α - β - γ フィルタの安定性と最適ゲイン[†]

小 菅 義 夫*・系 正義*

Stability of an α - β - γ Filter and Optimal Gains[†]

Yoshio KOSUGE* and Masayoshi ITO*

We already reported the necessary and sufficient condition that an α - β - γ filter is stable under the condition that the values of filter gains α , β and γ are positive and are smaller than 1. However, the values of filter gains α , β and γ are not always smaller than 1. Therefore, we present a new necessary and sufficient condition of the stability that can be used even when the values of filter gains α , β and γ are larger than 1. Furthermore, we have made clear that the steady state variances of an α - β - γ filter for a constant velocity target become positive when an α - β - γ filter is stable. We also present the optimal choice of the α , β , γ combination of an α - β - γ filter. In order to evaluate the α , β , γ combination, we use the steady state errors of the predicted position of the α - β - γ filter. More exactly, we use the steady state variance for a constant velocity target under the condition that the steady state errors for a constant jerk (derivative of the acceleration) target are constant. Then we showed that this α - β - γ filter is stable.

Key Words: Kalman filter, α - β - γ filter, steady state error, radar, stability

1. はじめに

追尾フィルタは、目標位置の観測値をもとに、位置、速度などの目標運動諸元の真値を推定するものである^{1),2)}。この追尾フィルタは、干渉形フィルタ(Fully Coupled Filter)と非干渉形フィルタ(Decoupled Filter)とに分類される^{3)~7)}。3次元空間の追尾の場合、干渉形フィルタは、1個の3次元空間の追尾フィルタから構成される。これに対して、非干渉形フィルタは、各座標軸で独立である3個の1次元空間の追尾フィルタを使用して構成される。なお、干渉形フィルタの代表例は、3次元空間用のカルマンフィルタ^{8),9)}を使用したものである。また、非干渉形フィルタの構成要素として、簡便で実用的な1次元空間用の α - β フィルタあるいは α - β - γ フィルタが広く使われている^{3)~7)}。ここで、1サンプリング間の目標の推移に、 α - β フィルタは等速直線運動モデル、 α - β - γ フィルタは等加速度運動モデルを使用している。

なお、電子走査により1目標当たりの電波照射時間を自由に制御できるフェーズドアレーレーダでは、サンプリング間隔あるいは観測精度をサンプリング時刻によって任意に変えられる^{1),3),5),7)}。しかし、このようなレーダで最終的にはカルマンフィルタを使用するにしても、簡便な α - β (- γ)フィル

タをあらかじめ使用して前段階の設計および性能評価を行うことは、極めて有用である⁵⁾。

ところで、デジタルフィルタの1種である追尾フィルタが実用的であるためには、安定でなければならない^{10),11)}。 α - β フィルタでは、安定となるための必要十分条件が報告されている^{12),13)}。一方、 α - β - γ フィルタでは、ゲイン α , β , γ が、それぞれ0より大きく1より小さいとの条件の下で、安定であるための必要十分条件が報告されている^{14),15)}。しかし、 α - β - γ フィルタのゲイン α , β , γ は必ずしも1より小さいとは限らない。

また、 α - β - γ フィルタが安定ならば、等速直線運動目標に対する定常誤差の分散が正で意味のある値になることが報告されている^{15),18)}。しかし、この場合も、 α - β - γ フィルタのゲイン α , β , γ が0より大きく1より小さいことを前提としている。

ここで、たとえば航空管制で重要なのは、目標運動の急激な変動に対する追従能力と、最も頻繁に表われる等速直線運動目標に対する追尾精度である¹⁹⁾。この等速直線運動目標に対する追尾精度の確保には、ランダム誤差の抑圧が重要である。このため、本論文では、等速直線運動目標から観測値が得られる場合の追尾精度の指標として、現サンプリング時刻より1サンプリング後の予測位置の定常誤差の分散を使用する。なお、 α - β フィルタでは、等加速度目標に対する定常追従誤差が一定の条件の下での、上記の定常誤差の分散を最小にするゲイン α および β の関係が報告されている¹³⁾。しかし、 α - β - γ フィルタでは、このようなゲイン α , β および γ の関係が報告されていない。

[†] 第43回自動制御連合講演会で発表(2000・11)

* 三菱電機(株) 情報技術総合研究所 鎌倉市大船 5-1-1

* Information Technology R & D Center, Mitsubishi Electric Corporation, 5-1-1 Ofuna, Kamakura

(Received June 11, 2001)

(Revised December 27, 2001)

本論文では、ゲイン α, β, γ が 1 より大きいときにも、安定性の判定が可能な、 α - β - γ フィルタが安定であるための新たな必要十分条件を提案する。また、安定な α - β - γ フィルタでは、上記の定常誤差の分散が常に正であるかどうかを明らかにする。さらに、等ジャーク (jerk: 加速度の時間微分値) で運動する目標に対する定常追従誤差が一定との条件の下で、上記の定常誤差の分散を最小にする α - β - γ フィルタを提案する。さらにまた、この α - β - γ フィルタが安定であるかどうかを明らかにする。

2. カルマンフィルタと α - β - γ フィルタ

ここでは、目標位置を観測値とする 1 次元空間の追尾フィルタについて述べる³⁾⁻⁷⁾。なお、本論文では、サンプリング間隔を一定値 T として、サンプリング時刻を $t_k = kT$ (以後、時刻 t_k と呼ぶ) とする。

2.1 カルマンフィルタ

(1) 運動モデル

1 次元空間における等加速度運動モデルを次式に示す。なお、 A^T は行列 A の転置行列を表わす。

$$\underline{x}_k = \Phi(k-1)\underline{x}_{k-1} + \Gamma_1(k-1)w_{k-1} \quad (1)$$

ここで、

- $\underline{x}_k$ は時刻 t_k における目標位置、目標速度および目標加速度の真値を表わす 3 次元の状態ベクトル、
- $\Phi(k-1)$ は時刻 t_{k-1} より t_k への状態ベクトルの既知の推移行列で、

$$\Phi(k-1) = \begin{pmatrix} 1 & T & T^2/2 \\ 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

- w_k は駆動雑音で、平均 0 の白色正規分布で、 $\Gamma_1(k)w_k$ の誤差共分散行列は $\Gamma_1(k)Q_k\Gamma_1^T(k)$ 、
- $\Gamma_1(k)$ は駆動雑音ベクトル w_k の既知の変換行列。

(2) 観測モデル

状態ベクトルおよび観測雑音を使用して目標位置の観測値を表現した観測モデルを次式に示す。

$$x_{ok} = H\underline{x}_k + v_k \quad (3)$$

ここで、

- x_{ok} は時刻 t_k におけるレーダによる目標位置観測値、
- H は既知の観測行列で、

$$H = (1 \ 0 \ 0) \quad (4)$$
- v_k は観測雑音で、平均 0 の白色正規分布で、分散は A_k 。

(3) 予測と更新

時刻 t_k の予測ベクトル $\hat{\underline{x}}_k(-)$ は、時刻 t_{k-1} までの観測値に基づく状態ベクトル $\underline{x}_k$ の推定値とする。また、時刻 t_k の平滑ベクトル $\hat{\underline{x}}_k(+)$ は、時刻 t_k までの観測値に基づく $\underline{x}_k$ の推定値とする。 $\hat{\underline{x}}_k(-)$ および $\hat{\underline{x}}_k(+)$ の誤差共分散行列は、それぞれ $P_k(-)$ および $P_k(+)$ とする。さらに、時刻 t_k のゲイン行列を K_k とする。すると、カルマンフィルタの理論⁸⁾ から、次式を得る。

$$\hat{\underline{x}}_k(-) = \Phi_{k-1}\hat{\underline{x}}_{k-1}(+) \quad (5)$$

$$P_k(-) = \Phi_{k-1}P_{k-1}(+)\Phi_{k-1}^T + \Gamma_1(k-1)Q_{k-1}\Gamma_1^T(k-1) \quad (6)$$

$$K_k = P_k(-)H^T[HP_k(-)H^T + A_k]^{-1} \quad (7)$$

$$\hat{\underline{x}}_k(+) = \hat{\underline{x}}_k(-) + K_k(x_{ok} - H\hat{\underline{x}}_k(-)) \quad (8)$$

$$P_k(+) = P_k(-) - K_kHP_k(-) \quad (9)$$

2.2 α - β - γ フィルタ

(1) α - β - γ フィルタ

α - β - γ フィルタは、時刻 t_k における目標位置の平滑値を x_{sk} 、予測値を x_{pk} 、目標速度の平滑値を $\dot{x}_{sk}$ 、予測値を $\dot{x}_{pk}$ 、目標加速度の平滑値を $\ddot{x}_{sk}$ 、予測値を $\ddot{x}_{pk}$ としたとき、以下の (10)~(15) 式で定義される。

$$x_{sk} = x_{pk} + \alpha(x_{ok} - x_{pk}) \quad (10)$$

$$\dot{x}_{sk} = \dot{x}_{pk} + \beta/T \cdot (x_{ok} - x_{pk}) \quad (11)$$

$$\ddot{x}_{sk} = \ddot{x}_{pk} + \gamma/T^2 \cdot (x_{ok} - x_{pk}) \quad (12)$$

$$x_{pk} = x_{sk-1} + T \cdot \dot{x}_{sk-1} + T^2/2 \cdot \ddot{x}_{sk-1} \quad (13)$$

$$\dot{x}_{pk} = \dot{x}_{sk-1} + T \cdot \ddot{x}_{sk-1} \quad (14)$$

$$\ddot{x}_{pk} = \ddot{x}_{sk-1} \quad (15)$$

ここで、時刻 t_k における目標位置の真値を x_k 、目標速度の真値を $\dot{x}_k$ 、目標加速度の真値を $\ddot{x}_k$ とし、 $\underline{x}_k = (x_k, \dot{x}_k, \ddot{x}_k)^T$ 、 $\hat{\underline{x}}_k(-) = (x_{pk}, \dot{x}_{pk}, \ddot{x}_{pk})^T$ 、 $\hat{\underline{x}}_k(+) = (x_{sk}, \dot{x}_{sk}, \ddot{x}_{sk})^T$ 、 $K_k = (\alpha \ \beta/T \ \gamma/T^2)^T$ とすれば、等加速度運動モデルを使用する定常状態でのカルマンフィルタ ($K_k = K_{k-1}$, $P_k(+) = P_{k-1}(+)$, $P_k(-) = P_{k-1}(-)$ の状態) から、 α - β - γ フィルタを得る¹⁰⁾。ただし、すべての α - β - γ フィルタが定常状態でのカルマンフィルタから導出されるわけではない。なお、 α - β - γ フィルタにおいても、観測モデルは (3) 式を使用する。

ところで、時刻 t_{k-1} までの観測値が得られたときの目標位置予測値の誤差の分散が $E[(x_{pk} - x_k)^2 | x_{o1}, x_{o2}, \dots, x_{ok-1}]$ で定義できる⁸⁾。ここで、 $E[\]$ は平均を表わす記号とする。なお、観測雑音の分散は時刻 t_k に無関係な一定値 A 、また目標位置予測値の誤差の分散は時刻 t_k によらず一定値とする。すると、等速直線運動目標から観測値が得られる場合の目標位置予測値の定常誤差の分散 σ_p^2 は、観測雑音は白色の仮定を使用して、 α - β - γ フィルタでは次式となる^{15), 18)}。

$$\sigma_p^2 = \frac{8\beta^2}{(2-\alpha)g(\alpha, \beta, \gamma)} \cdot A + \frac{\alpha}{(2-\alpha)} A \quad (16)$$

なお、

$$g(\alpha, \beta, \gamma) = \{2\alpha\beta - \gamma(2-\alpha)\}(4-2\alpha-\beta) \quad (17)$$

(2) α - β フィルタ

α - β フィルタは、 α - β - γ フィルタにおいて加速度項およびゲイン γ が存在しない場合である。

3. 安定性

3.1 特性方程式と安定条件

入力信号と α - β - γ フィルタの出力信号の比であるパルス伝達関数^{10), 11)} の分母、すなわち特性方程式は、(10)~(15) 式より次式となる¹⁴⁾。

$$f(z)=z^3+az^2+bz+c=0 \quad (18)$$

ここで,

$$a=\alpha+\beta+\gamma/2-3 \quad (19)$$

$$b=-2\alpha-\beta+\gamma/2+3 \quad (20)$$

$$c=\alpha-1 \quad (21)$$

つぎに、有界および安定の定義について述べる¹⁰⁾.

(有界の定義) ある定数 M が存在して、次式を満たすとき、デジタル信号 a_k ($k=0, 1, 2, \dots$) は有界であると定義する.

$$|a_k| < M \text{ for } k=0, 1, 2, \dots \quad (22)$$

(安定の定義) すべての有界な入力信号に対して、出力信号が有界のとき、デジタルフィルタは安定であると定義する.

3.2 α - β - γ フィルタの従来の安定条件

(1) α - β - γ フィルタ

α - β - γ フィルタが安定であるための従来の必要十分条件は、次式の成立を前提としている^{14), 15)}.

$$0 < \alpha < 1, \quad 0 < \beta < 1, \quad 0 < \gamma < 1 \quad (23)$$

すなわち、つぎの性質が報告されている^{14), 15)}.

(性質1) (23)式が成立するとする. このとき、次式が、 α - β - γ フィルタが安定であるための必要十分条件である.

$$\gamma(1-\alpha/2) < \alpha\beta \quad (24)$$

(2) α - β フィルタ

α - β フィルタが安定であるための必要十分条件として、次式が報告されている^{12), 14), 15)}.

$$0 < \alpha \text{ and } 0 < \beta < 4-2\alpha \quad (25)$$

(例1) RA(Random Acceleration) フィルタ

目標の加速度にランダムに雑音ののした等加速度運動モデルを使用した定常状態でのカルマンフィルタより導出される α - β - γ フィルタを考える. この α - β - γ フィルタでは、初期値算出から十分時間が経過した場合、ゲイン α , β , γ は、つぎの関係を満たす一定値に収束する^{12), 15)~17)}. なお、この α - β - γ フィルタを RA フィルタと呼ぶ.

$$\beta^2 = 2\alpha\gamma \quad (26)$$

$$\alpha(\alpha+\beta+\gamma/2) = 2\beta \quad (27)$$

つぎに、RA フィルタの性質を調べる. このため、まず、(26)および(27)式より、 γ を消去して、次式を得る.

$$\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2/4 - 2\beta = 0 \quad (28)$$

(28)および(26)式より、 α を 1 とし、次式を得る.

$$\alpha=1, \quad \beta=2, \quad \gamma=2 \quad (29)$$

(29)式は、 α が 1 に近いとき、(23)式が成立しないことを示す.

(例2) FM(Fading Memory) フィルタ

運動モデルに曖昧さが無いとした等加速度運動モデルを使用したフェージングメモリフィルタ^{8), 9)}より導出される α - β - γ フィルタを考える. この α - β - γ フィルタでは、初期値算出から十分時間が経過した場合、ゲインは、つぎの関係を満たす一定値 α , β , γ に収束する^{14), 15)}. ここで、 s は 1 より大きい定数である. なお、この α - β - γ フィルタを FM

フィルタと呼ぶ.

$$\alpha=1-\frac{1}{s^3}, \quad \beta=\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{s}\right)^2\left(1+\frac{1}{s}\right), \quad \gamma=\left(1-\frac{1}{s}\right)^3 \quad (30)$$

(30)式より、 $s \rightarrow \infty$ として、次式を得る.

$$\alpha=1, \quad \beta=3/2, \quad \gamma=1 \quad (31)$$

(31)式は、 α が 1 に近いとき、(23)式が成立しないことを示す.

3.3 α - β - γ フィルタの新たな安定条件

例1および例2では、(23)式は必ずしも成立しない. このため、(23)式が成立しなくても α - β - γ フィルタの安定判別が可能となる新たな方法が必要となる.

性質1では、特性方程式の根の絶対値が1未満(安定条件)であるための必要十分条件を、実係数の3次方程式である(18)式の根と係数の関係より導出した¹⁸⁾. 一方、特性方程式の係数が与えられたときのデジタルフィルタの安定判別法として Jury の方法が知られている^{11), 20)}. この Jury の方法を使用して、つぎの補題を得る.

(補題1) 次式が、 α - β - γ フィルタが安定であるための必要十分条件である.

$$0 < \gamma - \alpha\gamma/2 - \alpha\beta - 2\alpha^2 + 4\alpha \text{ and } \beta < 4-2\alpha \\ \text{and } \gamma(1-\alpha/2) < \alpha\beta \text{ and } 0 < \gamma \quad (32)$$

つぎの性質は、補題1と同値である(付録A参照).

(性質2) 次式が、 α - β - γ フィルタが安定であるための必要十分条件である.

$$0 < \alpha \text{ and } 0 < \beta < 4-2\alpha \text{ and } \gamma(1-\alpha/2) < \alpha\beta \\ \text{and } 0 < \gamma \quad (33)$$

ところで、平滑効果を得るため、 α - β - γ フィルタのゲイン α , β , γ は 0 より大きい値で使用する. このため、(32)式と(33)式を比較すれば、性質2の方が補題1より、簡明で使いやすい形となっている.

なお、(33)式が成立するとき、 $0 < \alpha$ and $0 < \beta < 4-2\alpha$ より、次式が成立する.

$$0 < \alpha < 2 \quad (34)$$

$$0 < \beta < 4 \quad (35)$$

ところで、(23)および(24)式が成立するとき、(33)式は常に成立する. すなわち、性質2は性質1を包含している. さらにまた、(25)式と(33)式を比較すれば、性質2と α - β フィルタが安定であるための必要十分条件との関係がわかる. すなわち、性質2では、(23)式の α および β に関する条件の代わりに(25)式を使用している.

3.4 α - β - γ フィルタの安定判別の例

予測位置 x_{pk} および観測位置 x_{ok} には、それぞれ誤差が存在する. α - β - γ フィルタは、平滑効果を得るために、(10)式からわかるように、 x_{pk} および x_{ok} を内分する位置に平滑位置 x_{sk} を算出する. 内分するためには、ゲイン α は 0 より大きく 1 より小さな値でなければならない. このため、 α - β - γ フィルタの安定性の判定は次式の範囲で行なうことになる.

$$0 < \alpha < 1 \quad (36)$$

(1) RA フィルタ

(28)式をゲイン β の 2 次方程式と考えると、次式を得る。

$$\beta = 4(1 - \alpha/2 \pm \sqrt{1 - \alpha}) \quad (0 < \alpha < 1) \quad (37)$$

(37)式のうち大きな方の根 $\beta = 4(1 - \alpha/2 + \sqrt{1 - \alpha})$ は、次式を満たすので、性質 2 より不安定である。

$$4 - 2\alpha - \beta = -4\sqrt{1 - \alpha} < 0 \quad (38)$$

また、(26)および(28)式より、次式を得る。

$$\alpha\beta - \gamma(1 - \alpha/2) = \beta^2/4\alpha \cdot (6 - 3\alpha - \beta) \quad (39)$$

さらに、(37)式のうち小さな方の根は、(26)および(39)式を使用して、次式を満たすので、性質 2 より安定である。

$$\beta = \frac{\alpha^2}{(1 - \alpha/2 + \sqrt{1 - \alpha})} > 0 \quad (0 < \alpha < 1) \quad (40)$$

$$4 - 2\alpha - \beta = 4\sqrt{1 - \alpha} > 0 \quad (0 < \alpha < 1) \quad (41)$$

$$\gamma = \beta^2/2\alpha > 0 \quad (0 < \alpha < 1) \quad (42)$$

$$\alpha\beta - \gamma\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\beta^2}{4\alpha}(2 - \alpha + 4\sqrt{1 - \alpha}) > 0 \quad (0 < \alpha < 1) \quad (43)$$

(2) FM フィルタ

(30)式より、次式を得るので、性質 2 より、FM フィルタは $1 < s$ で安定である。

$$0 < \alpha, \quad 0 < \beta, \quad 0 < \gamma \quad (1 < s) \quad (44)$$

$$\alpha\beta - \gamma\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) = \left(1 - \frac{1}{s}\right)^3 \left(1 + \frac{1}{s}\right)^3 > 0 \quad (1 < s) \quad (45)$$

$$4 - 2\alpha - \beta = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{s}\right)^3 > 0 \quad (1 < s) \quad (46)$$

4. 定常誤差の分散

本章では、 σ_p^2 が正の値となるための、ゲイン α 、 β および γ の条件について述べる。また、等ジャーク (jerk: 加速度の時間微分値) で運動する目標に対する定常追従誤差が一定との条件の下で、 σ_p^2 を最小にする α - β - γ フィルタのゲイン α 、 β および γ の関係を示す。

4.1 安定条件との関連

まず、 α - β - γ フィルタが安定であるとき、(33)式を(17)式に適用して、次式を得る。

$$0 < g(\alpha, \beta, \gamma) \quad (47)$$

つぎに、 α - β - γ フィルタが安定であるとき、(34)、(35)および(47)式を(16)式に適用して、つぎの性質を得る。

(性質 3) α - β - γ フィルタが安定であるとき、等速直線運動目標に対する目標位置予測値の定常誤差の分散 σ_p^2 は正である。

4.2 定常追従誤差

終端値定理¹¹⁾を使用して、一定位置、一定速度、一定加速度の真値が入力されたときの α - β - γ フィルタの定常追従誤差は、いずれも 0 に収束することがわかる。また、一定ジャークとして $\dot{a}_c$ が入力されたときの α - β - γ フィルタの定常追従誤差は、 $\dot{a}_c T^3/\gamma$ に収束する。さらに、目標加速度の n ($n \geq 2$) 階時間微分値として定数値が入力されたときの α - β - γ フィルタの定常追従誤差は無限大となる。このため、

本論文では、目標運動の急激な変動に対する α - β - γ フィルタの評価値として、ジャークが一定である目標に対する定常追従誤差を使用する。

4.3 MV (Minimum Variance) フィルタ

ここでは、(33)式が成立する場合に、 γ が一定 (定常追従誤差 $\dot{a}_c T^3/\gamma$ が一定) との条件の下で、(16)式の σ_p^2 を最小にするゲイン α および β を算出する。すなわち、次式により、ゲイン α および β を算出する。

$$\begin{aligned} &\text{Minimize } \sigma_p^2 \text{ subject to } \gamma \\ &= \text{const} (\dot{a}_c / T^3 / \gamma = \text{constant}) \end{aligned}$$

このため、(16)式をゲイン α および β で偏微分した結果を 0 とし、 α 、 β および γ の 2 個の代数方程式を得る。この結果より、まず、つぎの(48)式を得る。さらに、 γ を消去して、 α および β についての 6 次の代数方程式を得る。ここで、5 次以上の代数方程式の根の公式は存在しない (ガロア理論)。このため、この 6 次の代数方程式に (33) 式を使用して、つぎの(49)式を得る (付録 B 参照)。なお、3 次方程式の根の公式は既知である。

$$4\alpha\beta = \gamma(8 - 4\alpha - \beta) \quad (48)$$

$$\begin{aligned} &\beta^3 + 2(3\alpha - 8)\beta^2 + 4(3\alpha^2 - 12\alpha + 16)\beta - 8\alpha^2(2 - \alpha) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (49)$$

ここで、(48)および(49)式でゲイン α 、 β および γ が決まる α - β - γ フィルタを MV フィルタと呼ぶ。

つぎの性質は、MV フィルタのゲイン α 、 β および γ が、(23)式を満たすことを示す (付録 C 参照)。

(性質 4) (49)式は、 $0 < \alpha < 1$ のとき $0 < \beta < 1$ で実根を 1 個のみ持つ。また、 $0 < \alpha < 1$ のとき、 $0 < \gamma < 1$ である。

つぎに、MV フィルタの安定性について述べる。(48)式より、 $0 < \alpha < 1$ 、 $0 < \beta < 1$ のとき、次式を得る。

$$\alpha\beta - \gamma\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) = \alpha\beta \frac{4 - 2\alpha - \beta}{8 - 4\alpha - \beta} > 0 \quad (50)$$

一方、性質 4 より $0 < \gamma < 1$ であるから、(50)および(23)式を使用して性質 1 よりつぎの性質を得る。

(性質 5) MV フィルタは、 $0 < \alpha < 1$ のとき、安定である。

(49)式は β に関する 3 次方程式であり、実際に使用するのには不便である。このため、(49)式の実数解を次式に示す。なお、証明は Cardan の解法²¹⁾を使用して得られる。

$$\beta = -(l + m) - 2(3\alpha - 8)/3 \quad (51)$$

ここで、

$$l = \sqrt[3]{\frac{8}{27}(27\alpha^2 - 72\alpha + 64) + \frac{8\sqrt{3}\alpha}{9}\sqrt{27\alpha^2 - 80\alpha + 64}} \quad (52)$$

$$m = \sqrt[3]{\frac{8}{27}(27\alpha^2 - 72\alpha + 64) - \frac{8\sqrt{3}\alpha}{9}\sqrt{27\alpha^2 - 80\alpha + 64}} \quad (53)$$

4.4 比較

次式で示すように、ゲイン γ が一定であるとの条件の下で、 $0 < \alpha < 1$ で安定である MV フィルタ、RA フィルタおよ

びFMフィルタの定常誤差の分散 σ_p^2 の比較を行なう。

Evaluate σ_p^2 subject to γ

$$= \text{constant} (\dot{a}_c T^3 / \gamma = \text{constant})$$

ここで、観測雑音の分散 A は1と正規化する。なお、MVフィルタ、RAフィルタおよびFMフィルタのゲイン γ に対する σ_p^2 の算出方法をつぎの(1)~(3)に示す。

(1) MVフィルタ

(51)~(53)式より、ゲイン α よりゲイン β の値が算出できる。(48)式より、この α および β より、ゲイン γ の値が算出できる。したがって、(16)式より α に対する σ_p^2 が算出できる。これらの結果を使用して、 γ に対する σ_p^2 が算出できる。

(2) RAフィルタ

(26)および(27)式より次式を得る(付録D参照)。

$$\alpha = -\sqrt[3]{(\gamma p + \gamma \sqrt{p^2 + q})/2} - \sqrt[3]{(\gamma p - \gamma \sqrt{p^2 + q})/2} + \gamma/3 \quad (54)$$

ここで、

$$p = \gamma^2/108 + 8\gamma/3 - 8, \quad q = 4\gamma(8 - \gamma/12)^3/27 \quad (55)$$

(54)、(55)および(38)式を使用して、ゲイン γ より、ゲイン α および β の値が算出できる。したがって、(16)式より、 γ に対する σ_p^2 が算出できる。

(3) FMフィルタ

(30)式より、定数 s に対して、ゲイン α 、 β および γ の値が算出できる。したがって、(16)式より、 γ に対する σ_p^2 が算出できる。

つぎに、Fig. 1にMVフィルタ、RAフィルタおよびFMフィルタの γ に対する σ_p^2 の値を示す。Fig. 1は、これらの中で、FMフィルタが最悪であることを示す。なお、MVフィルタにおいて、 α が1のとき、 γ は約0.35である。

さらに、理論値である(16)式の分散の値とシミュレーション値である追尾誤差の自乗値の比較をTable 1に示す。こ

Fig. 1 Variance of the predicted position

Table 1 Comparison of the predicted position variance

γ	theoretical values			simulation values		
	MV filter	RA filter	FM filter	MV filter	RA filter	FM filter
0.05	84.2	100.6	134.5	85.1	99.8	134.5
0.10	120.8	149.0	203.5	120.7	148.9	205.3
0.15	152.5	193.2	267.7	152.8	194.6	270.6
0.20	182.3	236.7	331.5	180.9	240.0	334.9
0.25	211.1	281.0	397.6	209.0	286.0	400.3
0.30	239.6	326.7	464.1	237.8	333.5	467.6

で、レーダと目標は同一高度で、目標は速度250 m/sでレーダに向かって直進しているとする。また、目標の初期距離は50 kmで、観測精度が標準偏差で距離10 mとする。また、サンプリング間隔は1 sとする。なお、定常状態をより正確に模擬するため、Table 1のシミュレーション値は、200回のモンテカルロシミュレーション結果の100秒~150秒の追尾誤差の自乗値の51サンプリング分の平均値である。Table 1は、理論値とシミュレーション値がよく一致していることを示す。

4.5 考察

航空機では、等速直線運動がもっとも頻繁である。この場合、バイアス誤差は0であり、ランダム誤差の抑圧が重要である。すなわち、定常誤差の分散 σ_p^2 を小さくすることが重要である。ただし、単純に σ_p^2 を最小にするには、線形最小自乗法を使用すればよい。この場合、サンプル数が十分大きいと、定常誤差の分散 σ_p^2 は0に収束して、もはや新たな観測値を必要としない。すなわち、 α 、 β 、 γ の値は0でよいとの結論になる。しかし、これでは、目標の急激な変動にまったく追従できない。ところで、ジャークが一定のとき、 α - β - γ フィルタの定常追従誤差はゲイン γ で決まる。このため、本論文では、 α - β - γ フィルタの性能を比較するのに、定常追従誤差が一定(γ が一定)との条件の下での定常誤差の分散 σ_p^2 を使用した。

つぎに、本論文で導出した α - β - γ フィルタであるMVフィルタと、定常状態でのカルマンフィルタから導出される α - β - γ フィルタの考察を行なう。定常状態でのカルマンフィルタから、RAフィルタ以外の α - β - γ フィルタも導出可能である。たとえば、駆動雑音としてジャークが使用できる。しかし、本論文のシンプルな評価尺度では、定常状態でのカルマンフィルタより導出した α - β - γ フィルタが、MVフィルタの性能を上回ることはいない。

ところで、カルマンフィルタでは、駆動雑音を白色正規分布と仮定してあらかじめ大きさを設定して、推定誤差の分散が最小との意味で最適化を図っている。一方、MVフィルタは異なる2つの性能をバランスさせるように最適化を図っている。これらが、両者の性能の差となっている。しかし、カルマンフィルタが3次元空間の追尾に使用可能であるのに比べ、MVフィルタは1次元空間の追尾にしか使用できな

Fig. 2 Relationship between α and β Fig. 3 Relationship between α and γ

いの欠点である。

4.6 ゲイン α に対する比較

ここでは、本論文で比較した $0 < \alpha < 1$ で安定である MV フィルタ、RA フィルタおよび FM フィルタの特徴を明らかにする。このため、Fig. 2 に α に対する β 、Fig. 3 に α に対する γ 、Fig. 4 に α に対する σ_p^2 の値を示す。Fig. 2~Fig. 4 は、いずれの α - β - γ フィルタも、 α が大きくなると β 、 γ および σ_p^2 とも大きくなることを示す。ここで、MV フィルタは、 α が 1 のとき、 β も γ も 1 未満である。しかし、RA フィルタは、 α が 1 のとき、 β が 2、 γ が 2 ((29) 式参照) で性質 2 より不安定であり、Fig. 4 に示したように σ_p^2 が発散している。一方、FM フィルタは、 α が 1 のとき、 β が $3/2$ 、 γ が 1 ((31) 式参照) で性質 2 より安定で、 σ_p^2 の値は 19 である。

Fig. 4 Relationship between α and σ_p^2

5. む す び

本論文では、従来の結果を拡張して、 α - β - γ フィルタが安定であるための新たな必要十分条件を示した。この結果、ゲイン α が 0 より大きく 1 より小さいときに、 β または γ が 1 より大きくなる場合がある RA フィルタおよび FM フィルタの安定性の判定が可能となった。また、この必要十分条件において、 γ に関する条件を無視した結果は、 α - β フィルタが安定であるための必要十分条件と一致することを示した。さらに、安定な α - β - γ フィルタでは、等速直線運動目標に対する定常誤差の分散が正となり意味をもつことを示した。さらにまた、等ジャークで運動する目標に対する定常追従誤差が一定との条件の下で、等速直線運動目標に対する予測位置の定常誤差の分散を最小にする MV フィルタを導出した。また、MV フィルタが安定であることを明らかにした。

今後の課題は、1 次元空間に適用したら MV フィルタと一致するような 3 次元空間の追尾フィルタが存在するのかどうかを明らかにすることである。

参 考 文 献

- 1) P. L. Bogler: Radar Principles with Applications to Tracking Systems, John Wiley & Sons (1990)
- 2) C. B. Chang and J. A. Tabaczynski: Application of State Estimation to Target Tracking, IEEE Trans. AC-29-2, 98/108 (1984)
- 3) F. E. Daum and R. J. Fitzgerald: Decoupled Kalman Filters for Pased Array Radar Tracking, IEEE Trans. AC-28-3, 269/283 (1983)
- 4) 小菅, 亀田, 真野: レーダ追尾におけるカルマンフィルタと α - β フィルタ, 電子情報通信学会論文誌(B-II), J79-B-II-7, 414/421 (1996)
- 5) S. S. Blackman: Multiple Target Tracking with Radar Applications, Artech House (1986)
- 6) Y. Bar-Shalom and X. R. Li: Estimation and Tracking: Principles techniques, and Software, Artech House (1993)

- 7) S. S. Blackman and R. Popoli: Design and Analysis of Modern Tracking System, Artech House (1999)
- 8) A. H. Jazwinski: Stochastic Processes and Filtering Theory, Academic Press (1970)
- 9) A. Gelb, ed.: Applied Optimal Estimation, The M. I. T. PRESS (1974)
- 10) 高橋, 池原: デジタルフィルタ, 培風館 (1999)
- 11) 高橋安人: システムと制御, 岩波書店 (1978)
- 12) IR. A. M. Navarro: General Properties of Alpha Beta, and Alpha Beta Gamma Tracking Filters, PHL 1977-02 (1977)
- 13) 小菅, 亀田: α - β フィルタを使用したレーダ追尾における最適ゲイン, 電子情報通信学会論文誌(A), J82-A-3, 351/364 (1999)
- 14) 小菅, 亀田: α - β - γ フィルタを使用した追尾フィルタの安定性, 電子情報通信学会論文誌(A), J81-A-6, 928/941 (1998)
- 15) Y. Kosuge, M. Ito and T. Okada: A Stability Condition and Steady State Errors of an α - β - γ Filter for Radar Tracking, SICE'00, 112A-2 (2000)
- 16) A. W. Bridgewater: Analysis of Second and Third Order Steady-State Tracking Filters, AGARD Conference Proc. no. 252 Strategies for Automatic Track Initiation, 9-1/9-11 (1970)
- 17) P. R. Kalata: The tracking index: A Generalized Parameter for α - β and α - β - γ Target Trackers, IEEE Trans. AES-20-2, 174/182 (1984)
- 18) 小菅, 系, 岡田, 真野: レーダ追尾における α - β - γ フィルタの定常誤差, 電子情報通信学会論文誌(A), J82-A-12, 1767/1779 (1999)
- 19) P. Vacher, I. Barret and M. Gauvrit: Design of a Tracking Algorithm for an Advanced ATC System Target Tracking, Y. Bar-Shalom, ed, Multitarget-Multisensor Tracking: Applications and Advances VolumeII, Artech House (1992)
- 20) C. L. Phillips and H. T. Nagle: Digital Control System Analysis and Design, Prentice Hall (1995)
- 21) 福井, 上村, 入江, 宮寺, 前原, 境: 線型代数学入門, 内田老鶴圃新社 (1968)

《付 録》

A: 補題1と性質2が同値であることの証明

(1) 補題1→性質2の証明

(32)式から, (33)式を示せばよい. このためには, 次式が成立することを示せばよい.

$$0 < \alpha \text{ and } 0 < \beta \quad (\text{A.1})$$

まず, $0 < \gamma - \alpha\gamma/2 - \alpha\beta - 2\alpha^2 + 4\alpha$ and $\gamma(1 - \alpha/2) < \alpha\beta$ より, 次式を得る.

$$2\alpha(2 - \alpha) > \alpha\beta - \gamma(1 - \alpha/2) > 0 \quad (\text{A.2})$$

(A.2)式より, 次式を得る.

$$0 < \alpha < 2 \quad (\text{A.3})$$

つぎに, $\gamma(1 - \alpha/2) < \alpha\beta$ and $0 < \gamma$ と (A.3)式より, 次式を得る.

$$0 < \gamma(1 - \alpha/2) < \alpha\beta \quad (\text{A.4})$$

(A.4)および(A.3)式より, $0 < \beta$ を得るので証明が終わる.

(2) 性質2→補題1の証明

(33)式から, (32)式を示せばよい. このためには, 次式が成立することを示せばよい.

$$0 < \gamma - \alpha\gamma/2 - \alpha\beta - 2\alpha^2 + 4\alpha \quad (\text{A.5})$$

まず, 次式を得る.

$$\begin{aligned} \gamma - \alpha\gamma/2 - \alpha\beta - 2\alpha^2 + 4\alpha \\ = (2 - \alpha)(2\alpha + \gamma/2) - \alpha\beta \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

つぎに, (A.6)式に $0 < \alpha$ and $0 < \beta < 4 - 2\alpha$ and $0 < \gamma$ を使用して, $\gamma - \alpha\gamma/2 - \alpha\beta - 2\alpha^2 + 4\alpha > \beta\gamma/4 > 0$ を得るので証明が終わる.

B: (48)および(49)式の証明

(17)式を β で偏微分して, 次式を得る.

$$\frac{\partial g(\alpha, \beta, \gamma)}{\partial \beta} = 4\alpha(2 - \alpha - \beta) - \gamma(\alpha - 2) \quad (\text{B.1})$$

(16)式を β で偏微分して, (B.1)式を使用すれば, 次式を得る.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_p^2}{\partial \beta} = \\ \frac{16\beta(2 - \alpha)g(\alpha, \beta, \gamma)^2 - 8(2 - \alpha)\beta^2\{4\alpha(2 - \alpha - \beta) - \gamma(\alpha - 2)\}}{(2 - \alpha)^2 g(\alpha, \beta, \gamma)^2}. \quad (\text{B.2}) \end{aligned}$$

(B.2)式を0とおけば, (17)式を使用して次式を得る.

$$8\beta\{4\alpha\beta - \gamma(8 - 4\alpha - \beta)\} = 0 \quad (\text{B.3})$$

(B.3)式において, (33)式より $\beta \neq 0$ として, (48)式を得る.

(17)式を α で偏微分して, 次式を得る.

$$\frac{\partial g(\alpha, \beta, \gamma)}{\partial \alpha} = 2\beta(4 - 4\alpha - \beta) + \gamma(8 - 4\alpha - \beta) \quad (\text{B.4})$$

(B.4)式に(48)式を代入して, 次式を得る.

$$\frac{\partial g(\alpha, \beta, \gamma)}{\partial \alpha} = 2\beta(4 - 2\alpha - \beta) \quad (\text{B.5})$$

(16)式を α で偏微分して, (B.5)式を使用すれば, 次式を得る.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_p^2}{\partial \alpha} = \\ \frac{8\beta^2\{g(\alpha, \beta, \gamma) - 2\beta(2 - \alpha)(4 - 2\alpha - \beta)\} + 2g(\alpha, \beta, \gamma)^2}{(2 - \alpha)^2 g(\alpha, \beta, \gamma)^2}. \quad (\text{B.6}) \end{aligned}$$

(B.6)式の分子を0とおけば, 次式を得る.

$$4\beta^2\{g(\alpha, \beta, \gamma) - 2\beta(2 - \alpha)(4 - 2\alpha - \beta)\} + g(\alpha, \beta, \gamma)^2 = 0 \quad (\text{B.7})$$

(B.7)式に, (17)および(48)式を使用して, 次式を得る.

$$\begin{aligned} \gamma^2(8 - \alpha\beta - 2\alpha^2)^2 + 4\beta\gamma(8 - \alpha\beta - 2\alpha^2)\{\beta - \alpha(2\alpha + \beta)\} \\ + 4\beta^2\{(2 - \alpha)^2\beta^2 + 4(\alpha^3 - 2\alpha^2 + 4\alpha - 4)\beta + 4\alpha^4\} = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

γ を消去するため, (B.8)式に(48)式を代入して, (33)式より $\beta \neq 0$ として, 次式を得る.

$$\begin{aligned} (2 - \alpha)^2(\beta - 4 + 2\alpha) \times \{\beta^3 + 2(3\alpha - 8)\beta^2 \\ + 4(3\alpha^2 - 12\alpha + 16)\beta - 8\alpha^2(2 - \alpha)\} = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

ここで, (33)式の仮定より $(2 - \alpha)^2(\beta - 4 + 2\alpha) \neq 0$ であるので((34)式参照), (B.9)式より(49)式を得る.

C: 性質4の証明

$0 < \alpha < 1$ を定数と考え, 次式の β の関数を定義する.

$$\begin{aligned} h(\beta) = \beta^3 + 2(3\alpha - 8)\beta^2 + 4(3\alpha^2 - 12\alpha + 16)\beta \\ - 8\alpha^2(2 - \alpha) \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

(C.1)式より次式を得る.

$$h\left(\frac{\alpha}{2}\right)=2\alpha\left(4-\frac{11}{4}\alpha\right)^2+\frac{1}{2}\alpha^3>0 \quad (0<\alpha<1) \quad (\text{C.2})$$

$$h(0)=-8\alpha^2(2-\alpha)<0 \quad (0<\alpha<1) \quad (\text{C.3})$$

(C.2)および(C.3)式より, (49)式は $0<\alpha<1$ のとき $0<\beta<\alpha/2$ ($<1/2<1$) に少なくとも 1 実根を持つ.

一方, (C.1)式を β で微分すれば, 次式を得る.

$$\begin{aligned} h'(\beta)= & 3(1-\beta)^2+12(1-\alpha)^2+12(1-\alpha)(1-\beta) \\ & +14(1-\beta)+12(1-\alpha)+11>0 \\ & (0<\alpha<1, 0<\beta<1) \quad (\text{C.4}) \end{aligned}$$

(C.4)式より, β の関数 $h(\beta)$ は $0<\beta<1$ で狭義の単調増加関数である(ただし, $0<\alpha<1$). したがって, (49)式は $0<\beta<\alpha/2$ ($<1/2<1$) に 1 実根のみを持つ.

また, $0<\alpha<1$ のとき, $0<\beta<1$ であるから (48)式より $0<\gamma$ である.

一方, (48)式より, 次式を得る.

$$1-\gamma=\frac{4(1-\alpha)+4-\beta-4\alpha\beta}{8-4\alpha-\beta} \quad (\text{C.5})$$

ここで, $0<\alpha<1$ のとき, $0<\beta<\alpha/2$ であるから, (C.5)式より, $\gamma<1$ である.

以上で, 性質 4 の証明が終わる.

D: (54)式の証明

(26)および(27)式より, $\alpha\neq 0$ を使用して, 次式を得る.

$$\alpha^3-\gamma\alpha^2+(\gamma^2/4+8\gamma)\alpha-8\gamma=0 \quad (\text{D.1})$$

(D.1)式は, α の 3 次方程式であるので, Cardan の解法²¹⁾ を使用して解き, (54)式を得る.

[著 者 紹 介]

小 菅 義 夫 (正会員)

1974 年, 早稲田大学大学院理工学研究科(数学専攻)修士課程了. 同年三菱電機(株)入社. 現在, 同社情報技術総合研究所, 電子システム技術部長. 多目標追尾に関する研究開発に従事. 電子情報通信学会, IEEE シニアなどの会員(工学博士).

系 正 義 (正会員)

1989 年, 早稲田大学大学院理工学研究科(電気専攻)修士課程了. 同年三菱電機(株)入社. 現在, 同社情報技術総合研究所, 目標追尾に関する研究開発に従事. 電子情報通信学会などの会員.