周波数応答制約のある ℓ_1 制御への双対定理の適用†

太田 快人*

Duality Theorem and ℓ_1 Control with Frequency Domain Constraints†

Yoshito OHTA*

This paper studies the ℓ_1 controller design with frequency domain constraints using the duality theorem. For this class of problems it was shown in the literature that the standard finite dimensional approximation of the dual problem in the space of finite support sequences may not converge to the optimal value. In this paper, a condition assuring no duality gap is studied, and a way to approximate the dual problem with arbitrary tolerance by finitely many variables is proposed. A key observation is the property of so-called rank interpolation constraints.

Key Words: ℓ_1 control, multi objective control, frequency domain constraints, dual problem, duality gap, linear programming

1. はじめに

ℓ_1 制御問題は、閉ループ系のインパルス応答の ℓ_1 ノルムを制御性能やロバスト性の指標として最小化する制御系設計法として提案された⁹⁾。 ℓ_1 制御問題を解くためには、バナッハ空間での双対定理が重要であり、それを利用して以下の結果が導かれている。いわゆる1ブロック問題とよばれるクラスに対しては、双対問題の最適解が有限次元空間での線形計画問題を解くことに帰着され、その最適解を用いて主問題の最適解が特徴付けられる^{2),3)}。一般的な多ブロック問題とよばれるクラスに対しては、本質的に無限次元の問題になるために、有限次元空間で近似的に解く方法が双対性をもとにして提案されている。これらの最適化アルゴリズムとして、FMV/FME法⁸⁾、DA法⁴⁾がある。

制御系の仕様の中には、周波数領域で記述することが自然であるものも多い。たとえば周波数成分の決まった周期的外乱を除去するためには、閉ループ伝達関数の特定周波数での大きさを制約することが自然である。これは閉ループ系のインパルス応答の ℓ_1 ノルムでは捉えきれない仕様といえる。一方、 ℓ_1 制御では、線形計画法が基本的な道具となるので、 ℓ_1 ノルムの最小化を線形不等式で表わされる他の制御仕様と容易に組み合わせることができる¹⁾。周波数応答に関する大きさを制約する問題はこの範疇にはいる。この考え方に基づいて、文献5)、6)においては、時間応答や周波数応答制約つ

き ℓ_1 制御問題や混合 H^2/ℓ_1 制御問題を考察した。そこではラグランジュの双対定理を適用して、双対問題と主問題の最適値の間にギャップがないための条件や、無限次元で定式化される問題を有限次元空間で近似する方法を詳細に研究した。しかしながら、双対問題の変数を単純に打ち切る方法では、変数の次元をいかに増やそうとも双対ギャップの生じる例が報告されている⁶⁾。したがって双対ギャップを生じないように双対問題を有限次元問題で近似する方法については、完全には理解されていない状況にある。

本論文では、有限個の周波数点での周波数応答の大きさに制約のある ℓ_1 制御問題について、双対問題を任意の精度で有限次元空間で近似する方法について述べる。この問題は、単純な変数の打ち切りでは双対ギャップの生じるクラスである⁶⁾。しかし双対問題の変数を適切に制約するならば、双対問題の最適解を任意の精度で求めることができることを示す。この双対問題の有限次元近似を主問題の有限次元近似と組み合わせる用いることによって、有限次元の線形計画法によって最適コストに任意に近い準最適解を求めることができることがわかる。なおこの結果は、双対問題が求めようとしている ℓ_∞ の要素によって定まる分離超平面を、最適化問題の制約を決める線形作用素の像空間に関連した可分な空間の中から探索することと解釈できる。

なお文献7)では、同じ問題に対してDA法を適用した結果を考察している。DA法を適用するために、周波数応答制約を厳密に単位円上の周波数点において考慮せずに、不安定側の領域に微量移動させた。しかし微量がいかに小さくとも、単位円上で制約を与える問題とは性質が異なることになるために、周波数応答制約のある ℓ_1 制御問題の厳密な解法には本論文の方法によらなくてはならない。

† 第1回 制御部門大会で発表 (2001・5)

* 大阪大学大学院工学研究科 吹田市山田丘 2-1

* Osaka University, Suita, Osaka
(Received June 18, 2001)

(Revised December 21, 2002)

2. 信号とシステムの空間

ベクトル値 (サイズを n とする) をとる有界な列の空間を ℓ_∞^n で表わし, そのノルムを

$$\|w\| = \sup_{t \in \mathbb{Z}} \max_{1 \leq i \leq n} |w_i(t)|$$

と定める. ただし w_i は w の第 i 成分である. 空間 ℓ_∞^n の重要な部分空間として $\lim_{t \rightarrow \infty} w(t) = 0$ を満たす列の全体を c_0^n と表わす. 空間 ℓ_1^n は, ベクトル値 (サイズを n とする) をとる絶対総和可能な列の空間であり, そのノルムを

$$\|w\| = \sum_{t \in \mathbb{Z}} \sum_{1 \leq i \leq n} |w_i(t)|$$

と定める.

つぎに $\ell_1^{n_z \times n_w}$ は, $n_z \times n_w$ つぎの行列を値とする絶対総和可能な列の空間であり, そのノルムを

$$\|\Phi\| = \max_{1 \leq i \leq n_z} \sum_{j=1}^{n_w} \sum_{t \in \mathbb{Z}} |\phi_{ij}(t)| \quad (1)$$

と定める. ただし ϕ_{ij} は Φ の (i, j) 成分である. ここで $\Phi \in \ell_1^{n_z \times n_w}$ はたたみ込みによって

$$z(t) = \sum_{\tau=0}^t \Phi(t-\tau)w(\tau),$$

と入出力関係を定義することに注意する. ただし $w \in \ell_\infty^{n_w}$, $z \in \ell_\infty^{n_z}$ である. 記号を若干濫用してこの写像も $\Phi: \ell_\infty^{n_w} \rightarrow \ell_\infty^{n_z}$ と表わすことにする. ここでの作用素のノルムは, (1) 式に等しい. 写像 Φ の伝達関数を λ 変換

$$\hat{\Phi}(\lambda) = \sum_{t=0}^{\infty} \Phi(t)\lambda^t$$

によって与える. これは複素平面の開単位円内で解析的, 開単位円内で連続な関数になる.

ノルム (1) をもつ空間 $\ell_1^{n_z \times n_w}$ の双対空間は $\ell_\infty^{n_z \times n_w}$ であり,

$$\langle F, \Phi \rangle = \sum_{i=1}^{n_z} \sum_{j=1}^{n_w} \sum_{t \in \mathbb{Z}} f_{ij}(t) \phi_{ij}(t)$$

と線形汎関数を定める. ただし f_{ij} は $F \in \ell_\infty^{n_z \times n_w}$ の (i, j) 成分である. そこのノルムは

$$\|F\| = \sum_{i=1}^{n_z} \max_{1 \leq j \leq n_w} \sup_{t \in \mathbb{Z}} |f_{ij}(t)| \quad (2)$$

である. $F \in \ell_\infty^{n_z \times n_w}$ の (実際にはセミノルムであるが) 第 i 行のノルムを

$$\|F\|_{(i)} = \max_{1 \leq j \leq n_w} \sup_{t \in \mathbb{Z}} |f_{ij}(t)| \quad (3)$$

とする. これらのノルムに関してつぎの補題が成り立つ.

[補題 1] $F \in \ell_\infty^{n_z \times n_w}$ として f_{ij} をその (i, j) 成分とする. このとき以下が成立する.

- (i) $\|F\| = \sum_{i=1}^{n_z} \|F\|_{(i)}$ である.
- (ii) $\|F\|_{(i)} \leq c$ であることと $|f_{ij}(t)| \leq c$ がすべての

$1 \leq j \leq n_w$ および $t \in \mathbb{Z}$ について成り立つことは等価である.

(iii) もし $T_1 \subset \mathbb{Z}$ and $T_2 = \mathbb{Z} \setminus T_1$ であり, $F = F_1 + F_2$ を F_1 は T_1 上に台をもち, F_2 は T_2 上に台をもつものとする. このとき $\|F\|_{(i)} = \max\{\|F_1\|_{(i)}, \|F_2\|_{(i)}\}$ である.

(証明) (i) はノルムの定義 (2), (3) より明らかである. (ii) は (3) より直ちに成り立つ. (iii) を示すために, f_{1ij}, f_{2ij} をそれぞれ F_1, F_2 の (i, j) 成分とする. まず仮定より $t \in T_1$ について $f_{ij}(t) = f_{1ij}(t)$, $t \in T_2$ について $f_{ij}(t) = f_{2ij}(t)$ に注意する. すると

$$\begin{aligned} \sup_{t \in \mathbb{Z}} |f_{ij}(t)| &= \max \left\{ \sup_{t \in T_1} |f_{ij}(t)|, \sup_{t \in T_2} |f_{ij}(t)| \right\} \\ &= \max \left\{ \sup_{t \in T_1} |f_{1ij}(t)|, \sup_{t \in T_2} |f_{2ij}(t)| \right\} \\ &= \max \left\{ \sup_{t \in \mathbb{Z}} |f_{1ij}(t)|, \sup_{t \in \mathbb{Z}} |f_{2ij}(t)| \right\} \end{aligned}$$

であるが, これを j についての最大をとることにより (iii) が成り立つ. $\square$

とくに $c_0^{n_z \times n_w}$ は, $\ell_\infty^{n_z \times n_w}$ の重要な部分空間であり, $n_z \times n_w$ つぎの行列値をとり 0 に収束する列の全体を表わす. このとき $(c_0^{n_z \times n_w})^* = \ell_1^{n_z \times n_w}$ が成り立っている.

3. 周波数応答制約をもつ ℓ_1 制御問題

本節では, 文献 5), 6) の制御問題の定式化と無限次元空間の最適化問題への帰着について主に述べる.

3.1 制御問題

Fig. 1 で表わされるフィードバック系を考える. ここで P は一般化プラント, C は補償器, w は外生信号, z は被制御量, u は制御入力, y は観測出力である. それぞれの信号のサイズを n_w, n_z, n_u, n_y とする. ここで w から z への伝達特性は $\Phi = P_{11} + P_{12}(I - CP_{22})^{-1}CP_{21}$ で与えられる.

Fig. 1 Feedback system

周波数 $\lambda = e^{j\omega}$, $\omega \in \{\omega_1, \dots, \omega_{n_f}\}$ における伝達関数 $\hat{\Phi}$ の絶対値は

$$|\hat{\phi}_{ijk}(e^{j\omega_k})| \leq r_k, \quad k = 1, \dots, n_f \quad (4)$$

のような不等式拘束を受けるものとする. ただし $\hat{\phi}_{ij}$ は $\hat{\Phi}$ の (i, j) 成分である.

補償器 C は, 閉ループを安定化し, 閉ループ写像 Φ のインパルス応答の ℓ_1 ノルムを周波数応答制約 (4) のもとで最小化するように設計する. この制御問題は

$$\inf_C \|\Phi\|, \quad \Phi = P_{11} + P_{12}(I - CP_{22})^{-1}CP_{21}, \quad (5)$$

subject to C は安定化補償器,

Φ 周波数応答制約 (4) を満たす,

となる.

3.2 無限次元空間での最適化問題

問題 (5) を無限次元空間の最適化問題に帰着する文献 5), 6) の方法について述べる. まず, (5) 式の拘束条件について考える.

系を安定化する補償器のパラメータ化を用いて閉ループ特性 Φ は,

$$\Phi = H - UQV \quad (6)$$

となる. ただし H, U, V は固定された安定な入出力写像であり, Q は安定な写像で補償器の自由度に対応している. プラント P が有限次元であれば, 伝達関数 $\hat{H}, \hat{U}, \hat{V}$ も安定有理関数になり, 閉単位円内に極をもたない. これら伝達関数のサイズは, それぞれ $n_z \times n_w, n_z \times n_u, n_y \times n_w$ である. 有限個の点を除いて $\text{rank } \hat{U}(\lambda) = n_u$ および $\text{rank } \hat{V}(\lambda) = n_y$ が閉単位円内で成り立つと仮定する. もし $\text{rank } \hat{U}(\lambda_0) < n_u$ がある $|\lambda_0| \leq 1$ について成り立つならば, λ_0 を $\hat{U}$ の零点という. $\hat{V}$ の零点も同様に定める.

(6) 式の閉ループ特性 Φ は, いわゆる零点補間条件と階数補間条件を満たすことになる¹⁾ (階数補間条件をたたみ込み補間条件ともいう⁸⁾). もし $n_z > n_u$ または $n_y < n_w$ であれば, 多ブロック問題であるという. 零点補間条件と階数補間条件を抽象的に

$$\mathcal{A}_{\text{zero}}\Phi = b_{\text{zero}}, \quad \mathcal{A}_{\text{rank}}\Phi = b_{\text{rank}},$$

と書くことにする. ただし $\mathcal{A}_{\text{zero}}: \ell_1^{n_z \times n_w} \rightarrow \mathbb{R}^{n_{\text{zero}}}$ (n_{zero} は零点補間条件の総数である) および $\mathcal{A}_{\text{rank}}: \ell_1^{n_z \times n_w} \rightarrow \ell_1^{n_z n_w - n_y n_u}$ とすることができる. 作用素 $\mathcal{A}_{\text{feas}}: \ell_1^{n_z \times n_w} \rightarrow \mathbb{R}^{n_{\text{zero}}} \times \ell_1^{n_z n_w - n_y n_u}$ を用いて二つの補間条件を

$$\mathcal{A}_{\text{feas}}\Phi = b_{\text{feas}} \quad (7)$$

と書くことにする. つまり $\Phi \in \ell_1^{n_z \times n_w}$ が条件 (7) を満たす必要十分条件は, それがあある $Q \in \ell_1^{n_u \times n_y}$ によって, (6) 式の形に書けることである. 詳しくは文献 1), 8) を参照されたい. 作用素 $\mathcal{A}_{\text{feas}}$ のいくつかの重要な性質は, 第 4 節で述べることにする.

周波数応答制約 (4) は,

$$\angle \langle F_{k,\theta}, \Phi \rangle \leq r, \quad k = 1, \dots, n_f, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad (8)$$

と書くことができる^{5), 6)}. ただし $F_{k,\theta} \in \ell_\infty$ は

$$F_{k,\theta}(t) = e_{i_k} e_{j_k}^T \cos(\omega_k t + \theta)$$

である. ここで制約 (8) についてつぎの仮定をおく.

[仮定 1] ある正数 $\epsilon' > 0$ について, 制約 (8) の右辺を $r - \epsilon'$ と厳しくするとき, その厳しくした制約と制約 (7) を同時に満たす実行可能解 Φ が存在する.

制約 (8) では, θ が $0 \leq \theta < 2\pi$ と変化するので, 実際には無限個の制約があるが, θ を均等分割するとき, 仮定 1のもとでは, 任意精度で問題が近似できることが示されている⁵⁾. ここではじめから有限個の $F_{\theta}, \theta = 0, 2\pi/N, \dots, (N-1)2\pi/N$ を用いて周波数応答制約を書くことにする. 文献 6) では, 制約 (4) を $\mathcal{A}_{H^\infty} \leq b_{H^\infty}$ と, 作用素 $\mathcal{A}_{H^\infty}: \ell_1^{n_z \times n_w} \rightarrow \mathbb{R}^{N n_f}$ を用いて抽象的に書いている.

以上をまとめると制御問題 (5) は, 以下の無限次元空間のノルム最小化問題として記述できることになる.

$$\gamma = \inf_{\Phi \in \ell_1^{n_z \times n_w}} \|\Phi\|, \quad (9)$$

$$\text{subject to } \mathcal{A}_{\text{feas}}\Phi = b_{\text{feas}}, \\ \mathcal{A}_{H^\infty}\Phi \leq b_{H^\infty}.$$

3.3 双対問題

文献 5), 6) によると,

$$\mu_\infty = \sup_{z_1, z_2, z_3} \langle b_{\text{zero}}, z_1 \rangle + \langle b_{\text{rank}}, z_2 \rangle + \langle b_{H^\infty}, z_3 \rangle, \quad (10)$$

subject to

$$\|\mathcal{A}_{\text{zero}}^* z_1 + \mathcal{A}_{\text{rank}}^* z_2 + \mathcal{A}_{H^\infty}^* z_3\| \leq 1, \quad z_3 \leq 0, \\ z_1 \in \mathbb{R}^{n_{\text{zero}}}, z_2 \in \ell_\infty^{n_z n_w - n_y n_u}, z_3 \in \mathbb{R}^{N n_f}$$

は問題 (9) の双対問題であり, しかも仮定 1のもとでは双対ギャップがない, つまり $\gamma = \mu_\infty$ であることが示されている. ここで変数 z_2 を ℓ_∞ から c_0 に制約すると

$$\mu_0 = \sup_{z_1, z_2, z_3} \langle b_{\text{zero}}, z_1 \rangle + \langle b_{\text{rank}}, z_2 \rangle + \langle b_{H^\infty}, z_3 \rangle, \quad (11)$$

subject to

$$\|\mathcal{A}_{\text{zero}}^* z_1 + \mathcal{A}_{\text{rank}}^* z_2 + \mathcal{A}_{H^\infty}^* z_3\| \leq 1, \quad z_3 \leq 0, \\ z_1 \in \mathbb{R}^{n_{\text{zero}}}, z_2 \in c_0^{n_z n_w - n_y n_u}, z_3 \in \mathbb{R}^{N n_f}$$

を得る. 明らかに $\mu_0 \leq \mu_\infty$ である. 双対問題 (11) と主問題 (9) には, 双対ギャップのある ($\mu_0 < \mu_\infty$ である) 例が報告されている⁶⁾. つまり単純に変数 z_2 を有界に制約するとき, 双対問題の値は μ_0 を越えないので, 双対問題の解を有限次元計画問題を用いて解くことができるかは, 未解決となっている. 本研究での主目的は有限次元計画問題を用いてギャップのない双対問題を求めることであり, 第 5 節においてその結果を述べる.

4. 補間条件

この節では, 第 3.2 節で述べた零点および階数補間条件について調べる. 文献 1), 8) の復習をしたのち, いくつかの新しい観察を示す.

安定有理関数行列 $\hat{U}$ および $\hat{V}$ をユニモジュラ行列 $\hat{L}_U, \hat{L}_V, \hat{R}_U, \hat{R}_V$ を用いて

$$\hat{U} = \hat{L}_U \hat{M}_U \hat{R}_U, \quad \hat{V} = \hat{L}_V \hat{M}_V \hat{R}_V, \quad (12)$$

$$\hat{M}_U = \begin{bmatrix} \hat{m}_{U1} & & \\ & \ddots & \\ & & \hat{m}_{Un_u} \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

$$\hat{M}_V = \begin{bmatrix} \hat{m}_{V1} & & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & \hat{m}_{Vn_y} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

とスミス型に変形する. 安定有理関数 $\hat{m}_{U1}, \dots, \hat{m}_{Un_u}$ と $\hat{m}_{V1}, \dots, \hat{m}_{Vn_y}$ は, 単因子であり, その零点はまさに $\hat{U}$ および $\hat{V}$ の零点である. 単因子の零点集合を Λ_{UV} とする. それぞれの $\lambda_0 \in \Lambda_{UV}$ について $\kappa_{Ui}(\lambda_0)$ を $\hat{m}_{Ui}$, $i = 1, \dots, n_u$ の零点としての重複度, $\kappa_{Vj}(\lambda_0)$ を $\hat{m}_{Vj}$, $j = 1, \dots, n_y$ の零点としての重複度とする. ユニモジュラ行列の逆行列を

$$\hat{L}_U^{-1} = \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_1 \\ \vdots \\ \hat{\alpha}_{n_z} \end{bmatrix}, \quad \hat{R}_V^{-1} = [\hat{\beta}_1 \cdots \hat{\beta}_{n_w}] \quad (13)$$

とおく. ここで $\hat{\alpha}_i$ と $\hat{\beta}_i$ は安定有理関数ベクトルであることに注意する. つぎは文献1)による. 文献8)も参照されたい.

[補題2] 零点集合 Λ_{UV} は開単位円に含まれるとする. このときある $Q \in \ell_1$ によって $\hat{\Phi} = \hat{H} - \hat{U}\hat{Q}\hat{V}$ となるためには

$$\frac{d^k}{d\lambda^k} (\hat{\alpha}_i \hat{\Phi} \hat{\beta}_j) (\lambda_0) = \frac{d^k}{d\lambda^k} (\hat{\alpha}_i \hat{H} \hat{\beta}_j) (\lambda_0),$$

$$i = 1, \dots, n_z, j = 1, \dots, n_y,$$

$$k = 0, \dots, \kappa_{Ui}(\lambda_0) + \kappa_{Vj}(\lambda_0) - 1, \lambda_0 \in \Lambda_{UV}, \quad (14)$$

および

$$\hat{\alpha}_i \hat{\Phi} = \hat{\alpha}_i \hat{H}, \quad i = n_u + 1, \dots, n_z \quad (15)$$

$$\hat{\Phi} \hat{\beta}_j = \hat{H} \hat{\beta}_j, \quad j = n_y + 1, \dots, n_w. \quad (16)$$

であることが必要十分である.

制約(14)を零点補間条件といい, 制約(15)および(16)を階数補間条件という. 零点補間条件(14)の総数は

$$n_{\text{zero}} = \sum_{\lambda_0 \in \Lambda_{UV}} \sum_{i=1}^{n_u} \sum_{j=1}^{n_y} \{\kappa_{Ui}(\lambda_0) + \kappa_{Vj}(\lambda_0)\}$$

である. したがって(14)式は

$$\mathcal{A}_{\text{zero}} \Phi = b_{\text{zero}}$$

と作用素 $\mathcal{A}_{\text{zero}} : \ell_1^{n_z \times n_y} \rightarrow \mathbb{R}^{n_{\text{zero}}}$ および $b_{\text{zero}} = \mathcal{A}_{\text{zero}} H$ を用いて記述できる. 制約(15)および(16)は

$$\hat{\alpha}_i \hat{\Phi} \hat{\beta}_j = \hat{\alpha}_i \hat{H} \hat{\beta}_j,$$

$$(i, j) \in \{(i, j) : n_u < i \leq n_z, n_y < j \leq n_w\}$$

$$\cup \{(i, j) : n_u < i \leq n_z, 1 \leq j \leq n_y\}$$

$$\cup \{(i, j) : 1 \leq i \leq n_u, n_y < j \leq n_w\} \quad (17)$$

と等価である. 時間領域では制約(17)は

$$\sum_{\tau_1=0}^t \sum_{\tau_2=0}^{\tau_1} \alpha_i(t - \tau_1) \Phi(\tau_1 - \tau_2) \beta_j(\tau_2) \quad (18)$$

$$= \sum_{\tau_1=0}^t \sum_{\tau_2=0}^{\tau_1} \alpha_i(t - \tau_1) H(\tau_1 - \tau_2) \beta_j(\tau_2), \quad t = 0, 1, 2, \dots,$$

となる. (18)式を (t, i, j) の辞書式順序に並べて

$$\mathcal{A}_{\text{rank}} \Phi = b_{\text{rank}},$$

と書く. ただし $\mathcal{A}_{\text{rank}} : \ell_1^{n_z \times n_w} \rightarrow \ell_1^{n_z n_w - n_y n_u}$ および $b_{\text{rank}} = \mathcal{A}_{\text{rank}} H$ である. (18)式には $t \in \mathbb{Z}$ を一つ固定すると, 全部で $n_z n_w - n_y n_u$ 個の制約があることがわかる. ここで $\mathcal{A}_{\text{rank}}$ の像を(文献5)のように ℓ_1 ではなく, 本論文では $\ell_1^{n_z n_w - n_y n_u}$ にとることにする. この区別は第5節の議論で重要になる.

零点補間条件と階数補間条件の双方を一つの式で表わすと, 補題2の補間条件は

$$\mathcal{A}_{\text{feas}} \Phi = b_{\text{feas}}$$

となる. ただし $\mathcal{A}_{\text{feas}} : \ell_1^{n_z \times n_w} \rightarrow \mathbb{R}^{n_{\text{zero}}} \times \ell_1^{n_z n_w - n_y n_u}$ および $b_{\text{feas}} = \mathcal{A}_{\text{feas}} H$ である. (18)式の左辺が $\mathcal{A}_{\text{rank}} \Phi$ を定義しているので, 作用素 $\mathcal{A}_{\text{rank}} : \ell_1^{n_z \times n_w} \rightarrow \ell_1^{n_z n_w - n_y n_u}$ には状態方程式表現ができることに注意する.

[補題3] 安定有理関数 $\hat{U}, \hat{V}$ のスミス型を(12)式で与える. 安定有理関数ベクトル $\hat{\alpha}_i$, $i = 1, \dots, n_z$ および $\hat{\beta}_i$, $i = 1, \dots, n_w$ を(13)式で与える. このとき $y = \mathcal{A}_{\text{rank}} \Phi$ と等価な入出力関係をもつ状態方程式

$$x(t+1) = \mathbf{A}x(t) + \mathbf{B}\Phi(t), \quad x(0) = 0, \quad (19)$$

$$y(t) = \mathbf{C}x(t) + \mathbf{D}\Phi(t),$$

がある. ただし $x(t)$ は適当な次元 n_x の状態ベクトルであり, $\mathbf{A} : \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$, $\mathbf{B} : \mathbb{R}^{n_z \times n_w} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$, $\mathbf{C} : \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{R}^{n_z n_w - n_y n_u}$ および $\mathbf{D} : \mathbb{R}^{n_z \times n_w} \rightarrow \mathbb{R}^{n_z n_w - n_y n_u}$ (つまり $\mathbf{B}$ と $\mathbf{D}$ はテンソル) である. さらに $\mathbf{A}$ は安定行列である. (証明) $\mathcal{A}_{\text{rank}} \Phi$ の t 成分は, $n_z n_w - n_y n_u$ つぎのベクトル値をとる. その成分は(18)式の左辺のたたみ込みで与えられる. したがって線形システムの実現論より入力を Φ , 出力を $\mathcal{A}_{\text{rank}} \Phi$ とする離散時間の線形時不変な状態空間表現がある. ここで $\hat{\alpha}_i$ および $\hat{\beta}_j$ は安定有理関数ベクトルだから, 行列 $\mathbf{A}$ は安定行列にとることができる. $\square$

双対作用素 $\mathcal{A}_{\text{rank}}^* : \ell_{\infty}^{n_z n_w - n_y n_u} \rightarrow \ell_{\infty}^{n_z \times n_w}$ についても, 双対な状態空間表現がある.

[補題4] 安定有理関数 $\hat{U}, \hat{V}$, $\hat{\alpha}_i$, $i = 1, \dots, n_z$ および $\hat{\beta}_j$, $j = 1, \dots, n_w$ を補題3と同様に定める. (19)式を作用素 $\mathcal{A}_{\text{rank}}$ と等価な状態方程式表現とする. このとき

$$w(t-1) = \mathbf{A}^* w(t) + \mathbf{C}^* z(t), \quad (20)$$

$$F(t) = \mathbf{B}^* w(t) + \mathbf{D}^* z(t),$$

の入出力関係は, $\mathcal{A}_{\text{rank}}^* z = F$ に等価である. ただし $z = (z(0), z(1), \dots) \in \ell_{\infty}^{n_z n_w - n_y n_u}$ である.

(証明) 双対な離散時間線形系と同じ考え方により, 補題 3 から直接計算によって

$$\begin{aligned}
 & \langle z, \mathcal{A}_{\text{rank}} \Phi \rangle \\
 &= \sum_{t=0}^{\infty} \langle z(t), (\mathbf{C}x(t) + \mathbf{D}\Phi(t)) \rangle \\
 &= \sum_{t=0}^{\infty} \left\langle z(t), \left(\sum_{\tau=0}^{t-1} \mathbf{C}\mathbf{A}^{t-\tau-1} \mathbf{B}\Phi(\tau) + \mathbf{D}\Phi(t) \right) \right\rangle \\
 &= \sum_{\tau=0}^{\infty} \sum_{t=\tau}^{\infty} \langle \mathbf{B}^* \mathbf{A}^{-(t-\tau-1)} \mathbf{C}^* z(t), \Phi(\tau) \rangle \\
 &\quad + \sum_{t=0}^{\infty} \langle \mathbf{D}^* z(t), \Phi(t) \rangle \\
 &= \sum_{t=0}^{\infty} \langle \mathbf{B}^* w(t) + \mathbf{D}^* z(t), \Phi(t) \rangle = \langle F, \Phi \rangle
 \end{aligned}$$

であることがわかる. これは $\mathcal{A}_{\text{rank}}^* z = F$ であることを示している. $\square$

ここで (20) 式の “インパルス応答” は, $\mathbf{A}$ が安定行列なので指数的に減衰する. 減衰の大きさを定量的に表すために, $\mathbf{B}_i^*$ と $\mathbf{D}_i^*$ をそれぞれ $\mathbf{B}^*$ と $\mathbf{D}^*$ の第 i 行とする. このとき $C > 0$ と $0 \leq \delta < 1$ を

$$\|\mathbf{D}_i^*\| < C, \quad \|\mathbf{B}_i^* (\mathbf{A}^*)^{t-1} \mathbf{C}^*\| < C\delta^t, \quad t = 1, 2, 3, \dots \quad (21)$$

であるように選ぶことができる. ただし行列のノルムは $\mathbb{R}^{n_z n_w - n_y n_u}$ のノルムおよび $\mathbb{R}^{1 \times n_w}$ の無限大ノルムと整合するようにとる.

シフト作用素 $S: \ell_1^{n_z \times n_w} \rightarrow \ell_1^{n_z \times n_w}$ を

$$(S\Phi)(t) = \begin{cases} \Phi(t-1), & t \geq 1 \\ 0, & t = 0 \end{cases}$$

と定める. 若干記号を濫用して $\ell_1^{n_z n_w - n_y n_u}$ でのシフト作用素も S と書く. このとき $S\mathcal{A}_{\text{feas}} = \mathcal{A}_{\text{feas}}S$ であることは明らかである.

5. 双対問題の有限次元近似

本節では, 双対問題 (10) を有限次元空間での問題に近似する方法を考える. すでに述べてきたように主問題 (9) と双対問題 (11) の間には一般に双対ギャップがあるので, 双対問題の変数を単純に打ち切る方法では有限次元近似はできない.

[仮定 2] 周波数点 $\{\omega_1, \dots, \omega_{n_f}\}$ は, ある整数 $T > 0$ を用いて $2\pi/T$ の倍数であるように選ばれている.

仮定 2 は十分大きく T をとることによって周波数点の取り方の制約は小さくすることができる. さらにつぎの補題が成り立っている. 周波数点の微小変化は最適化問題 (9) の値を微小に変化させるにすぎない.

[補題 5] 仮定 1 が成り立つとする. 任意に $\epsilon > 0$ を与える. このとき $\delta > 0$ が存在して, 周波数点 $\{\omega'_1, \dots, \omega'_{n_f}\}$, $|\omega_k - \omega'_k| < \delta$, $k = 1, \dots, n_f$ に関する周波数応答制約を表

わす作用素を $\mathcal{A}'_{H^\infty}: \ell_1^{n_z \times n_w} \rightarrow \mathbb{R}^{N n_f}$ とし, 最適化問題 (9) ならびに周波数点を変化させた問題

$$\begin{aligned}
 \gamma' &= \inf_{\Phi \in \ell_1^{n_z \times n_w}} \|\Phi\|, \\
 \text{subject to } & \mathcal{A}_{\text{feas}} \Phi = b_{\text{feas}}, \\
 & \mathcal{A}'_{H^\infty} \Phi \leq b_{H^\infty},
 \end{aligned}$$

を考えると $\gamma' < \gamma + \epsilon$ が成り立つ.

(証明) 問題 (9) の実行可能解で $\|\Phi_0\| < \gamma + \epsilon/2$ を満たす Φ_0 がある. また仮定 1 より $\mathcal{A}_{\text{feas}} \Phi_1 = b_{\text{feas}}$, $\mathcal{A}_{H^\infty} \Phi_1 < b_{H^\infty}$ を満たす Φ_1 がある. ただし不等号は $\mathbb{R}^{N n_f}$ のすべての成分で不等号が真に成り立つことを意味する. すると Φ を Φ_0 と Φ_1 の凸結合として適当に選ぶと $\|\Phi\| < \gamma + \epsilon$, $\mathcal{A}_{\text{feas}} \Phi = b_{\text{feas}}$, $\mathcal{A}_{H^\infty} \Phi < b_{H^\infty}$ を満たしている. ここで $\hat{\Phi}(e^{j\omega})$ は ω の連続関数であるので, 適当な $\delta > 0$ を選ぶと $\mathcal{A}'_{H^\infty} \Phi \leq b_{H^\infty}$ である. $\square$

仮定 2 によって, $G = \mathcal{A}_{H^\infty}^* z_3 \in \ell_\infty$ は T 周期関数である. つまり $(S^*)^T G = G$ を満たす. ここで $z_2 \in \ell_\infty^{n_z n_w - n_y n_u}$ が終局的 T 周期関数であることを $z_{2,0} \in \ell_0^{n_z n_w - n_y n_u}$ と T 周期関数 $\bar{z}_2 \in \ell_\infty^{n_z n_w - n_y n_u}$ を用いて $z_2 = z_{2,0} + \bar{z}_2$ と表わせることと定義する.

《定理 1》 仮定 2 が成り立つとする. 最適化問題

$$\begin{aligned}
 \nu &= \sup_{z_1, z_2, z_3} \langle b_{\text{zero}}, z_1 \rangle + \langle b_{\text{rank}}, z_2 \rangle + \langle b_{H^\infty}, z_3 \rangle, \quad (22) \\
 \text{subject to } &
 \end{aligned}$$

$$\|\mathcal{A}_{\text{zero}}^* z_1 + \mathcal{A}_{\text{rank}}^* z_2 + \mathcal{A}_{H^\infty}^* z_3\| \leq 1, \quad z_3 \leq 0,$$

$$z_1 \in \mathbb{R}^{n_{\text{zero}}}, z_2 \in \ell_\infty^{n_z n_w - n_y n_u}, z_3 \in \mathbb{R}^{N n_f}$$

z_2 は終局的 T 周期関数,

を考えると $\nu = \gamma$ である.

(注意) T 周期関数の空間は有限次元であり, c_0 は可分な空間であるので, 問題 (22) は有限個の変数を用いて任意精度で近似することができる.

定理 1 の証明のために, いくつかの補題を示すことにする.

[補題 6] 仮定 2 が成り立つとする. もし $z_2 \in \ell_\infty$ および $z_3 \in \mathbb{R}^{k n_f}$ が $\|\mathcal{A}_{\text{rank}}^* z_2 + \mathcal{A}_{H^\infty}^* z_3\|_{(i)} \leq c_i$, $i = 1, \dots, n_z$ を満たすならば, T 周期関数 $\bar{z}_2 \in \ell_\infty$ があって $\|\mathcal{A}_{\text{rank}}^* \bar{z}_2 + \mathcal{A}_{H^\infty}^* z_3\|_{(i)} \leq c_i$ が成り立つ.

(証明) まず $G = \mathcal{A}_{H^\infty}^* z_3$ とおく. G は T 周期的であるので

$$\begin{aligned}
 \|\mathcal{A}_{\text{rank}}^* (S^*)^{kT} z_2 + G\|_{(i)} &= \|(S^*)^{kT} \mathcal{A}_{\text{rank}}^* z_2 + G\|_{(i)} \\
 &= \|(S^*)^{kT} \{\mathcal{A}_{\text{rank}}^* z_2 + G\}\|_{(i)} \\
 &\leq \|\mathcal{A}_{\text{rank}}^* z_2 + G\|_{(i)}
 \end{aligned}$$

が $k = 0, 1, 2, \dots$ について成り立つ. そこで

$$z_{2,N} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (S^*)^{kT} z_2$$

とおく. すると集合 $\{z_2: \|\mathcal{A}_{\text{rank}}^* z_2 + G\|_{(i)} \leq c_i\}$ は凸だから $\|\mathcal{A}_{\text{rank}}^* z_{2,N} + G\|_{(i)} \leq c_i$ である. 入力 $z_{2,N} \in$

$\ell_{\infty}^{n_z n_w - n_y n_u}$ を用いて線形離散時間システム (20) を時間を後ろ向きに解き, その状態 $w_N = (w_N(0), w_N(1), \dots) \in \ell_{\infty}^{n_{zero}}$ と出力 $F_N = (F_N(0), F_N(1), \dots) \in \ell_{\infty}^{n_z \times n_w}$ を考える. このとき補題4より $F_N = \mathcal{A}_{\text{rank}}^* z_{2,N}$, $\|F_N + G\|_{(i)} \leq c_i$ であることに注意する. また

$$w_N(t) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} w_1(t + kT), \quad (23)$$

であるので, 集合

$$\{(w_N(t), z_{2,N}(t)) : N = 0, 1, 2, \dots, t = 0, 1, 2, \dots\} \\ \subset \mathbb{R}^{n_{zero}} \times \mathbb{R}^{n_z n_w - n_y n_u}$$

は有界である. したがって $t_0, t_1 = t_0 + T$ を固定して部分列を適当に選ぶと $t_0 \leq t \leq t_1$ について $\{w_{N_s}(t)\}$ および $\{z_{2,N_s}(t)\}$ は収束する. その極限を $w_0(t)$ および $z_{2,0}(t)$ と表す. (23) 式より

$$\|w_N(t) - w_N(t+T)\| = \frac{1}{N} \|w_1(t) - w_1(t+NT)\| \\ \leq \frac{2}{N} \sup_k \|w_1(t + kT)\|$$

となる. ただしノルムは $\mathbb{R}^{n_{zero}}$ の適当なノルムである. これより $w_0(t_0) = w_0(t_1)$ を得る. ここで補題4を適用すると

$$w_0(t_0) = (\mathbf{A}^*)^T w_0(t_1) + \sum_{k=0}^{T-1} (\mathbf{A}^*)^{T-k-1} \mathbf{C}^* z_{2,0}(t_1 - k) \quad (24)$$

である. ここで

$$F_0(t) = \mathbf{B}^* w_0(t) + \mathbf{D}^* z_{2,0}(t), \quad t_0 \leq t \leq t_1$$

と定める. 連続性より $F_0(t) = \lim F_{N_s}(t)$ となるので,

$$\max_{1 \leq j \leq n_w} |f_{0,ij}(t) + g_{ij}(t)| \leq c_i, \quad t_0 \leq t \leq t_1 \quad (25)$$

である. ただし $f_{0,ij}$ および g_{ij} はそれぞれ F_0 および G の第 (i, j) 成分である. ここで T 周期関数 $\bar{z}_2$ を $\bar{z}_2(t) = z_{2,0}(t)$, $t_0 < t \leq t_1$ によって定める. そして $\bar{z}_2$ を入力として時間を後ろ向きに解く線形システム (20) に加えたときの状態と出力をそれぞれ $\bar{w}$ および $\bar{F}$ とする. このとき $\bar{w}$ および $\bar{F}$ は T 周期関数であり, $\mathcal{A}_{\text{rank}}^* \bar{z}_2 = \bar{F}$ となっている. したがって

$$\bar{w}(t) = w_0(t), \quad \bar{F}(t) = F_0(t), \quad t_0 \leq t \leq t_1 \quad (26)$$

である. (25), (26) 式および T 周期性より補題1を用いて $\|\bar{F} + G\|_{(i)} \leq c_i$ が成り立つことがわかる. $\square$

[補題7] 仮定2が成り立つとし, $z_1 \in \mathbb{R}^{n_{zero}}$, $z_2 \in \ell_{\infty}^{n_z n_w - n_y n_u}$, $z_3 \in \mathbb{R}^{n_f}$ は

$$\|\mathcal{A}_{\text{zero}}^* z_1 + \mathcal{A}_{\text{rank}}^* z_2 + \mathcal{A}_{H^{\infty}}^* z_3\| \leq 1$$

を満たすものとする. ここで

$$\mu = \langle b_{\text{zero}}, z_1 \rangle + \langle b_{\text{rank}}, z_2 \rangle + \langle b_{H^{\infty}}, z_3 \rangle$$

とおく. 正数 $\epsilon > 0$ を任意にとると終局的 T 周期関数 $z'_2 \in \ell_{\infty}^{n_z n_w - n_y n_u}$ を $\|\mathcal{A}_{\text{zero}}^* z_1 + \mathcal{A}_{\text{rank}}^* z'_2 + \mathcal{A}_{H^{\infty}}^* z_3\| \leq 1 + \epsilon$, $\langle b_{\text{zero}}, z_1 \rangle + \langle b_{\text{rank}}, z'_2 \rangle + \langle b_{H^{\infty}}, z_3 \rangle \geq \mu - \epsilon$ を満たすように選ぶことができる.

(証明) まず

$$c_i := \|\mathcal{A}_{\text{zero}}^* z_1 + \mathcal{A}_{\text{rank}}^* z_2 + \mathcal{A}_{H^{\infty}}^* z_3\|_{(i)} \quad (27)$$

とおく. ただし $\sum_{i=1}^{n_z} c_i \leq 1$ である. ここで $\mathcal{A}_{\text{zero}}^* z_1 \in \ell_{\infty}^{n_z \times n_w}$ であるので, 十分大きな k をについて

$$\|(S^*)^{kT} \{\mathcal{A}_{\text{rank}}^* z_2 + \mathcal{A}_{H^{\infty}}^* z_3\}\|_{(i)} \\ = \|\mathcal{A}_{\text{rank}}^* (S^*)^{kT} z_2 + \mathcal{A}_{H^{\infty}}^* z_3\|_{(i)} \leq c_i + \frac{\epsilon}{3n_z}$$

である. 補題6より, T 周期関数 $\bar{z}_2 \in \ell_{\infty}^{n_z n_w - n_y n_u}$ を

$$\|\mathcal{A}_{\text{rank}}^* \bar{z}_2 + \mathcal{A}_{H^{\infty}}^* z_3\|_{(i)} \leq c_i + \frac{\epsilon}{3n_z} \quad (28)$$

であるように選ぶ. もし $z_2 = \bar{z}_2$ であれば, さらに示すことはない. もしそうでなければ,

$$z'_2(t) = \begin{cases} z_2(t), & 0 \leq t \leq t_0 \\ \frac{t-t_0}{t_1-t_0} z_2(t) + \frac{t_1-t}{t_1-t_0} \bar{z}_2(t), & t_0 < t < t_1 \\ \bar{z}_2(t), & t_1 \leq t \end{cases}$$

と定義する. ただし $0 < t_0 < t_1$ は後ほど適切に決める. 明らかに z'_2 は終局的 T 周期関数である. また

$$\|z_2(t) - z'_2(t)\| = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq t_0 \\ \frac{t_1-t}{t_1-t_0} \|z_2(t) - \bar{z}_2(t)\|, & t_0 < t < t_1 \\ \|z_2(t) - \bar{z}_2(t)\|, & t_1 \leq t \end{cases}$$

であるので, $\|z_2 - z'_2\| \leq \|z_2 - \bar{z}_2\|$ が成り立つ. ここで $b_{\text{rank}} \in \ell_1^{n_z n_w - n_y n_u}$ であるから, $t_{01} > 0$ を

$$\sum_{t=t_{01}+1}^{\infty} \|b_{\text{rank}}(t)\| < \frac{\epsilon}{\|z_2 - z'_2\|}$$

となるように選ぶことができる. すると

$$|\langle b_{\text{rank}}, z_2 - z'_2 \rangle| \leq \sum_{t=t_{01}+1}^{\infty} \|b_{\text{rank}}(t)\| \|z_2(t) - \bar{z}_2(t)\| < \epsilon$$

となつて, $\langle b_{\text{zero}}, z_1 \rangle + \langle b_{\text{rank}}, z'_2 \rangle + \langle b_{H^{\infty}}, z_3 \rangle \geq \mu - \epsilon$ である. また $\mathcal{A}_{\text{zero}}^* z_1 \in \ell_{\infty}^{n_z \times n_w}$ だから $t_{02} > 0$ を

$$\|(S^*)^{t_{02}} \mathcal{A}_{\text{zero}}^* z_1\|_{(i)} < \frac{\epsilon}{3n_z} \quad (29)$$

であるように選ぶ. そして $t_0 = \max\{t_{01}, t_{02}\}$ とする. ここで t_1 を

$$t_1 - t_0 > \frac{3n_z C \|z_2 - \bar{z}_2\|}{\epsilon(1-\delta)^2}$$

となるように選ぶ. ただし C および δ は (21) 式によって定めることとする. まず (27), (28) 式より, $0 \leq r \leq 1$ について

$$\|r \mathcal{A}_{\text{zero}}^* z_1 + \mathcal{A}_{\text{rank}}^* (r z_2 + (1-r) \bar{z}_2) + \mathcal{A}_{H^{\infty}}^* z_3\|_{(i)} \\ \leq c_i + \frac{\epsilon}{3n_z}$$

であることに注意する. ここで $G = \mathcal{A}_{\text{zero}}^* z_1 + \mathcal{A}_{\text{rank}}^* z'_2 + \mathcal{A}_{H^{\infty}}^* z_3$ のノルムを評価するために, t_2 を固定してその $g_{ij}(t_2)$ の絶対値を考える. ただし g_{ij} は G の (i, j) 成分で

ある. そのため

$$r = \begin{cases} 1, & 0 \leq t_2 \leq t_0 \\ \frac{t_2 - t_0}{t_1 - t_0}, & t_0 < t_2 < t_1 \\ 0, & t_1 \leq t_2 \end{cases}$$

とおく. そして $H = \mathcal{A}_{\text{rank}}^* (rz_2 + (1-r)\bar{z}_2 - z'_2)$ と定め, h_{ij} をその (i, j) 成分とする. ここで補題 4 を適用すれば, $t_0 < t_2 < t_1$ のときには

$$\begin{aligned} |h_{ij}(t_2)| &\leq \sum_{t=t_2+1}^{\infty} \|\mathbf{B}_i^* (\mathbf{A}^*)^{t-t_2} \mathbf{C}^*\| \\ &\quad \times \left\| \frac{t_2 - t_0}{t_1 - t_0} z_2(t) + \frac{t_1 - t_2}{t_1 - t_0} \bar{z}_2(t) \right. \\ &\quad \left. - \frac{t - t_0}{t_1 - t_0} z_2(t) - \frac{t_1 - t}{t_1 - t_0} \bar{z}_2(t) \right\| \\ &\leq \sum_{t=t_2+1}^{\infty} C \delta^{t-t_2+1} \frac{t - t_2}{t_1 - t_0} \|z_2(t) - \bar{z}_2(t)\| \\ &\leq \frac{C \|z_2 - \bar{z}_2\|}{(t_1 - t_0)(1 - \delta)^2} < \frac{\epsilon}{3n_z} \end{aligned}$$

である. 同様な議論によって $0 \leq t_2 \leq t_0$ のときにも $|h_{ij}(t_2)| < \epsilon/3n_z$ である. また $t_2 \geq t_1$ であれば $h_{ij}(t_2) = 0$ である. ここで

$$\begin{aligned} G + H &= (1-r)\mathcal{A}_{\text{zero}}^* z_1 + r\mathcal{A}_{\text{zero}}^* z_1 \\ &\quad + \mathcal{A}_{\text{rank}}^* (rz_2 + (1-r)\bar{z}_2) + \mathcal{A}_{H\infty}^* z_3 \end{aligned}$$

に注意する. 以上より不等式 $|g_{ij}(t_2)| \leq |h_{ij}(t_2)| + |g_{ij}(t_2) + h_{ij}(t_2)|$ を用いて, $0 \leq t_2 \leq t_0$ のときは

$$|g_{ij}(t_2)| \leq \frac{\epsilon}{3n_z} + c_i + \frac{\epsilon}{3n_z} < c_i + \frac{\epsilon}{n_z},$$

$t_0 < t_2 < t_1$ のときは (29) 式も考慮して

$$|g_{ij}(t_2)| \leq \frac{\epsilon}{3n_z} + \frac{\epsilon}{3n_z} + c_i + \frac{\epsilon}{3n_z} = c_i + \frac{\epsilon}{n_z}$$

であり, $t_1 \leq t_2$ のときは

$$|g_{ij}(t_2)| \leq \frac{\epsilon}{3n_z} + c_i + \frac{\epsilon}{3n_z} < c_i + \frac{\epsilon}{n_z}$$

である. そこで補題 1 を適用すると

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}_{\text{zero}}^* z_1 + \mathcal{A}_{\text{rank}}^* z'_2 + \mathcal{A}_{H\infty}^* z_3\| \\ \leq \sum_{i=1}^{n_z} \left(c_i + \frac{\epsilon}{n_z} \right) = 1 + \epsilon \end{aligned}$$

であることがわかる. $\square$

定理 1 は, 補題 7 から直ちに導くことができる.

(定理 1 の証明) まず $\mu_\infty \geq \nu$ は明らかである. つぎに $\epsilon > 0$ を任意にとる. $\|\mathcal{A}_{\text{zero}}^* z_1 + \mathcal{A}_{\text{rank}}^* z_2 + \mathcal{A}_{H\infty}^* z_3\| \leq 1$, $\langle b_{\text{zero}}, z_1 \rangle + \langle b_{\text{rank}}, z_2 \rangle + \langle b_{H\infty}, z_3 \rangle \geq \mu_\infty - \epsilon$ を満たす $z_1 \in \mathbb{R}^{n_{\text{zero}}}$, $z_2 \in \ell_\infty^{n_z n_w - n_y n_u}$, $z_3 \in \mathbb{R}^{k n_f}$ に対して, 補題 7 のように z'_2 を定め,

$$\bar{z}_1 = \frac{z_1}{1 + \epsilon}, \quad \bar{z}_2 = \frac{z'_2}{1 + \epsilon}, \quad \bar{z}_3 = \frac{z_3}{1 + \epsilon}$$

とおく. このとき $\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3$ は問題 (22) の可能解である. し

たがって

$$\nu \geq \langle b_{\text{zero}}, \bar{z}_1 \rangle + \langle b_{\text{rank}}, \bar{z}_2 \rangle + \langle b_{H\infty}, \bar{z}_3 \rangle \geq \frac{\mu_\infty - \epsilon}{1 + \epsilon}$$

である. $\epsilon > 0$ は任意ゆえ $\nu \geq \mu_\infty$ となる. したがって $\nu = \mu_\infty = \gamma$ が成り立つ. $\square$

Fig. 2 Optimal costs of primal and dual problems by the conventional method

[例 1] 閉ループ系の特性が

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \end{bmatrix} + q \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix}$$

と与えられているとする. ただし $\hat{h}_1(\lambda) = 5$, $\hat{h}_2(\lambda) = 0$, $\hat{v}_1(\lambda) = (\lambda + 0.2)(\lambda - 0.6)$, $\hat{v}_2(\lambda) = \lambda + 0.2$ である. 周波数応答制約を $\omega_1 = \pi/3$ と $\omega_2 = \pi/6$ に与える. 簡単のため, (8) 式での θ は一点 $\theta = 0$ のみとする.

$$\text{Re } \hat{\phi}_1(e^{j\omega_1}) \leq 0.7, \quad \text{Re } \hat{\phi}_1(e^{j\omega_2}) \leq 0.4.$$

ここで主問題 (9) と従来法⁶⁾である双対問題 (11) を考える. 主問題では変数 Φ の長さを, 双対問題では変数 z_2 の長さを有限に制限して解く. Fig. 2 では, これらの変数長を横軸にとって最適値を示している. 主問題の値 (上界値) と双対問題の値 (下界値) の間に双対ギャップが観察できる.

[例 2] 例 1 と同じ問題を考える. ここで主問題 (9) と本論文での提案法である双対問題 (22) を考える. 主問題では変数 Φ の長さを, 双対問題では変数 z_2 の c_0 部分の長さを有限に制限して解く. Fig. 3 これらの変数長を横軸にとって最適値を示している. 主問題の値 (上界値) と双対問題の値 (下界値) の間に双対ギャップはない.

6. おわりに

本研究では, 周波数応答に制約のある ℓ_1 制御問題の双対問題を有限次元の問題に近似する方法について述べた. 結果は, 双対問題の変数を c_0 と周期関数の和にすることによって任意精度で双対問題が近似できることがわかった. なお本研究は, 科学研究補助金 (C)(2)11650447 の援助を受けた. また国武隆君 (大阪大学大学院工学研究科) に数値例を提供頂いたことを感謝する.

Fig. 3 Optimal costs of primal and dual problems by the proposed method

参考文献

- 1) M.A. Dahleh and I.J. Diaz-Bobillo: *Control of Uncertain Systems*, Prentice-Hall (1995)
- 2) M.A. Dahleh and J.B. Pearson: ℓ_1 -optimal feedback controllers for MIMO discrete-time systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-32-4**, 314/322 (1987)
- 3) M.A. Dahleh and J.B. Pearson: L_1 -optimal compensators for continuous-time systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-32-10**, 889/895 (1987)
- 4) I.J. Diaz-Bobillo and M.A. Dahleh: Minimization of the maximum peak-to-peak gain: the general multiblock problem, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-38-10**, 1459/1482 (1993)
- 5) N. Elia and M.A. Dahleh: Controller design with multiple objectives, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **42-5**, 596/613 (1997)
- 6) N. Elia and M.A. Dahleh: ℓ_1 -minimization with magnitude constraints in the frequency domain, *Journal of Optimization Theory and Applications*, **93-1**, 27/51 (1997)
- 7) A. Limpiyamt, 太田: 周波数応答を考慮した ℓ_1 制御, 第29回制御理論シンポジウム (2000)
- 8) O.J. Staffans: The four-block model matching problem in ℓ^1 and infinite-dimensional linear programming, *SIAM Journal Control and Optimization*, **31-3**, 747/779 (1993)
- 9) M. Vidyasagar: Optimal rejection of persistent bounded disturbances, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-31-6**, 527/534 (1986)

[著者紹介]

太田 快人 (正会員)

1980年大阪大学工学部電子工学科卒業。83年大阪大学大学院工学研究科電子工学専攻後期課程中退。同年大阪大学工学部電子工学科助手、現在大阪大学大学院工学研究科電子制御機械工学専攻教授、この間86年から88年米国マサチューセッツ工科大学情報と決定システム研究所客員研究員。99年より *European Journal of Control* の Associate Editor。制御理論の研究に従事(工学博士)。