} \lambda_1 \leq \dots \leq \operatorname{Re} \lambda_n < \operatorname{Re} \lambda_{n+1} \leq \dots \rightarrow \infty$$

と並べる. 各 λ_i , $1 \leq i \leq n$ には, 基底 $\{\varphi_{i1}, \dots, \varphi_{im_i}\}$ ($m_i < \infty$) が対応する. $h_k = \sum_{i,j} h_{ij}^k \varphi_{ij} + Q h_k$ と展開して,

$$\begin{aligned} W_i &= \left(\langle w_k, \varphi_{ij} \rangle_{\mathcal{H}}; \begin{matrix} k \downarrow 1, \dots, N \\ j \rightarrow 1, \dots, m_i \end{matrix} \right), \\ H_i &= \left(h_{ij}^k; \begin{matrix} k \rightarrow 1, \dots, N \\ j \downarrow 1, \dots, m_i \end{matrix} \right) \end{aligned}$$

とおけば, $\operatorname{Re} \lambda_n < \mu < \operatorname{Re} \lambda_{n+1}$ なる μ に対して定理 1 が成り立つ. この場合, 無限次元補償器 (8) は任意の可分な Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ で考える. その構成を簡単に紹介しよ

う. $\mathcal{H}$ には正規直交基底が存在するから, それを並べかえて $\{\eta_{ij}^\pm; i \geq 1, 1 \leq j \leq n_i (< \infty)\}$ とする. 各ベクトル $v \in \mathcal{H}$ は,

$$v = \sum_{i,j} (v_{ij}^+ \eta_{ij}^+ + v_{ij}^- \eta_{ij}^-), \quad v_{ij}^\pm = \langle v, \eta_{ij}^\pm \rangle_{\mathcal{H}}$$

と Fourier 展開可能である. $\{\mu_i\}$ を単調増加正数列で, $0 < \mu_1 < \mu_2 < \dots \rightarrow \infty$ とする. 作用素 B を

$$\begin{aligned} Bv &= \sum_{i,j} (\mu_i \omega^+ v_{ij}^+ \eta_{ij}^+ + \mu_i \omega^- v_{ij}^- \eta_{ij}^-), \\ \omega^\pm &= a \pm \sqrt{-1} \sqrt{1 - a^2}, \quad 0 < a < 1 \end{aligned} \quad (22)$$

と定義する. B は $\mathcal{D}(B) = \{v \in \mathcal{H}; \sum_{i,j} |v_{ij}^\pm \mu_i|^2 < \infty\}$ をもつ閉作用素であり, $-B$ は解析半群の生成素になる:

$$e^{-tB} v = \sum_{i,j} \left(e^{-\mu_i \omega^+ t} v_{ij}^+ \eta_{ij}^+ + e^{-\mu_i \omega^- t} v_{ij}^- \eta_{ij}^- \right),$$

$$\|e^{-tB}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq e^{-a\mu_1 t}, \quad t \geq 0.$$

つぎの命題 3, 4 は, 文献 8) と同様に証明できる:

《命題 3》 $\mu < a\mu_1$; $\arg \omega^+ > \theta_0$; $\sigma(L) \cap \sigma(B) = \emptyset$ と仮定すれば, 作用素方程式: $X\mathbb{L} - BX = C$ は一意な解 $X \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^{n_1 N} \times Q_{n_1 H}; \mathcal{H})$ をもつ. $\xi_k = \sum_{i,j} (\xi_{ij}^k \eta_{ij}^+ + \bar{\xi}_{ij}^k \eta_{ij}^-)$ とおけば, 解 X は

$$\begin{aligned} Xx &= \sum_{i,j} \sum_k f_k(\mu_i \omega^+; x) \xi_{ij}^k \eta_{ij}^+ \\ &+ \sum_{i,j} \sum_k f_k(\mu_i \omega^-; x) \bar{\xi}_{ij}^k \eta_{ij}^-, \end{aligned} \quad (23)$$

により表現される. ここで,

$$\begin{aligned} f_k(\lambda; x) &= \underbrace{(1 \dots 1)}_{n_1 \text{ 1's}} (\lambda - \Lambda)^{-1} \hat{y}_k \\ &+ \langle (\lambda - L_2)^{-1} u_2, w_k \rangle_{\mathcal{H}}, \quad x = \begin{pmatrix} \hat{y} \\ u_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

《命題 4》 命題 3 の仮定に加え,

$$\mu_i \leq c i^\gamma, \quad i \geq 1, \quad 0 < \exists \gamma < 2 - \frac{2}{\pi} \theta_0,$$

$$\operatorname{rank} \Xi_i = N, \quad i \geq 1, \quad \Xi_i = \begin{pmatrix} \xi_{ij}^k; & k \rightarrow 1, \dots, N \\ & j \downarrow 1, \dots, n_i \end{pmatrix}$$

と仮定すれば, 包含関係:

$$\overline{X^* \mathcal{H}} \supset \mathbb{C}^{n_1 N + J} \times \{0\} \quad (24)$$

が成り立つ.

命題 4 の仮定を満たす $\xi_1, \dots, \xi_N$ をえらび,

$$(\alpha_1 \dots \alpha_N) = X \begin{pmatrix} WH \\ Q_{n_1} h_1 \dots Q_{n_1} h_N \end{pmatrix} \in \mathcal{H}^N$$

とおくことにより, $Xx(t) - v(t)$ は $\frac{d}{dt}(Xx - v) + B(Xx - v) = 0$ を満たす. したがって,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &+ (\mathbb{L} - K \langle \cdot, X^* \rho \rangle_{\mathbb{C}^{n_1 N + J} \times Q_{n_1 H}}) x \\ &= K \langle e^{-tB} (v_0 - Xx_0), \rho \rangle_{\mathcal{H}}. \end{aligned} \quad (25)$$

仮定 (5) のもとで評価 (13) を得たのと同様に,

$$\left\| \exp t (-\mathbb{L} + K \langle \cdot, p \rangle_{\mathbb{C}^{n_1 N+J} \times Q_n H}) \right\| \leq c e^{-\lambda_{n+1} t}, \quad t \geq 0$$

となる $p_1, \dots, p_N \in \mathbb{C}^{n_1 N+J} \times \{0\}$ が存在する. 命題 4 により,

$$\left\| \exp t (-\mathbb{L} + K \langle \cdot, X^* p \rangle_{\mathbb{C}^{n_1 N+J} \times Q_n H}) \right\| \leq c e^{-\mu t}, \quad t \geq 0 \quad (26)$$

となる $\rho_1, \dots, \rho_N \in \mathcal{H}$ あるいは ρ が存在する. したがって,

$$\|x(t)\|_{\mathbb{C}^{n_1 N} \times Q_{n_1} H} + \|v(t)\|_{\mathcal{H}} \leq c e^{-\mu t} \{\|x_0\|_{\mathbb{C}^{n_1 N} \times Q_{n_1} H} + \|v_0\|_{\mathcal{H}}\} \quad (27)$$

を得る. 有限次元補償器を得るためには, 補題 2 のような摂動を必要としない. $\mathcal{P}_I$ を B の固有値 $\mu_i \omega^\pm$, $1 \leq i \leq I$ に対応する射影作用素とする. 一般性を失うことなく, 十分大きい I に対して $\rho_k \in \mathcal{P}_I \mathcal{H}$ と仮定でき, このとき, $\dim \mathcal{P}_I \mathcal{H} = m$ とおく. $v_1 = \mathcal{P}_I v$ とおけば,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} + \mathbb{L}x &= K \langle v_1, \rho \rangle_{\mathcal{H}}, \\ \frac{dv_1}{dt} + B_1 v_1 &= -\mathcal{P}_I Cx + \mathcal{P}_I (\alpha_1 \dots \alpha_N) \langle v_1, \rho \rangle_{\mathcal{H}}. \end{aligned} \quad (28)$$

(28) の第 2 式が (3) に対応する. (28) の解は, (27) より

$$\|x(t)\|_{\mathbb{C}^{n_1 N} \times Q_{n_1} H} + \|v_1(t)\|_{\mathcal{P}_I \mathcal{H}} \leq c e^{-\mu t} \{\|x_0\|_{\mathbb{C}^{n_1 N} \times Q_{n_1} H} + \|v_1(0)\|_{\mathcal{P}_I \mathcal{H}}\}, \quad t \geq 0,$$

を満たし, これよりただちに最終的な評価 (6) を得る.

注意. 命題 4 は補償器の存在を主張するものであり, 具体的な構成アルゴリズムを与えてはいない. 構成アルゴリズムとその収束性については, 部分的な解決がなされている¹¹⁾.

(28) 式の第 2 式は $\mathbb{C}^m$ における方程式である, 状態変数の数を増やして, 同等な $\mathbb{R}^{m'}$ における方程式に書きかえることは容易である⁸⁾.

補足: 最後に, 放物形方程式 (1) のモデル化誤差について考えてみよう. 実際の物理系から (1) を定式化する際には, 通常, 誤差を伴う. この誤差により, 作用素 L は本来 $\tilde{L}$ であるとしよう:

$$\frac{du}{dt} + \tilde{L}u = \sum_{k=1}^M f_k(t)h_k, \quad u(0) = u_0.$$

作用素 L の定義域 $\mathcal{D}(L)$ は, 誤差により $\mathcal{D}(\tilde{L})$ に変化する. この点は, 有限次元系との本質的な差異である. (1) に基づいて設計した制御系は, 係数作用素 $\tilde{L}$ をもつ上の系に対しても有効に機能するか? という問題が起こる. いわゆるロバスト性の問題である. 具体的な境界制御系 (17) については, 作用素対 (L, τ) は $(\tilde{L}, \tau)$ に変化することになる. 誤差, あるいは摂動は L の主要部にまで及ぶことになり, 古典的な摂動論は適用できないという深刻な困難が生じる (w_k や h_k の摂動については, 容易に処理できる). 境界制御系に対するこの問題の解答は, しかしながら, 肯定的である. 実際,

その際の議論は文献 10) におけるのとまったく同様に遂行される. ただし, $\tilde{L}$ の分数べきの摂動に関する精緻な評価を必要とするため, 本文では述べない.

参 考 文 献

- 1) S. Agmon: Lectures on Elliptic Boundary Value Problems, Van Nostrand, Princeton (1965)
邦訳: 楕円型境界値問題, 村松訳, 吉岡書店 (1968)
- 2) C. I. Byrnes, I. G. Lauko, D. S. Gilliam and V. I. Shubov: Output regulation for linear distributed parameter systems, IEEE Trans. Automatic Control, **AC-45**, 2236/2252 (2000)
- 3) R. F. Curtain: Finite Dimensional Compensators for Parabolic Distributed Systems with Unbounded Control and Observation, SIAM J. Control Optim., **22**, 255/276 (1984)
- 4) N. Dunford and J. T. Schwartz: Linear Operators, **3**, Interscience, New York (1963)
- 5) D. Fujiwara: Concrete Characterization of the Domain of Fractional Powers of Some Elliptic Differential Operators of the Second Order, Proc. Japan Acad. Ser. A, Math. Sci., **43**, 82/86 (1967)
- 6) T. Kato: A Generalization of the Heinz Inequality, Proc. Japan Acad. Ser. A, Math. Sci., **37**, 305/308 (1961)
- 7) D. G. Luenberger: Observers for Multivariable Systems, IEEE Automatic Control, **AC-11**, 190/197 (1966)
- 8) T. Nambu: On Stabilization of Partial Differential Equations of Parabolic Type: Boundary Observation and Feedback, Funkcial. Ekvac., **28**, 267/298 (1985)
- 9) T. Nambu: Output Stabilisation for a Class of Linear Parabolic Differential Equations, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, Sec. A, **110A**, 125/133 (1988)
- 10) T. Nambu: Continuous dependence of solutions to the Lyapunov equation relative to an elliptic differential operator of order 2, Math. Control, Signals, and Systems, **5**, 195/216 (1992)
- 11) T. Nambu: Approximation Algorithm for an Infinite-Dimensional Operator Equation $XL - BX = C$, Math. Control, Signals, and Systems, **7**, 76/93 (1994)
- 12) Y. Sakawa: Feedback Stabilization of Linear Diffusion Systems, SIAM J. Control Optim., **21**, 667/676 (1983)
- 13) W. M. Wonham: On Pole Assignment in Multi-Input Controllable Linear Systems, IEEE Trans. Automatic Control, **AC-12**, 660/665 (1967)

[著 者 紹 介]

南部 隆 夫 (正会員)

熊本大学助教授, 教授を経て, 現在, 神戸大学教授 (工学部). Postdoctoral scholar (University of California, Los Angeles), Fulbright scholar (University of Maryland, Baltimore), British Council scholar (University of Warwick), visiting associate professor (Texas A & M University), visiting professor (University of Minnesota). 日本数学会会員.