ハミルトン・ヤコビ不等式に基づく非線形システムの幾何構造^{†,‡}

山本直樹*・津村幸治*

Geometric Structure of Nonlinear Systems Based on Hamilton-Jacobi Inequality^{†,‡}

Naoki YAMAMOTO* and Kouji TSUMURA*

In this paper, we analyze the geometric structure of nonlinear systems with a viewpoint of the fact that the corresponding Hamilton-Jacobi (HJ) inequality has the set of solution. At first, we investigate “semi-solvable region” of the HJ inequality, which includes a true solvable region and gives us information on a part of the uncontrollable domain. Next, we introduce a non-Euclidean metric on the state space, and show that a system corresponds to a submanifold in a certain expanded manifold. We show that in the case of linear systems the submanifold is flat independent of the metric under adequate assumptions, and therefore the nonlinearity of systems can be represented by the curvature of this submanifold.

Key Words: nonlinear H_∞ control, Hamilton-Jacobi inequality, differential geometry

1. はじめに

非線形 H_∞ 制御問題を解くためには、ハミルトン・ヤコビ (HJ) 不等式なる 1 階の偏微分不等式の解を求める必要があり、この不等式に関する研究は、現在までのところ、以下のようものが知られている。第 1 に、HJ「方程式」の厳密解についてのもので、van der Schaft によるもの^{6),7)}、および坂本によるもの⁵⁾がある。特に、後者においては理論的な HJ 方程式の解法に加えて、HJ 方程式の安定化解の存在条件が述べられている。第 2 に、HJ 不等式の数値解法があり、これまでいくつかの提案がなされている^{2),3)}。

ところで、HJ 方程式の場合、坂本の論文で調べられているように、厳密解は完全可積分性を要求するため、これを得ることは、数値的にも非常に困難である。一方、HJ 不等式の場合、その不等号を満たすような解であれば良いので、HJ 不等式の解は一般には集合をなす。そこで、本論文では HJ 不等式の解が集合をなすことに着目し、2 つの独立な解析を行なった。

まず第 3 章で、HJ 不等式の解が存在するような「可解領域」を定義し、非線形 H_∞ 制御問題の制御仕様であるゲインパラメータに関する可解領域の大きさの単調性を示した。また、可解領域を内包する「準可解領域」を定義し、その性質お

よび存在条件を調べた。可解領域を求めることは HJ 不等式を満たす解集合を求めることと等価であり、非常に困難であるのに対して、準可解領域は数値的に容易に求めることができ、それは「HJ 不等式の解が存在し得ない領域」について情報を与えるものである。

つぎに、第 4 章では HJ 不等式の解が集合をなすことを利用して、状態空間に非ユークリッド的な計量を導入し、与えられた (アファインな) 非線形システムを、ある拡大された多様体の部分多様体と対応付けた。このとき、部分多様体の曲がり具合は HJ 不等式の解である正定値関数の等高線の曲率と対応付けられる。すなわち、非線形 H_∞ 制御問題の枠組みにおいて、本論文で導入した部分多様体の曲率はシステムの非線形性の表現を与える。これは、システムの軌道の曲がり具合を扱ってきた従来の微分幾何学的なアプローチとは異なるものである。解析の内容としては、まず平坦な部分多様体が SISO 線形システムに対応付けられることを示し、つぎに、システムの次数が 2 の場合に具体的に計量を構成し、その計量を用いた数値例を示した。この例題において、2 つの非線形システム間の差異が、対応する部分多様体の曲率で表現されることを示す。また付録では、第 4 章で必要となる微分幾何学の内容¹⁾をまとめた。

本論文で用いる記号は以下の通りである。ベクトル $x \in \mathbb{R}^n$ に対して $\|x\|$, $\|x\|_2$ はそれぞれユークリッドノルム, L_2 ノルムである。スカラー値関数 $V(x)$ に対して $\frac{\partial V(x)}{\partial x}$ は $\frac{\partial V(x)}{\partial x_i}$ を要素とする n 次元の縦ベクトルである。また、 $PD(n)$, $SPD(n)$ はそれぞれ n 次の正定対称行列, 半正定対称行列の集合を表わす。

[†] 第 23 回 Dynamical System Theory シンポジウムにおいて発表 (2000・11)

[‡] 第 1 回制御部門大会において一部発表 (2001・5)

* 東京大学大学院 情報理工学系研究科 システム情報学専攻
東京都文京区本郷 7-3-1

* Department of Information Physics and Computing, Graduate School of Information Science and Technology, The University of Tokyo, Hongo 7-3-1, Bunkyo-ku, Tokyo
(Received June 28, 2001)
(Revised November 6, 2001)

2. 非線形 H_∞ 制御とハミルトン・ヤコビ不等式

つぎのような非線形システムを考える.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + G_1(x)u + G_2(x)w \\ y &= h(x)\end{aligned}\quad (1)$$

ここで, x, u, w, y はそれぞれ適当な次数の状態変数, 入力, 外乱, 出力であり, f, h, G_1, G_2 は C^∞ 級であるとする. また, 仮定として $f(0) = 0, h(0) = 0$ を満たすものとする. この系に対して

$$\sup_{w \in L_2/\mathcal{O}} \frac{\|y\|_2^2 + \|u\|_2^2}{\|w\|_2^2} \leq \gamma^2 \quad (2)$$

を達成させるような状態フィードバック $u = u(x)$ は, つぎの「HJ 不等式」を満たす C^∞ 級正定値関数 $V(x) \geq 0$, $V(0) = 0$ によって

$$u(x) = -G_1(x)^T \frac{\partial V(x)}{\partial x}$$

として構成することができる^{6),7)}.

$$\begin{aligned}H(x, p(x)) \\ := p(x)^T f(x) + \frac{1}{2} p(x)^T \left(k G_2(x) G_2(x)^T \right. \\ \left. - G_1(x) G_1(x)^T \right) p(x) + \frac{1}{2} h(x)^T h(x) \leq 0\end{aligned}\quad (3)$$

ここで, $p(x) := \frac{\partial V(x)}{\partial x}$, $k := \frac{1}{\gamma^2}$ である. 本論文では, k を「ゲインパラメータ」と呼ぶ. k の値が大きいほど, 高精度な制御仕様を要求していることに注意する. また, C^∞ 級正定値関数 $V(x)$ が $V(0) = 0$ を満たすので, $p(0) = 0$ である. 結局, 求めるものは条件

(P1) ベクトル場 $p(x)$ は各点で HJ 不等式 $H(x, p(x)) \leq 0$ を満たす.

(P2) ベクトル場 $p(x)$ は正定値関数 $V(x)$, $V(0) = 0$ を用いて, $p(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x}$, $p(0) = 0$ と書かれる. を満たすベクトル場 $p(x)$ であることがわかる.

ここで, ある与えられた k に対して上の条件 (P1) と (P2) を満たすベクトル場 $p(x)$ が存在するような x の集合を $\mathcal{T}_k$ とする. $\mathcal{T}_k$ は, 非線形 H_∞ 制御問題の拘束条件 (2) が成立するような状態変数の領域であり, すなわち, HJ 不等式の解の定義域である. また, $p(0) = 0$ より $\mathcal{T}_k$ は原点を含む.

3. ハミルトン・ヤコビ不等式の可解領域

3.1 1次システムの例題

まず, 「解が存在する領域」を1次システムの例題で考えてみよう. この例題において, x, u, w, y はすべてスカラー値である. つぎのような1次の非線形システムを考える.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -2x + 2xu + xw \\ y &= x\end{aligned}$$

対応する HJ 不等式は

$$-2xp(x) + \frac{1}{2}(k-4)x^2p(x)^2 + \frac{1}{2}x^2 \leq 0 \quad (4)$$

となる. これは p についての2次不等式なので解析的に解くことができる. すなわち, $p = p(x)$ が存在する領域を $x-p$ 平面で描くと, Fig.1 のようになる.

Fig. 1 The region which satisfies (4) ((a) $0 < k < 4$ (b) $k = 4$ (c) $4 < k$)

Fig.1 において,

$$c_+ := \frac{1}{\sqrt{k-4}}, \quad c_- := \frac{1}{\sqrt{4-k}}$$

である. まず, $\mathcal{T}_k$ は Fig.1 の (a), (b) については $\mathcal{R}^1$ 全体と一致することがわかる. 一方 Fig.1 の (c) については $\mathcal{T}_k$ は $[-2c_+, 2c_+]$ に制限されており, さらに, k を大きくすると (すなわち, より厳しい制御を行なおうとすると), $\mathcal{T}_k$ はより狭い領域に制限されてしまう. 結局, この例題を通してつぎのことがわかる.

- 線形システムに対する HJ 不等式は, すべての k に対して解をもつとは限らないが, 例題の非線形システムに対する HJ 不等式は, すべての k に対して可解である.
- 線形システムの場合, 解の定義域 $\mathcal{T}_k$ はつねに全実数 $\mathcal{R}^1$ に及ぶが, 例題の非線形システムの場合, $\mathcal{T}_k$ は k に依存する (単調である).

これらの制御論的な意味はつぎのようなものである. まず, 線形系においては解 (つまり, コントローラ) を構成できるゲインパラメータの範囲が自動的に指定されるのに対して, 例題の非線形系においては, そのようなことは見られない. すなわち, 線形系の場合と異なり, 無限に高精度な制御 (これは k の値が大きいことに対応する) が実現でき得る. 一方で, そのような高精度な制御を行なおうとすると, HJ 不等式が成立する (つまり, 制御が行なえる) 状態変数の定義域 $\mathcal{T}_k$ が有限に制限される. さらに, 制御がハイゲインになればなるほど $\mathcal{T}_k$ は減少する.

以上の考察は非線形 H_∞ 制御問題の「最適解」について再考を促すものである. すなわち, 線形 H_∞ 制御問題においては, 最適解は k を最大にするものとして得られるが, 非線形の場合はそのようには決められず, k と $\mathcal{T}_k$ の関係を知った上で適切なコントローラを設計する必要がある. ところで, 例題においては k と $\mathcal{T}_k$ の間に単調性が見られた. この場合, 最適解はそれらのトレードオフとして決めることができる. そこで, このような単調性がどの程度一般化できるのか, また具体的に k に対する $\mathcal{T}_k$ の領域の推移を表現できるかどうか

について、以下の3.2~3.5節で調べていこう。

3.2 可解領域の定義と性質

3.1節から、非線形系を対象とするときはゲインパラメータ k 、解の定義域 T_k がともに重要な役割を果たすことがわかった。このことは、条件 (P1) と (P2) を同時に満たすベクトル場 $p(x)$ が存在するような (x, k) の集合を解析する必要性を示している。そこで、HJ 不等式の定義域である T_k について、 k を固定しない領域：

$$T := \{(x, k) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1 \mid x \in T_k, T_k \neq \emptyset\} \quad (5)$$

を定義すれば、この領域内の点 (x, k) においては条件 (P1) と (P2) を同時に満たすベクトル場 $p(x)$ を定めることができる。 T を HJ 不等式の「可解領域」と呼ぶことにすると、この可解領域 T について、つぎの命題が成立する。

命題 1

$$(x, k) \in T \Rightarrow \forall \delta k > 0, (x, k - \delta k) \in T$$

証明

HJ 不等式の1つの解 $p(x)$ が得られているとする。このとき、点 $(x_0, k_0) \in T$ において

$$\begin{aligned} H(x_0, p(x_0), k_0) &:= p(x_0)^T f(x_0) + \frac{1}{2} p(x_0)^T \left(k_0 G_2(x_0) G_2(x_0)^T \right. \\ &\quad \left. - G_1(x_0) G_1(x_0)^T \right) p(x_0) + \frac{1}{2} h(x_0)^T h(x_0) \leq 0 \end{aligned}$$

が成立している。すると、点 $(x_0, k_0 - \delta k)$ において、

$$\begin{aligned} H(x_0, p(x_0), k_0 - \delta k) &= H(x_0, p(x_0), k_0) - \frac{1}{2} \delta k \|G_2(x_0)^T p(x_0)\|^2 \leq 0 \end{aligned}$$

となり、これは $(x_0, k_0 - \delta k) \in T$ であることを表す。□

この命題は、HJ 不等式の解 $p(x)$ に対して、ある k_0 で $x = x_0$ が解の定義域に含まれるならば、 k_0 以下のすべての k においても、 $x = x_0$ は解の定義域に含まれる、というものである。すなわち、可解領域 T は k 方向については1点で分断される。この考察によりつぎの系を得る。

系 2

解の定義域 T_k と k の間につぎが成立する。

$$k_2 > k_1, \quad T_{k_2} \subseteq T_{k_1}$$

系2は、前節の1次システムの例題において見られた、 T_k と k の間の単調性が、一般の n 次システムに対しても同様に成立することを表わしている。

(注1) 前節でも述べたとおり、HJ 不等式の最適解は T_k と k の両者を考慮して決められるべきものである。いま、一般の場合に T_k と k の間に単調性があることがわかったので、

最適解はそれらのトレードオフとして決めれば良い。

3.3 準可解領域の定義と性質

前節では、可解領域 T を定義し、それにより T_k と k の間の単調性を見た。しかし、 T は HJ 不等式の解によって構成されるものであるから、数値的にも、その概形を知ることが容易でない。そこで、数値的に容易に得ることができる集合として、以下のものを考える。まず、HJ 不等式において、 $s(x) := h(x)^T h(x)$ とおいた式

$$p^T f + \frac{1}{2} p^T (k G_2 G_2^T - G_1 G_1^T) p + \frac{1}{2} s \leq 0$$

をつぎのように書き直す。

$$\begin{aligned} H(x, p, k) &:= p^T f + \frac{1}{2} p^T (k G_2 G_2^T - G_1 G_1^T) p + \frac{1}{2} s \\ &= \frac{1}{2} (p^T \quad 1) \begin{pmatrix} k G_2 G_2^T - G_1 G_1^T & f \\ f^T & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} (p^T \quad 1) D(x, k) \begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix} \leq 0 \end{aligned}$$

ここで、

$$D(x, k) := \begin{pmatrix} k G_2 G_2^T - G_1 G_1^T & f \\ f^T & s \end{pmatrix} \quad (6)$$

は $n+1$ 次の対称行列である。

ここで、もしある (x_0, k_0) において $D(x_0, k_0)$ が正定となるならば、すべての p に対して

$$(p^T \quad 1) D(x_0, k_0) \begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix} > 0$$

となるため、 $H(x_0, p, k_0) > 0$ より、このような点 (x_0, k_0) においては HJ 不等式の解は得られない。そこで、そのような集合として「非可解領域」をつぎで定義する。

$$\mathcal{M}^C = \{(x, k) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1 \mid D(x, k) \in PD(n+1)\} \quad (7)$$

ここで、上付きの C は補集合を表す。非可解領域は行列 $D(x, k)$ の正定性だけで判別できるので、数値的に容易に得ることができる。

さて、以降の節で非可解領域 $\mathcal{M}^C$ の性質を調べていくのだが、解析にあたってはその補集合である

$$\mathcal{M} = \{(x, k) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1 \mid D(x, k) \notin PD(n+1)\} \quad (8)$$

に注目すると便利である。ここで、 T が「条件 (P1)、条件 (P2) を満たす集合」であるのに対して、 $\mathcal{M}^C$ は「条件 (P1) を満たさない集合」であるから、 $\mathcal{M}^C \subset T^C$ が成立する。ゆえに、 $T \subseteq \mathcal{M}$ から、 $\mathcal{M}$ を、真の可解領域を含むものとして「準可解領域」と呼ぶことにする。

(注2) HJ 不等式の解が見つからないということは、非線形 H_∞ 制御問題の制御仕様である (2) 式を達成するようなコントローラ $u(x)$ が見つからない、ということなので、集合

$\mathcal{M}^C$ を求めることで得られる情報は、「制御が不可能である点」についてのものである。もちろん、 $\mathcal{M}^C \subset \mathcal{T}^C$ であり、 $\mathcal{M}^C$ に含まれていなくても、制御が不可能である点は存在する。

以下、準可解領域 $\mathcal{M}$ の性質について調べることにする。このことは $\mathcal{M}$ の、幾何学的な位相構造を与える。

まずつぎのことがわかる。

命題 3

- (a) $\forall k, (0, k) \in \mathcal{M}$
 (b) $\forall x, (x, 0) \in \mathcal{M}$

証明

$x = 0$ のとき、 $f(0) = 0, s(0) = 0$ であるから、

$$D(0, k) = \begin{pmatrix} kG_2(0)G_2(0)^T - G_1(0)G_1(0)^T & O_{n \times 1} \\ O_{1 \times n} & 0 \end{pmatrix}$$

より、すべての k に対して $D(0, k) \notin PD(n+1)$ となるので、(a) がわかる。一方、

$$D(x, 0) = \begin{pmatrix} -G_1(x)G_1(x)^T & f(x) \\ f(x)^T & s(x) \end{pmatrix}$$

であるから、 $D(x, 0)$ の $(1, 1)$ 要素は明らかに非正となる。これより、すべての x に対して $D(x, 0) \notin PD(n+1)$ となるので、(b) がわかる。□

この命題は、すべてのゲインで原点 $x = 0$ は準可解領域に含まれること、ゲインを無限大とするととき領域のすべての点が準可解領域に含まれること、を表わしている。これは対象のシステムに課された仮定 $f(0) = 0, h(0) = 0$ の表われである。

自明ではあるが、以降でつぎの補題が重要な役割を果たす。

補題 4

$D(x, k)$ の最小固有値は k について単調増加である。

証明

いま、 x は固定しているものとし、 $D(x, k)$ を $D(k)$ とかく。このとき、一般に $D(k)$ の最小固有値 $\lambda_{\min} D(k)$ は

$$\lambda_{\min} D(k) = \inf_y y^T D(k) y$$

とかかれる。ただし、 $y \in \mathbb{R}^{n+1}$ は $\|y\| = 1$ をみたす。すると、 y の最初の n 次元ベクトルを $\bar{y}$ とかくとき、 $\delta k > 0$ に対して、

$$\begin{aligned} \lambda_{\min} D(k + \delta k) &= \inf_y y^T D(k + \delta k) y \\ &= \inf_y (y^T D(k) y + \delta k \|G_2^T \bar{y}\|^2) \end{aligned}$$

が得られ、ゆえに

$$\lambda_{\min} D(k + \delta k) - \lambda_{\min} D(k) \geq 0$$

となるので、 $\lambda_{\min} D(k)$ は k について単調増加であることがわかる。□

命題 3、補題 4 をあわせて、つぎのことがわかる。ある点 (x_0, k_0) が $\mathcal{M}^C$ に含まれるとき、 $(x_0, 0)$ が $\mathcal{M}$ 内の点であるから、 k が減少すれば、すなわち制御性能を下げれば、ある k ($0 < k < k_0$) で $(x_0, k) \in \mathcal{M}$ とすることができる。

ところで、命題 3 から原点 $(x, k) = (0, 0)$ は必ず $\mathcal{M}^C$ に含まれるが、つぎの命題は、その領域が原点を含む弧状連結な集合であることを示すものである。

命題 5

$\mathcal{M}$ は $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1$ の原点を含む弧状連結な部分集合である。

証明

$\mathcal{M}$ 内の異なる 2 点 $(x_1, k_1), (x_2, k_2)$ を結ぶ連続曲線が存在することを示せばよい。補題 4 から、 (x_1, k_1) と $(x_1, 0)$ 、および (x_2, k_2) と $(x_2, 0)$ を結ぶ $\mathcal{M}$ 内の連続曲線が存在し、また、命題 3 から $(x_1, 0)$ と $(x_2, 0)$ を結ぶ連続曲線が存在することがわかる。ゆえに結局 $(x_1, k_1), (x_2, k_2)$ が $\mathcal{M}$ 内の連続曲線で結ばれることがわかる。□

命題 5 から、準可解領域 $\mathcal{M}$ は原点を含む $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1$ の弧状連結な部分集合であることがわかった。

以上の解析から $\mathcal{M}$ の形状、およびその性質の一部がわかる。まず、命題 3、命題 5 から、 $\mathcal{M}$ は $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1$ の、原点を含む弧状連結な部分集合である。つぎに、補題 4 から、 $\mathcal{M}$ と $\mathcal{M}^C$ は k 方向については 1 点で分断されることがわかる。このことから $\mathcal{M}$ の形状の一例を $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1$ の部分集合として描いてみると、Fig. 2 のようになる。

Fig. 2 Example of the structure of $\mathcal{M}$

$\mathcal{T} \subseteq \mathcal{M}$ であるが、 $\mathcal{T}$ は必ずしも $\mathcal{M}$ と同様の位相構造を持つものではない。すなわち、 k 方向に 1 点で分断される点は同じであるが、 $\mathcal{T}$ については弧状連結性は不明である。ただし、 $p(0) = 0$ より k 軸は $\mathcal{T}$ に含まれる。ゆえに、 $x = 0$ 近傍に限れば、 $\mathcal{T}$ と $\mathcal{M}$ は等しい位相構造をもつ。

ここで、ある k に対してつぎの集合を定義する。

$$\mathcal{M}_k := \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x, k) \in \mathcal{M}\} \quad (9)$$

このとき、 $\mathcal{M}$ は弧状連結であるが、 $\mathcal{M}_k$ は必ずしも弧状連結ではないことに注意する。実際、Fig. 2 において、 k を一定としたときの断面である $\mathcal{M}_k$ のうち弧状連結でないものが存

在する。さらに、 $T_k \subseteq \mathcal{M}_k$ であり、また明らかにつぎが成立する。

$$k_2 > k_1, \quad \mathcal{M}_{k_2} \subseteq \mathcal{M}_{k_1} \quad (10)$$

このことは、準可解領域の枠組みにおける、系2の表現である。

(注3) 線形システムを対象とするときは、 $\mathcal{M}$ と $\mathcal{M}^C$ は超平面 $k = k_0$ で分割される(ただし、 $x = 0$ は除く)。そして、 $\mathcal{M}_k = T_k$ と $\mathcal{M} = T$ が常に成立する。このことは線形系のもつ、一つの大きな特徴である。

3.4 システムの次数と準可解領域の関係

注2で述べたように、我々は「制御不可能な集合」 T^C の部分集合である $\mathcal{M}^C$ を求めることで、可解領域についての情報を得る。そこで、 $\mathcal{M}^C \neq \emptyset$ となる必要十分条件を与える。

命題6

$$\exists x, G_2(x)G_2(x)^T \in PD(n) \Leftrightarrow \mathcal{M}^C \neq \emptyset$$

証明

$\mathcal{M}^C \neq \emptyset$ ということは、ある (x_0, k_0) で $D(x, k_0) \in PD(n+1)$ が成立していることを表わしているが、これは Schur complement から、つぎのことと同値である。

$$\exists x, k, kG_2G_2^T - G_1G_1^T - \frac{1}{s}ff^T \in PD(n)$$

このことを簡単に、

$$\exists x, k, kF_2 - F_1 \in PD(n)$$

とかく。ただし、

$$F_2 := G_2G_2^T \in SPD(n)$$

$$F_1 := G_1G_1^T + \frac{1}{s}ff^T \in SPD(n)$$

であり、このとき命題の内容は、

$$\exists x, F_2 \in PD(n) \Leftrightarrow \exists x, k, kF_2 - F_1 \in PD(n)$$

とかくことができる。まず十分条件から示す。 $F_2 \in PD(n)$ から、 F_2 は成分をすべて正とする対角行列 Λ 、直交行列 U を用いて $F_2 = U\Lambda U^T$ とできる。すると、任意の $y \in \mathbb{R}^n$ に対して、

$$y^T(kF_2 - F_1)y = k(U^T y)^T \Lambda (U^T y) - y^T F_1 y$$

であり、第1項が正であることから、ある k_0 が存在して、

$$\forall k > k_0, k(U^T y)^T \Lambda (U^T y) - y^T F_1 y > 0$$

とできる。すなわち、ある (x, k) に対して、 $kF_2 - F_1 \in PD(n)$ とすることができる。つぎに、必要条件の対偶である「すべての x に対して F_2 が固有値ゼロをもつとき、すべての (x, k) に対して $y^T(kF_2 - F_1)y \leq 0$ とする y が存在する」ことを示す。十分条件の証明の類似で、 F_2 は対角成分のうち少なくとも1つがゼロ、残りが正であるような対角行列 $\bar{\Lambda}$ を用いて、 $F_2 = U\bar{\Lambda}U^T$ と表現できる。すると、

$$y^T(kF_2 - F_1)y = k(U^T y)^T \bar{\Lambda} (U^T y) - y^T F_1 y$$

であるが、 y を適当に選べば $(U^T y)^T \bar{\Lambda} (U^T y) = 0$ とできるので、結局、

$$\exists y, y^T(kF_2 - F_1)y \leq 0$$

とできることが示された。□

また、命題6から、状態変数 x の次数、外乱 w の次数を用いて、つぎのような系を得ることができる。

系7

$$\dim(x) > \dim(w) \Rightarrow \mathcal{M}^C = \emptyset$$

この系7より、外乱の次数が状態変数の次数未満であるときは非可解領域 $\mathcal{M}^C$ が空集合である、すなわち $\mathcal{M} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1$ となることがわかる。

(注4) 本論文では $\mathcal{M}^C$ と T^C のギャップについて調べていないが、 $\mathcal{M}^C = \emptyset$ である、ということが真の可解領域 T については何もわからない、ということを表わしているのではないかと予想される。一方で、系7は大部分の制御システムについて $\mathcal{M}^C = \emptyset$ であることを示しており、そのような場合は、本稿とは異なるアプローチによって可解領域を解析する必要がある。

3.5 数値例

ここでは、ある例題に対して $\mathcal{M}_k$ (準可解領域 $\mathcal{M}$ について、 k を固定した n 次元の領域) を計算して、図示する。対象はつぎのような非線形システムとする。

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 + x_2^2 \end{pmatrix}, \quad G_1(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$G_2(x) = \begin{pmatrix} x_1 & 2 \\ -1 & x_2 \end{pmatrix}, \quad h(x) = x_1 - x_2 \quad (11)$$

このシステムは、 $G_2(x)G_2(x)^T \in PD(n)$ となるような x が存在するので、命題6より、 $\mathcal{M}^C$ は存在する。そこで $k = 1, 2, 3, 4$ の場合に $\mathcal{M}_k$ を数値的に図示すると、Fig.3 のようになる。Fig.3において、白い部分が $\mathcal{M}_k$ であり、原点がつねに $\mathcal{M}_k$ に含まれていること、および $k_2 > k_1$ に対して $\mathcal{M}_{k_2} \subseteq \mathcal{M}_{k_1}$ が成立していることがわかる。また、 k を大きくすると、原点近傍にある非可解領域が急激に拡大されることがわかる。

4. ハミルトン・ヤコビ不等式に基づく非線形システムと部分多様体の関係

HJ 不等式は2つの条件 (P1), (P2) を満たすベクトル場 $p(x)$ を解としてもつ。3章においては、この条件のうち (P2) を考慮に入れないことで HJ 不等式の準可解領域を定義し、

Fig. 3 Figure of $\mathcal{M}_k$ for the system (11) ((a) $k=1$ (b) $k=2$ (c) $k=3$ (d) $k=4$)

解析した。そこで、4章では条件 (P2) も考慮に入れた解析を行なう。なお、本章で用いる数学的事項については付録を参照のこと。

4.1 非線形システムと部分多様体の関係

条件 (P1) の HJ 不等式を見ると、これは $x = x_0$ においては p についての集合

$$\wp(x_0) := \{p \mid H(x_0, p) \leq 0\} \quad (12)$$

である。ここで、「HJ 方程式」の場合、各点 $x = x_0$ には解を構成する $p(x_0)$ はただ1つ与えられていることに注意する。ところが HJ 不等式の場合、解は集合をなし、点 $x = x_0$ における解 $p = p(x_0)$ は、上記の集合 $\wp(x_0)$ から選び出されることになる。そこで、隣接する2点 x_A, x_B における HJ 不等式の解 $p(x)$ の変化を、集合 $\wp(x_A), \wp(x_B)$ の間の距離で反映させることにする。その上で、各点 x で定義される集合 $\wp(x)$ がすべての x に対していかなる構造をもっているかを解析する。これは、 x の空間 (状態空間) を各点に集合が定まっている多様体として解析することと等価であり、特に、集合間の距離を測る計量を導入することで、空間の曲がり具合を調べることができる。

一方で、条件 (P2) を考慮に入れるということは、ベクトル場 $p(x)$ が正定値関数 $V(x)$ の勾配であることを意味する。すると、 $V(x)$ の等高線の曲率は $p(x)$ の変化量で決まる (すなわち、変化量が大きいと曲率も大きく、変化量が小さいと曲率は小さい) が、いまこの量を $\wp(x)$ 間の距離で置き換えているので、結局、 $V(x)$ の等高線の曲率は上で導入した多様体の曲率によって表現されることがわかる。

以上のような設定を行なう利点はつぎのようである。まず、 $V(x)$ の存在は仮定する。すると、上で述べたことから、「 $V(x)$ が存在するならば、その等高線の曲率が計算できる」ことがわかる。このとき、曲率の大きさは $V(x)$ の「非線形性」を表現するものと考えられるので、実際に解を構成する

ことなく、その複雑さを把握できる手段を与える、というのが本設定の利点である。

(注5) 本章においては $V(x)$ の存在は仮定されているので、正定な $V(x)$ を実際に構成できるか (すなわち、可積分であるか)、についての情報は本章の設定によって得ることはできない。

n 次の HJ 不等式は、一般には

$$\frac{1}{2}(p^T \ 1)D(\eta) \begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix} \leq 0 \quad (13)$$

$$D(\eta) = \begin{pmatrix} \eta_1 & \eta_2 & \cdots & \eta_{m-n+1} & \eta_{m+1} \\ * & \eta_3 & \cdots & \eta_{m-n+2} & \eta_{m+2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ * & * & \cdots & \eta_m & \eta_{m+n} \\ * & * & \cdots & * & \eta_{m+n+1} \end{pmatrix} \quad (14)$$

と書ける。ここで、 $m = \frac{1}{2}n(n+1)$ であり、 $D(\eta)$ は $n+1$ 次の対称行列である。ゆえに、 $\eta_1, \dots, \eta_{m+n+1}$ を決めると p の集合が1つ決まるので、これを $m+n+1$ 次元の多様体 $\mathcal{H}$ とする。一方、与えられたシステムに対応する HJ 不等式は次式を満たすような写像 $\eta = \eta(x)$ で与えられる。

$$D(\eta) = \begin{pmatrix} kG_2(x)G_2(x)^T - G_1(x)G_1(x)^T & f(x) \\ f(x)^T & s(x) \end{pmatrix} \quad (15)$$

ゆえに、これが「埋め込み」であるとき、 $x_1, \dots, x_n$ の空間は $\mathcal{H}$ に対する n 次元の部分多様体 $\mathcal{X}$ を構成する。このようにして、1つの HJ 不等式を部分多様体と対応させることができる。

さて、以上のような設定で、非線形システムの特徴をとらえるため、まずはつぎのような、SISO 線形システムについて成立することを調べる。すなわち、

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + G_1 u + G_2 w \\ y &= c^T x \end{aligned}$$

を対象とするときの部分多様体 $\mathcal{X}_L$ の性質を調べることにする。ただし、 G_1, G_2, c は n 次元の列ベクトルである。まず、写像 $\eta = \eta(x)$ はつぎを満たす。

$$\begin{aligned} \eta_i &= d_i \quad (1 \leq i \leq m) \\ \eta_{m+i} &= \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k \quad (1 \leq i \leq n) \\ \eta_{m+n+1} &= \left(\sum_{k=1}^n c_k x_k \right)^2 \end{aligned} \quad (16)$$

ただし、 d_i ($i = 1, \dots, m$) は適当な定数。

制御系設計の立場からは、部分多様体 $\mathcal{X}$ の (リーマン) 曲率を計算することで、対象としているシステムの非線形性を知ることができれば有用である。つまり、システムとの差や、あるシステムとその線形近似系との差を曲率によって定

量化する。その際、量の基準が必要であるが、これについてはつぎの命題8の結果を利用する。一般に計量の選び方には自由度があるが、命題8は、 $\mathcal{H}$ 上の計量がある仮定(注6参照)を満たせば、線形システムの場合 $\mathcal{X}_L$ の曲率がゼロであることを述べている。ゆえに、曲率の基準を線形系の場合とすれば、ノンゼロの曲率をもつシステムの非線形性は、その曲率によって与えられる。

命題8

1 出力の n 次線形システムに対応する n 次元部分多様体 $\mathcal{X}_L$ について、計量が $\eta_{m+1}, \eta_{m+2}, \dots, \eta_{m+n+1}$ に依存しない、すなわち、 $m+n+1$ 次元多様体 $\mathcal{H}$ に与えられる計量行列がつぎであるとする。

$$g = \begin{pmatrix} g_0 & O \\ O & I \end{pmatrix} \quad (17)$$

ここで、 g_0 は $\eta_{m+1}, \eta_{m+2}, \dots, \eta_{m+n+1}$ に依存しない、 m 次正方行列であり、 I は $n+1$ 次の単位行列である。このとき、部分多様体 $\mathcal{X}_L$ のリーマン曲率テンソルは常にゼロである。すなわち、 $\mathcal{X}_L$ は平坦である。

証明

まず、(A.4) 式を用いて $\mathcal{H}$ 上の計量 g から $\mathcal{X}_L$ 上の計量 $\bar{g}$ を誘導する。すると、 $1 \leq i \leq m$ のとき η_i は定数なので $\partial \eta_i / \partial x_a = 0$ がすべての $a = 1, 2, \dots, n$ について成立する。ゆえに、

$$\begin{aligned} \bar{g}_{ab} &= \sum_{i,j=1}^{m+n+1} g_{ij} \frac{\partial \eta_i}{\partial x_a} \frac{\partial \eta_j}{\partial x_b} \\ &= \sum_{i=1}^n a_{ia} a_{ib} + (2c^T x)^2 c_a c_b \end{aligned} \quad (18)$$

のように $\mathcal{X}_L$ 上の計量が求まる。つぎに、 $\mathcal{X}_L$ に誘導されるリーマン接続係数を (A.6) 式によって計算する。ここで、 g_0 が $\eta_{m+1}, \eta_{m+2}, \dots, \eta_{m+n+1}$ に依存しないという仮定をおいているため、 $k \geq m+1$ のとき $\Gamma_{ij,k} = 0$ である。一方、 $1 \leq k \leq m$ においては η_k は定数なので、すべての c で $\partial \eta_k / \partial x_c = 0$ である。ゆえに、

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{ab,c} &= \sum_{j,k} \left(\frac{\partial^2 \eta_j}{\partial x_a \partial x_b} \right) g_{jk} \left(\frac{\partial \eta_k}{\partial x_c} \right) \\ &= \left(\frac{\partial^2 \eta_{m+n+1}}{\partial x_a \partial x_b} \right) \left(\frac{\partial \eta_{m+n+1}}{\partial x_c} \right) \end{aligned}$$

となり、(16) 式から、

$$\bar{\Gamma}_{ab,c} = 4c_a c_b c_c (c^T x)$$

となる。これを用いて、 $\bar{\Gamma}_{ab}^c$ を計算することができる。

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{ab}^c &= \sum_d \bar{g}^{cd} \bar{\Gamma}_{ab,d} \\ &= 4c_a c_b (c^T x) (c^T \bar{g}^c) \end{aligned}$$

ただし、

$$\bar{g}^c = \begin{pmatrix} \bar{g}^{c1} \\ \bar{g}^{c2} \\ \vdots \\ \bar{g}^{cn} \end{pmatrix}$$

のようにおいた。最後に、この $\bar{\Gamma}_{ab}^c$ を用いてリーマン曲率テンソル：

$$\bar{R}_{abc}^d = \frac{\partial \bar{\Gamma}_{bc}^d}{\partial x_a} - \frac{\partial \bar{\Gamma}_{ac}^d}{\partial x_b} + \sum_e \bar{\Gamma}_{ae}^d \bar{\Gamma}_{bc}^e - \sum_e \bar{\Gamma}_{be}^d \bar{\Gamma}_{ac}^e \quad (19)$$

を計算する。まず、第3項、第4項のみを計算すると、

$$\begin{aligned} &\sum_e \bar{\Gamma}_{ae}^d \bar{\Gamma}_{bc}^e - \sum_e \bar{\Gamma}_{be}^d \bar{\Gamma}_{ac}^e \\ &= (4c^T x)^2 \sum_{k=1}^n c_a c_k (c^T \bar{g}^d) c_b c_c (c^T \bar{g}^k) \\ &\quad - (4c^T x)^2 \sum_{k=1}^n c_b c_k (c^T \bar{g}^d) c_a c_c (c^T \bar{g}^k) \\ &= (4c^T x)^2 \sum_{k=1}^n (c^T \bar{g}^d) (c^T \bar{g}^k) (c_a c_k c_b c_c - c_b c_k c_a c_c) \\ &= 0 \end{aligned}$$

となるので、リーマン曲率テンソルは

$$\begin{aligned} \bar{R}_{abc}^d &= \frac{\partial \bar{\Gamma}_{bc}^d}{\partial x_a} - \frac{\partial \bar{\Gamma}_{ac}^d}{\partial x_b} \\ &= \frac{\partial}{\partial x_a} [4c_b c_c (c^T x) (c^T \bar{g}^d)] \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial x_b} [4c_a c_c (c^T x) (c^T \bar{g}^d)] \\ &= 4c_c (c^T x) \left[c_b \frac{\partial (c^T \bar{g}^d)}{\partial x_a} - c_a \frac{\partial (c^T \bar{g}^d)}{\partial x_b} \right] \end{aligned}$$

のように計算できる。ここで、(18) 式より $\bar{g}^d$ は $f := c^T x$ の関数である。ゆえに、 $\bar{R}_{abc}^d$ は引き続き、以下のように計算できる。

$$\begin{aligned} \bar{R}_{abc}^d &= 4c_c (c^T x) \left[c_b \frac{\partial (c^T \bar{g}^d)}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial x_a} - c_a \frac{\partial (c^T \bar{g}^d)}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial x_b} \right] \\ &= 4c_c (c^T x) \left[c_b \frac{\partial (c^T \bar{g}^d)}{\partial f} c_a - c_a \frac{\partial (c^T \bar{g}^d)}{\partial f} c_b \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

これより、すべての a, b, c, d に対してリーマン曲率テンソルがゼロであることがわかった。□

(注6) 計量は、多様体上の隣接する2つの要素間の距離を定めるものであるが、いま、各要素は集合(12)であり、この集合の境界は、 p 空間において、2次曲面となっている。命題8の、 $\mathcal{H}$ 上の計量 g に対する仮定は、隣接する2次曲面が平行移動 ($d\eta_{m+1}, \dots, d\eta_{m+n}$ に依存する)、およびスケール変換 ($d\eta_{m+n+1}$ に依存する) の関係にあるとき、その距離は場所 η には依存しない、というものである。

4.2 計量の構成法 (2 次の場合の例題)

この節では計量 g の構成法を, $n = 2$ の場合に例題をもって示す. このとき, $m = 3$ であるから, 多様体 $\mathcal{H}$ の次元は $n + m + 1 = 6$ である. $\mathcal{H}$ 上の隣接する 2 点 η と $\eta + d\eta$ の間の微小距離 ds をつぎで与える (δ_{ij} はクロネッカーのデルタである).

$$\begin{aligned} ds^2 &= \sum_{i,j=1}^6 g_{ij} d\eta_i d\eta_j \\ &= d\lambda_1^2 + d\lambda_2^2 + 2d\theta^2 + \sum_{i,j=1}^6 \delta_{ij} d\eta_i d\eta_j \end{aligned} \quad (20)$$

ここで, λ_1, λ_2 はつぎの行列の固有値である.

$$R := \begin{pmatrix} \eta_1 & \eta_2 \\ \eta_2 & \eta_3 \end{pmatrix}$$

また, θ は注 6 で述べた, 2 次曲面 (今の場合, 2 次曲線) の主軸の回転角である. この微小距離は η_4, η_5, η_6 に依存せず, ゆえに命題 8 が適用できる. $d\lambda_1, d\lambda_2, d\theta$ は, たとえば Fig. 4 のように関係している.

Fig. 4 Relation between $d\lambda_1, d\lambda_2$ and $d\theta$

つぎに, 微小距離 (20) から計量を構成する. 目標は $d\lambda_1, d\lambda_2, d\theta$ を, $d\eta_1, d\eta_2, d\eta_3$ を用いて表わすことである. まず, 行列 R は $\lambda_1, \lambda_2, \theta$ を用いて, つぎのように表わせる.

$$R = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

これを計算すれば, その成分は

$$\eta_1 = \lambda_1 \cos^2 \theta + \lambda_2 \sin^2 \theta \quad (21)$$

$$\eta_2 = (\lambda_1 - \lambda_2) \cos \theta \sin \theta \quad (22)$$

$$\eta_3 = \lambda_1 \sin^2 \theta + \lambda_2 \cos^2 \theta \quad (23)$$

と求まる. これより, $d\eta_2$ はつぎのように計算できる. ($d^2\theta$ など, 2 次以上の項については無視する. 以降も同じ.)

$$\begin{aligned} d\eta_2 &= (\lambda_1 - \lambda_2)(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)d\theta \\ &\quad + (d\lambda_1 - d\lambda_2) \cos \theta \sin \theta \end{aligned}$$

また, (21) 式, (23) 式より

$$\eta_1 - \eta_3 = (\lambda_1 - \lambda_2)(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

が得られ, ゆえに $d\eta_2$ は

$$d\eta_2 = (\eta_1 - \eta_3)d\theta + (d\lambda_1 - d\lambda_2) \cos \theta \sin \theta \quad (24)$$

のように計算できる. 一方, λ_1, λ_2 は R の固有値であるからそれらは以下のように具体的に求まる.

$$\lambda_1 = \frac{\eta_1 + \eta_3 + \sqrt{D}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{\eta_1 + \eta_3 - \sqrt{D}}{2} \quad (25)$$

ここで, $D := (\eta_1 - \eta_3)^2 + 4\eta_2^2$ である. 以降, $D \neq 0$ を仮定する. $\lambda_1 - \lambda_2 = \sqrt{D}$ を (22) 式に代入して,

$$\cos \theta \sin \theta = \frac{\eta_2}{\sqrt{D}} \quad (26)$$

を得るので, (24) 式は,

$$d\eta_2 = (\eta_1 - \eta_3)d\theta + (d\lambda_1 - d\lambda_2) \frac{\eta_2}{\sqrt{D}} \quad (27)$$

と変形されることがわかる. つぎに, 固有値 λ_1, λ_2 の変化 $d\lambda_1, d\lambda_2$ についても, (25) 式から直接計算すると,

$$d\lambda_1 = \frac{d\eta_1 + d\eta_3}{2} + \frac{(\eta_1 - \eta_3)(d\eta_1 - d\eta_3) + 4\eta_2 d\eta_2}{2\sqrt{D}}$$

$$d\lambda_2 = \frac{d\eta_1 + d\eta_3}{2} - \frac{(\eta_1 - \eta_3)(d\eta_1 - d\eta_3) + 4\eta_2 d\eta_2}{2\sqrt{D}}$$

と計算される. これらから,

$$d\lambda_1 - d\lambda_2 = \frac{(\eta_1 - \eta_3)(d\eta_1 - d\eta_3) + 4\eta_2 d\eta_2}{\sqrt{D}}$$

となるので, これを (27) 式に代入すれば,

$$d\eta_2 = (\eta_1 - \eta_3)d\theta + \frac{(\eta_1 - \eta_3)\eta_2(d\eta_1 - d\eta_3) + 4\eta_2^2 d\eta_2}{D}$$

が得られる. ゆえに, $d\theta$ が

$$d\theta = \frac{\eta_1 - \eta_3}{D} d\eta_2 - \frac{d\eta_1 - d\eta_3}{D} \eta_2$$

のように, R, dR の要素のみで表現された.

以上の計算で得られた $d\lambda_1, d\lambda_2, d\theta$ を (20) 式に代入して, 計量 g_{ij} を決定する. ここで, $g = [g_{ij}]$ が対称行列である必要があるので, 計量は一意に決まる. 実際, g はつぎのように求まる.

$$\begin{aligned} g &= \begin{pmatrix} \frac{1}{D}g_1 + I & O \\ O & I \end{pmatrix} \\ g_1 &= \begin{pmatrix} (\eta_1 - \eta_3)^2 + 2\eta_2^2 & 2\eta_2(\eta_1 - \eta_3) & 2\eta_2^2 \\ * & 8\eta_2^2 & -2\eta_2(\eta_1 - \eta_3) \\ * & * & (\eta_1 - \eta_3)^2 + 2\eta_2^2 \end{pmatrix} \\ &\quad + \frac{2}{D} \begin{pmatrix} \eta_2^2 & -\eta_2(\eta_1 - \eta_3) & -\eta_2^2 \\ * & (\eta_1 - \eta_3)^2 & \eta_2(\eta_1 - \eta_3) \\ * & * & \eta_2^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ここで, I は 3×3 の単位行列である.

(注 7) ここで行なった計量の構成法は 2 次曲線の回転角を陽に用いたものとなっている. 3 次の場合, オイラー角を用いて 3 次元の回転を表現することができるが, 計算が煩雑なものになり, 現実的でない. 3 次以上の場合の計量の構成法については今後の課題である.

4.3 数値例

前節で構成した計量を用いて、ある非線形システムに対する部分多様体の曲率テンソルの数値例を示す。対象とする非線形システムはつぎのようなものとする。

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + x_2^2 + u + x_1 w \\ \dot{x}_2 &= -\sqrt{2}x_2 + u + x_2 w \\ y &= x_1 - x_2 \end{aligned} \quad (28)$$

このシステムに対応する部分多様体のスカラー曲率 r を (A.7) 式にしたがって計算すると、状態変数 x_1, x_2 に対する r の値を3次元的に得ることができる。これを、4つの異なるゲインパラメータ k について出力した。(Fig.5の左側の(A), (B), (C), (D)が対応。) つぎに、システム(28)において、ベクトル $f(x)$ を線形化した

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + u + x_1 w \\ \dot{x}_2 &= -\sqrt{2}x_2 + u + x_2 w \\ y &= x_1 - x_2 \end{aligned} \quad (29)$$

についても同様にスカラー曲率を出力する。(Fig.5の右側の(a), (b), (c), (d)が対応。)

Fig. 5 Graphs of r on (x_1, x_2) -plane against the change of k ((A) $k = 1.0$ (B) $k = 1.1$ (C) $k = 1.4$ (D) $k = 1.6$ (a) $k = 1.0$ (b) $k = 1.1$ (c) $k = 1.4$ (d) $k = 1.6$)

まず、2つのシステムに対応するスカラー曲率 r について、共通に見られる項目について調べる。状態空間の原点付近における r の値(すなわち、「非線形性」)は比較的、小さい値をとることがわかる。しかし、原点から離れると、 r の値が急激に大きくなる領域が見られる。さらに、ゲインパラメータ k の値を大きくすると、 r の値のスケールが大きくなっていることがわかる。(必ずしも、単調ではない。)一方で、原点周りに、2つの「特異点」が見られる。これは、その点において計量が発散する点(すなわち、計量行列 g において、 D がゼロになるような点)であり、その点付近で特に強い非線形性が現れていることがわかる。そしてまた、この点は k の値を大きくすると原点に接近するものであった。以上の考察は、制御論的な観点から見て、自然なものである。

つぎに、2つのシステム間の相違点について考察する。まず、2つのシステムは x_2^2 なる非線形項のみの違いを有するため、原点近傍においては、この項の影響は少ない。また、 x_1 の効果は x_2 には及ばないため、両システムにおける x_2 の振る舞いは等しい。このことから、 x_2 が大きな値を持つ場所以外においては、両システムの振る舞いは近いものである。一方で、2つのシステムに対応する r のグラフは非常に近いことがわかる。すなわち、4.2節で構成した計量にしたがえば、図で示した $-3 \leq x_1, x_2 \leq 3$ においては、消去した非線形項は部分多様体 $\mathcal{N}$ の曲がり具合(つまり、システムに対応するHJ不等式の解 $V(x)$ の曲率)に大きな影響を及ぼさないものであることが判明したのである。これは、両システムから構成する数値解の振る舞いが近いものであることを示しており、前述の定性的な考察にも合致するものである。

5. おわりに

本論文では、HJ不等式においては解は集合をなすことに着目し、2つの独立な解析を行なった。

まず第1に、HJ不等式の解が存在するような「可解領域」を定義し、非線形 H_∞ 制御問題の制御仕様であるゲインパラメータに関する可解領域の大きさの単調性を示した。つぎに、数値的に得ることが容易な「準可解領域」を定義し、その性質および存在条件を調べた。準可解領域は可解領域を含むものであり、「制御が不可能である点」についての情報を与えるものである。この領域は可解領域と同様ゲインパラメータに対して単調性を示し、また、弧状連結である。

第2の解析として、HJ不等式の解が集合をなすことを利用して、状態空間に非ユークリッド的な計量を導入し、与えられた(アファインな)非線形システムを、ある拡大された多様体の部分多様体と対応付けた。このとき、部分多様体の曲率はHJ不等式の解の等高線の曲率と対応付けられる。さらに、SISO線形システムに対応する部分多様体が平坦であることを示した。また、2次の場合に具体的に計量を構成し、例題に対して数値シミュレーションを行なった。

参 考 文 献

- 1) 甘利, 長岡: 情報幾何の方法, 岩波書店 (1993)
- 2) 井村, 兄玉, 三平, 佐伯: 解の凸結合によるハミルトン・ヤコビ不等式の近似解の改良法, 計測自動制御学会論文集, **34**-9, 1170/1177 (1998)
- 3) W.-M. Lu and J. C. Doyle: H_∞ control of nonlinear systems, A convex characterization, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **40**-9, 1668/1675 (1995)
- 4) 小原 敦美: 線形状態フィードバック制御系の幾何学的構造の解析とその応用, 東京大学大学院工学系研究科博士論文 (1989)
- 5) 坂本 登: シンプレクティック幾何学によるハミルトン・ヤコビ方程式の解法, 安定化解の存在条件, そして解構造の解析, 計測自動制御学会論文集, **36**-3, 255/264 (2000)
- 6) A. J. van der Schaft: L_2 -Gain Analysis of Nonlinear Systems and Nonlinear State Feedback H_∞ Control, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **37**-9, 770/784 (1992)
- 7) A. J. van der Schaft: L_2 -Gain and Passivity Techniques in Nonlinear Control, 2nd edition, Springer-Verlag, London (2000)

《付 録》

A. 微分幾何学の公式

本付録における公式は文献 1) より引用した. なお, 4.2 節における計量の構成法については文献 4) を参照のこと.

多様体に計量 $g = [g_{ij}]$ が与えられているとする. このとき, 行列 g は正定対称行列となる. また, 多様体の局所座標系は $[\eta_i]$ であるとする. このとき, この多様体の曲がり具合を表わす「曲率テンソル」はつぎで与えられる.

$$R_{ijk}^l := \frac{\partial \Gamma_{jk}^l}{\partial \eta_i} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial \eta_j} + \sum_h \Gamma_{ih}^l \Gamma_{jk}^h - \sum_h \Gamma_{jh}^l \Gamma_{ik}^h \quad (\text{A.1})$$

ここで, Γ_{ij}^k は「接続係数」であり,

$$\Gamma_{ij}^k := \sum_h g^{kh} \Gamma_{ij,h} \quad (\text{A.2})$$

である (g^{kh} は行列 G^{-1} の (k, h) 要素である). ここで, 本論文では $\Gamma_{ij,k}$ はつぎで与えられるものとする.

$$\Gamma_{ij,k} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial \eta_i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial \eta_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial \eta_k} \right) \quad (\text{A.3})$$

このとき, 接続は「リーマン接続」であるという. つぎに, 局所座標系 $[\eta_i]$ に対して写像 $\eta = \eta(x)$ が「埋め込み」であるとき, 局所座標系を $[x_a]$ とする「部分多様体」を構成することができる. ここで, η が単射, かつ多様体上のすべての点で $d\eta$ が単射のとき, 写像 η は埋め込みであるという. このとき, 部分多様体にはつぎの形で計量が誘導される.

$$\bar{g}_{ab} = \sum_{i,j} g_{ij} \left(\frac{\partial \eta_i}{\partial x_a} \right) \left(\frac{\partial \eta_j}{\partial x_b} \right) \quad (\text{A.4})$$

(upper bar は部分多様体に属することを表わす.) そして, 接続係数もまた誘導され, それは

$$\bar{\Gamma}_{ab}^c := \sum_d \bar{g}^{cd} \bar{\Gamma}_{ab,d} \quad (\text{A.5})$$

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{ab,c} = & \sum_{i,j,k} \left[\left(\frac{\partial \eta_i}{\partial x_a} \right) \left(\frac{\partial \eta_j}{\partial x_b} \right) \Gamma_{ij,k} \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial^2 \eta_j}{\partial x_a \partial x_b} \right) g_{jk} \right] \left(\frac{\partial \eta_k}{\partial x_c} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

で与えられる. なお, 曲率テンソルから

$$r := \sum_{a,b,c} \bar{g}^{ab} \bar{R}_{cab}^c \quad (\text{A.7})$$

のようなスカラー量を計算することができる. これは「スカラー曲率」と呼ばれる量である.

[著 者 紹 介]

山 本 直 樹 (学生会員)

1999 年東京大学工学部計数工学科卒業, 2001 年同大学大学院計数工学専攻修了, 同年同大学大学院情報理工学系研究科博士課程に進学, 現在に至る. システム解析の研究に従事.

津 村 幸 治 (正会員)

1992 年東京大学大学院計数工学専攻博士課程修了, 同年千葉大学情報工学科助手, 96 年同講師, 98 年東京大学大学院計数工学専攻講師, 2000 年同助教授, 現在同大学大学院情報理工学系研究科助教授. 制御理論, システム解析の研究に従事 (博士 (工学)). システム制御情報学会, IEEE などの会員.