線形行列方程式によるインプリシットシステムの安定条件†

鷹 羽 浄 嗣*・市 原 豊*・片 山 徹*

Stability Conditions of Implicit Systems via Linear Matrix Equations†

Kiyotsugu TAKABA*, Yutaka ICHIHARA* and Tohru KATAYAMA*

In this paper, we derive necessary and sufficient conditions for internal stability of an implicit system in terms of linear matrix equations (LMEs) under the assumptions of finite dynamics detectability and impulse observability. These LME conditions are generalizations of stability conditions for descriptor systems. We also show that a constrained linear matrix inequality condition and a linear matrix inequality condition for the internal stability can be obtained from the present LME conditions. Moreover, the effectiveness of the LME stability condition is demonstrated by applying it to the stability analysis of an implicit linear quadratic optimal control system.

Key Words: implicit system, internal stability, linear matrix equation, constrained linear matrix inequality, linear matrix inequality

1. はじめに

近年、インプリシットシステムに関する研究が活発に行なわれている^{1)~7)}。インプリシットシステムは、状態空間システムやディスクリプタシステムの一般化であり、あらかじめ入出力変数の区別を行なわないことにより柔軟なモデリング、解析および設計を可能とする。

本論文では、線形行列方程式 (LME) に基づくインプリシットシステムの安定解析について考察する。インプリシットシステムの安定性に関連する過去の研究は以下のとおりである。

ディスクリプタシステムの安定性に関して、鷹羽・森平・片山⁸⁾および片山⁹⁾は、指数可検出性とインパルス可検出性の仮定の下で LME による安定条件を提案した。増淵・小原・須田¹⁰⁾および Masubuchi ら¹¹⁾は文献 8), 9) の LME 条件を等式制約付き線形行列不等式 (CLMI) の条件に拡張し、ロバスト安定化および H_∞ 制御へ適用した。上里・池田¹³⁾は等式制約を含まない線形行列不等式 (LMI) による等価な安定条件を与え、ロバスト安定化問題に適用している。また、Woon・池田・上里¹²⁾は、文献 8), 9) とは異なる LME 安定条件を提案している。

インプリシットシステムに対しては、増淵・示村⁴⁾は、文献 10), 11) の結果を拡張し、CLMI によるインプリシットシステムの安定条件を導出した。しかしながら、インプリシットシステムの安定解析において、文献 8), 9) に対応する結

果、すなわち適当な可検出性の下で LME による安定条件は、まだ導出されていない。

近年の凸最適化に基づく制御系設計法の急速な発展により、LMI による安定条件が広く受け入れられている。このような制御系設計の立場からは、文献 4) のような CLMI (または LMI) に基づく安定条件を得ることができれば充分であるかも知れない。しかし、線形 2 次最適制御問題⁷⁾など多くの制御問題の中には、LMI や CLMI よりむしろ LME 条件を適用する方が有効である場合がある。

また、状態空間システムおよびディスクリプタシステムの Lyapunov 方程式に関する従来結果との関連を明らかにすることによりインプリシットシステムの安定性の理論を補完するという点においても、LME を用いたインプリシットシステムの安定条件を導出することは意義があるであろう。

以上の観点に立ち、本論文では、指数可検出性およびインパルス可観測性の下で LME によるインプリシットシステムの安定条件を導出し、その有用性を考察する。本論文の構成は以下の通りである。まず、第 2 章で Kronecker 標準形を用いてインプリシットシステムの解軌道と内部安定性について基礎事項を整理する。第 3 章では、文献 8), 9) および文献 12) のディスクリプタシステムの安定条件の拡張として、インプリシットシステムに対する 2 種類の LME 安定条件を導出する。つぎに第 4 章で、これらの LME 条件から CLMI および LMI に基づく安定条件^{4), 13)}が容易に得られることを示す。最後に、第 5 章では、線形 2 次最適制御系⁷⁾の安定解析に LME 安定条件を適用することにより、その有用性を示す。

† 第 28 回制御理論シンポジウムで一部発表 (1999・5)

* 京都大学 大学院 情報学研究科 京都市 左京区 吉田本町

* Graduate School of Informatics, Kyoto University, Kyoto

(Received August 9, 2001)

(Revised January 24, 2002)

2. 線形インプリシットシステム

つぎの1次微分代数方程式で表わされるシステム Σ をインプリシットシステムと呼ぶ.

$$\Sigma: E\dot{\xi}(t) = F\xi(t) \quad (1)$$

ここに, $E, F \in \mathbf{R}^{m \times n}$ であり, $\text{rank } E = r \leq \min\{m, n\}$ とする. また, $\xi(t) \in \mathbf{R}^n$ は入出力変数と状態変数を含むすべての変数を要素とするベクトルである. ただし, 状態空間システムやディスクリプタシステムと異なり, $\xi(t)$ の要素の中で入出力の区別はされない. 行列の対 (E, F) はシステム Σ を一意に定義するので, (1) 式で表現されたシステムを $\Sigma(E, F)$ と書き表わす.

2.1 Kronecker 標準形と解軌道

ここでは, Kronecker 標準形^{4), 14)}に基づいて, インプリシットシステムの解軌道を考察する.

行列ペンシル $F - sE$ に対して, 適当な正則行列 U_c, V_c が存在して以下の Kronecker 標準形に変換することができる¹⁴⁾.

$$U_c(F - sE)V_c = \begin{bmatrix} A - sI_\kappa & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K - sL & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_\nu - s\Lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M - sN \end{bmatrix} \quad (2)$$

ただし, A, Λ は正方行列であり, Λ は巾零指数 α の巾零行列である. また, K, L, M, N はつぎのようなブロック対角行列である.

$$K = \text{diag}(K_1, K_2, \dots, K_q) \in \mathbf{R}^{(\mu+q) \times \mu}$$

$$L = \text{diag}(L_1, L_2, \dots, L_q) \in \mathbf{R}^{(\mu+q) \times \mu}$$

$$M = \text{diag}(M_1, M_2, \dots, M_p) \in \mathbf{R}^{\lambda \times (\lambda+p)}$$

$$N = \text{diag}(N_1, N_2, \dots, N_p) \in \mathbf{R}^{\lambda \times (\lambda+p)}$$

$$K_i = \begin{bmatrix} 0 \\ I_{\mu_i} \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{(\mu_i+1) \times \mu_i}$$

$$L_i = \begin{bmatrix} I_{\mu_i} \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{(\mu_i+1) \times \mu_i}$$

$$M_i = \begin{bmatrix} 0 & I_{\lambda_i} \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{\lambda_i \times (\lambda_i+1)}$$

$$N_i = \begin{bmatrix} I_{\lambda_i} & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{\lambda_i \times (\lambda_i+1)}$$

$$\mu = \sum_{i=1}^q \mu_i, \quad \lambda = \sum_{i=1}^p \lambda_i$$

ここで,

$$[\xi_1^T(t) \ \xi_2^T(t) \ \xi_3^T(t) \ \xi_4^T(t)]^T = V_c^{-1}\xi(t)$$

と定義すると,

$$\dot{\xi}_1(t) = A\xi_1(t), \quad L\dot{\xi}_2(t) = K\xi_2(t), \quad \Lambda\dot{\xi}_3(t) = \xi_3(t)$$

を得る. したがって, $\xi_i(t)$ ($i = 1, 2, 3$) は一意に

$$\xi_1(t) = e^{At}\xi_1(0-) \quad (3)$$

$$\xi_2(t) \equiv 0, \quad \xi_2(0-) = 0 \quad (4)$$

$$\xi_3(t) = -\sum_{i=0}^{\alpha-2} \delta^{(i)}(t) \Lambda^{i+1} \xi_3(0-) \quad (5)$$

により与えられる. ただし, $\delta(t)$ および $\delta^{(i)}(t)$ は Dirac のデルタ超関数およびその i 階微分である. ここで, (4) 式において $\xi_2(t)$ の初期値は 0 でなければならないことに注意されたい.

さらに, ペンシル $M_i - sN_i$ ($i = 1, 2, \dots, p$) が

$$M_i - sN_i = \begin{bmatrix} \bar{A}_i - sI_{\lambda_i} & \bar{B}_i \end{bmatrix}$$

$$\bar{A}_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_i = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

と表わされるから, $\xi_4(t)$ を

$$\xi_4(t) = \begin{bmatrix} \xi_{41}(t) \\ \xi_{42}(t) \\ \vdots \\ \xi_{4p}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ u_1(t) \\ x_2(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ x_p(t) \\ u_p(t) \end{bmatrix}$$

と分割すれば, 可制御な状態空間表現

$$\dot{x}_i(t) = \bar{A}_i x_i(t) + \bar{B}_i u_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, p$$

を得る. したがって, 任意の初期条件 $(x_i(0-), u_i(0-))$, $i = 1, \dots, p$ すなわち $\xi_4(0-)$ に対して, $u_i(t)$ を区分的連続な関数に選ぶことによりインパルスをもたない解軌道 $\xi_4(t)$ が無数に存在する.

以上の議論により, (1) 式を満足する $\xi(t)$ の軌道が存在するような初期値 $\xi(0-)$ の集合は

$$\Xi_0 = \ker([0 \ I_\mu \ 0 \ 0]V_c^{-1}) = \text{im } V_c \begin{bmatrix} I_\kappa & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_\nu & 0 \\ 0 & 0 & I_\lambda \end{bmatrix}$$

で与えられる.

2.2 自律性と内部安定性

インプリシットシステム $\Sigma(E, F)$ の2つの解軌道 $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$ に対して

$$\{\xi_1(0-) = \xi_2(0-)\} \Rightarrow \{\xi_1(t) = \xi_2(t), t > 0\}$$

が成り立つとき, このシステムは自律的であるという. 自律性は, システムの解軌道 ξ が初期条件に対して一意であり, システム変数 $\xi(t)$ が冗長な変数すなわち外生入力を含まないことを意味している.

上述の Kronecker 標準形に基づく解軌道の議論から明らかのように、システム $\Sigma(E, F)$ が自律的であることは Kronecker 標準形に (M, N) ブロックが存在しない $(\lambda + p = 0)$ ことと等価である。すなわち、 $\Sigma(E, F)$ が自律的であるための必要十分条件は、

$\max_s \text{rank}(F - sE) = n$ (列フルノーマルランク) である。

つぎに、インプリシットシステムの内部安定性を定義する。内部安定性は外生入力がないときの初期値応答に関する概念であるから、インプリシットシステムの場合にも自律性を仮定しなければならない。

また、(3),(5) 式より、インプリシットシステムは指数的な振舞いとインパルスの振舞いの両方をもつので、インプリシットシステムの内部安定性はつぎのように定義される⁴⁾。

【定義】⁴⁾ つぎの条件が成り立つとき、システム $\Sigma(E, F)$ は内部安定であるという。

- (i) $\Sigma(E, F)$ は自律系である。
- (ii) 任意の $\xi(0-) \in \Xi_0$ に対して次式が成立する。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \xi(t) = 0 \quad (6)$$

- (iii) 任意の $\xi(0-) \in \Xi_0$ に対して、ベクトル $\xi(t)$ はインパルスを含まない。

【補題 1】 インプリシットシステム $\Sigma(E, F)$ に対して、つぎの条件は等価である。

- (i) $\Sigma(E, F)$ は内部安定である。
- (ii) つぎの条件 (a)~(c) が成り立つ。
 - (a) $\max_s \text{rank}(F - sE) = n$
 - (b) A は安定行列である。
 - (c) $\Lambda = 0$ または (I_ν, Λ) ブロックが存在しない。
- (iii) つぎの条件 (a),(b) が成り立つ。
 - (a) $\text{rank}(F - sE) = n, \forall s \in \mathbf{C} \text{ s.t. } \text{Re}[s] \geq 0$
 - (b) $\ker E \cap F^{-1} \text{im } E = \{0\}$

ただし、 $F^{-1}S := \{x : Fx \in S\}$ とする。◇

(略証) 条件 (i) と (ii) の等価性は上述の議論より明らかである。また、特異ペンシルの一般化固有値、一般化固有ベクトルの構造^{1), 2), 14)}から、 $\{(ii-a), (ii-b)\} \Leftrightarrow (iii-a)$ および $(ii-c) \Leftrightarrow (iii-b)$ を得る。□

3. 線形行列方程式による安定条件

《定理 1》 システム $\Sigma(E, F)$ が内部安定であるための必要十分条件は、つぎの線形行列方程式 (LME) が $E^T X \geq 0$ なる解 X をもつことである。

$$E^T X = X^T E \quad (7a)$$

$$F^T X + X^T F + G^T G = 0 \quad (7b)$$

ここに、 G はつぎの条件を満足する定数行列である。

$$\text{rank} \begin{bmatrix} F - sE \\ G \end{bmatrix} = n, \forall s \in \mathbf{C} \text{ s.t. } \text{Re}[s] \geq 0 \quad (8)$$

$$\ker E \cap F^{-1} \text{im } E \cap \ker G = \{0\} \quad (9)$$

(8),(9) 式の仮定は、それぞれディスクリプタシステムの指数可検出性とインパルス可観測性⁹⁾に対応する条件である (本論文でも (8),(9) 式の条件をそれぞれ指数可検出性とインパルス可観測性と呼ぶことにする)。この意味で、定理 1 は、LME に基づくディスクリプタシステムの安定条件^{8), 9)}の一般化となっている。また、文献 6) では (9) 式の条件はインパルス可観測性または ex-in smooth と呼ばれており、Masubuchi⁵⁾は (8),(9) 式の条件を合わせてゼロ可検出性と呼んでいる。

(注意) 増淵・示村⁴⁾は、(7b) 式の定数項が正定値対称行列である場合の安定条件を与え、それに基づいて CLMI 安定条件を導出している。定理 1 は、増淵・示村⁴⁾よりもゆるい条件の下での LME 安定条件を与えている。

(証明) 必要性: $\Sigma(E, F)$ が内部安定であると仮定する。補題 1(i),(ii) より、(2) 式の Kronecker 標準形において、 A は安定行列かつ、 $\Lambda = 0$ であり、 (M, N) ブロックは存在しない。

また、 $K_i - sL_i$ ($i = 1, \dots, p$) を

$$K_i - sL_i = \begin{bmatrix} \bar{A}_i - sI_{\mu_i} \\ \bar{C}_i \end{bmatrix}$$

$$\bar{A}_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{C}_i = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

と分割して、

$$\bar{A} = \text{diag}(\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_q) \in \mathbf{R}^{\mu \times \mu} \quad (10)$$

$$\bar{C} = \text{diag}(\bar{C}_1, \bar{C}_2, \dots, \bar{C}_q) \in \mathbf{R}^{q \times \mu} \quad (11)$$

とおくと、 $(\bar{C}, \bar{A})$ は可観測であるから、 $\hat{A} = \bar{A} + H\bar{C}$ を安定行列とする行列 H が存在する。このとき、適当な正則行列 U, V が存在して

$$UEV = \begin{bmatrix} I_\kappa & 0 & 0 \\ 0 & I_\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$UFV = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & \hat{A} & 0 \\ 0 & \bar{C} & 0 \\ 0 & 0 & I_\nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 & 0 \\ F_3 & F_4 \end{bmatrix} \quad (13)$$

が成り立つ。上式の分割に対応して

$$X = U^T \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix} V^{-1} \quad (14)$$

$$G = \begin{bmatrix} G_1 & G_2 \end{bmatrix} V^{-1} \quad (15)$$

とすると, LME(7) 式は

$$X_1 = X_1^T, \quad X_2 = 0 \quad (16)$$

$$F_1^T X_1 + X_1 F_1 + F_3^T X_3 + X_3^T F_3 + G_1^T G_1 = 0 \quad (17)$$

$$F_3^T X_4 + X_3^T F_4 + G_1^T G_2 = 0 \quad (18)$$

$$F_4^T X_4 + X_4^T F_4 + G_2^T G_2 = 0 \quad (19)$$

と等価となる.

(19) 式より,

$$X_4 = (F_4^\dagger)^T \left(-\frac{1}{2} G_2^T G_2 + \Gamma \right) + (F_4^\perp)^T \Pi \quad (20)$$

を得る. ここに, $F_4^\dagger = (F_4^T F_4)^{-1} F_4^T = [0 \quad I_\nu]$ であり, $F_4^\perp = [I_q \quad 0] \in \mathbf{R}^{q \times (\nu+q)}$ は F_4 の左零化因子である. F_3 と F_4 の定義によると $F_4^\dagger F_3 = 0$ を得る. また, $\Gamma \in \mathbf{R}^{\nu \times \nu}$ は任意の歪対称行列であり, $\Pi \in \mathbf{R}^{q \times \nu}$ は任意の定数行列である. (20) 式を (18) 式に代入し, $F_4^\dagger F_3 = 0$ に注意して X_3 について解くと

$$X_3 = (F_4^\dagger)^T (-G_2^T G_1 - \Pi^T F_4^\perp F_3) + (F_4^\perp)^T \Theta \quad (21)$$

を得る. ここに, $\Theta \in \mathbf{R}^{q \times r}$ は任意の定数行列である. よって, (17) 式より,

$$F_1^T X_1 + X_1 F_1 + G_1^T G_1 + F_3^T (F_4^\dagger)^T \Theta + \Theta^T F_4^\perp F_3 = 0 \quad (22)$$

を得る. ここで, F_1 は安定行列であるから,

$$X_1 = X_1^T = \int_0^\infty e^{F_1^T t} Q(\Theta) e^{F_1 t} dt \quad (23)$$

$$Q(\Theta) = G_1^T G_1 + F_3^T (F_4^\dagger)^T \Theta + \Theta^T F_4^\perp F_3 \quad (24)$$

を得る. 以上により, $\Sigma(E, F)$ が内部安定であるならば, LME(7) の解 X が存在して, (14), (16) 式および (20)~(24) 式で与えられる. とくに, Θ は任意であるから $\Theta = 0$ とおくことにより $Q(\Theta) \geq 0$, すなわち $X_1 \geq 0$ となり,

$$E^T X = V^{-T} \begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^{-1} \geq 0 \quad (25)$$

が成り立つ.

十分性: ある $\lambda \in \mathbf{C}$, $\text{Re}[\lambda] \geq 0$ とある非零ベクトル $v \in \mathbf{C}^n$ が存在して, $(F - \lambda E)v = 0$ が成り立つと仮定する. このとき, (7) 式より,

$$\begin{aligned} v^H (F^T X + X^T F + G^T G) v \\ = 2\text{Re}[\lambda] v^H E^T X v + v^H G^T G v = 0 \end{aligned}$$

を得る. $E^T X \geq 0$ かつ $\text{Re}[\lambda] \geq 0$ であるから, $Gv = 0$ を得る. しかし, これは (8) 式に矛盾するので, すべての $\text{Re}[s] \geq 0$ なる $s \in \mathbf{C}$ に対して $\text{rank}(F - sE) = n$ を得る.

つぎに, $\ker E \cap F^{-1} \text{im } E \neq \{0\}$ と仮定すると, ある非零ベクトル $v \in \mathbf{C}^n$ と $w \in \mathbf{C}^n$ が存在して,

$$Ev = 0, \quad Ew = Fv \quad (26)$$

が成り立つ. このとき, (7) 式より

$$v^H (F^T X + X^T F + G^T G) v = v^H G^T G v = 0$$

となる. よって,

$$v \in \ker E \cap F^{-1} \text{im } E \cap \ker G$$

を得るが, これは (9) 式に矛盾する. したがって, $\ker E \cap F^{-1} \text{im } E = \{0\}$ が成り立つ.

以上, 補題 1(iii) より十分性が示された. $\square$

上の証明からわかるように, LME (7) のすべての解 X は, 自由パラメータ Γ, Π および Θ によってパラメトライズされている. このとき, システムが内部安定であっても Θ の選び方によっては $E^T X \geq 0$ が成立するとは限らないことに注意されたい (CLMI による安定条件では数値例が文献 4) に示されている). つぎの命題は, E と F が正方行列である場合は $E^T X$ が常に半正定値であることを保証している.

[命題] 行列 E, F に対して $m = n$ と仮定する. このとき, $\Sigma(E, F)$ が内部安定であるならば, LME (7) の解が存在し, 任意の解 X に対して $E^T X$ は一意かつ半正定値である. $\diamond$

(証明) 解 X の存在は定理 1 より明らかである. ここで, E, F は正方であるから, (2) 式の Kronecker 標準形の中に (K, L) のブロックは存在しない. したがって, (13) 式において

$$F_1 = A \text{ (安定行列)}, \quad F_3 = 0, \quad F_4 = I, \quad F_4^\perp = 0$$

となる. このとき, Π と Θ の値に関わらず, (20)~(24) 式より

$$X_1 = \int_0^\infty e^{A^T t} G_1^T G_1 e^{At} dt$$

$$X_3 = -G_2^T G_1$$

$$X_4 = -\frac{1}{2} G_2^T G_2 + \Gamma$$

を得る. よって, (25) 式より $E^T X$ は一意かつ半正定値である. $\square$

つぎに, LME(7) の解に対して (23) 式の X_1 が正定値になるための条件を与える.

[系 1] 行列 G はつぎの条件を満足すると仮定する.

$$\text{rank} \begin{bmatrix} F - sE \\ G \end{bmatrix} = n, \quad \forall s \in \mathbf{C} \quad (27)$$

$$\ker E \cap F^{-1} \text{im } E \cap \ker G = \{0\} \quad (28)$$

システム $\Sigma(E, F)$ が内部安定であるための必要十分条件は, LME(7) が $X_1 = V_1^T E^T X V_1 > 0$ なる解 X をもつことである. ここに, (12) 式の V を

$$V = \begin{bmatrix} V_1 & V_2 \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{n \times (r+(n-r))} \quad (29)$$

と分割した. $\diamond$

(注意) 定理 1 の指数可検出性の条件 (8) に対して, (27) 式の仮定はシステムの指数可観測性の条件となっている.

(証明) 定理 1 より, $\Sigma(E, F)$ の内部安定性と LME (7) の可解性とは同値であり, 解 X は (14), (16) 式および (20)~(24) 式で与えられ, $X_1 = V_1^T E^T X V_1$ が成り立つ. 適当な Θ を選ぶことにより (23) 式の X_1 が正定値になることを示す. (13), (15) 式において,

$$F_3 = \begin{bmatrix} 0 & \tilde{C} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{31} \\ 0 \end{bmatrix}$$

とおくと, $F_4^\perp F_3 = F_{31}$ であり, (27) 式の仮定の下で $\left(\begin{bmatrix} F_{31} \\ G_1 \end{bmatrix}, F_1 \right)$ は可観測対である. さらに, (22) 式において $\Theta = F_{31}$ とすることにより,

$$F_1^T X_1 + X_1 F_1 + \begin{bmatrix} F_{31} \\ G_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} F_{31} \\ G_1 \end{bmatrix} = 0$$

を得る. よって, 可観測性より X_1 はこの Lyapunov 方程式の唯一正定値解である. $\square$

[補題 2] 与えられた定数行列 E に対して, $E^T X = X^T E \geq 0$ を満たす行列 X が存在するとする. このとき, ある半正定値行列 P が存在して $E^T X = E^T P E \geq 0$ が成り立つ. さらに, (12), (14) 式のように E と X を分割したとき $X_1 > 0$ ならばそのような P のうち正定値のものが存在する. $\diamond$

(証明) (12), (14) 式のように E, X を分解するとき, $X_1 = X_1^T \geq 0, X_2 = 0$ であり, かつ

$$E^T X = V^{-T} \begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^{-1}$$

が成り立つ. このとき, 任意の正定数 ε に対して

$$P = U^T \begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon I \end{bmatrix} U$$

は $E^T X = E^T P E$ かつ $P \geq 0$ を満足する. さらに, $X_1 > 0$ であるならば, この P は明らかに正定値である. $\square$

上の補題を定理 1 の LME に適用することにより, 文献 12) のディスクリプタシステムの安定条件の一般化として, つぎの定理を得る.

《定理 2》 システム $\Sigma(E, F)$ が内部安定であるための必要十分条件は, つぎの LME が $P = P^T \geq 0$ なる解 (P, S) をもつことである.

$$F^T (PE + WS) + (PE + WS)^T F + G^T G = 0 \quad (30)$$

ここに, G は条件 (8), (9) 式を満足する定数行列であり, W は $\text{im} W = \ker E^T$ なる列フルランクな定数行列である. $\diamond$

(証明) 定理 1 より, $\Sigma(E, F)$ が安定であるための必要十分条件は, LME (7) 式が $E^T X \geq 0$ なる解 X をもつことである.

そのような解 X が存在するとき, 補題 2 より $E^T X = E^T P E$ なる半正定値行列 P が存在する. このとき, $X - PE \in \ker E^T$ であるから, $X - PE = WS$ なる行列 S が存在する. したがって, $X = PE + WS$ を (7) 式に代入することにより, (P, S) が (30) 式を満たすことがわかる.

逆に, $(P, S), P \geq 0$ が (30) 式の解であるとき, $X := PE + WS$ は $E^T X = X^T E = E^T P E \geq 0$ を満たすので, (7) 式の解である.

よって, (7) 式の可解性と (30) 式の可解性は等価であり, 定理 2 が証明された. $\square$

定理 1 から系 1 を得たのと同様に, 定理 2 に対してつぎの系が成り立つ.

[系 2] システム $\Sigma(E, F)$ に対して, G は条件 (27), (28) を満足する定数行列であり, W は $\text{im} W = \ker E^T$ なる列フルランクな定数行列であるとする. このとき $\Sigma(E, F)$ が内部安定であるための必要十分条件は, LME (30) が $P = P^T > 0$ なる解 (P, S) をもつことである. $\diamond$

ここで, システム変数ベクトル ξ の軌道がインパルスを持たないとき, ベクトル $E\xi(t)$ は $\xi(t)$ の動的な要素を表わしており, 状態変数と同等の役割を果たす. また, LME (7) 式の解 X および (30) 式の解 (P, S) (ただし $X = PE + WS$ となるように解を選ぶ) に対して $V(\xi) := \xi^T E^T X \xi = \xi^T E^T P E \xi \geq 0$ とおけば, (1) 式の解軌道に沿った $V(\xi)$ の時間微分は

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(\xi(t)) &= \dot{\xi}^T(t) E^T X \xi(t) + \xi^T(t) E^T X \dot{\xi}(t) \\ &= \xi^T(t) (F^T X + X^T F) \xi(t) \\ &= -\xi^T(t) G^T G \xi(t) \leq 0 \end{aligned}$$

を満足する. したがって, $V(\xi)$ はシステム $\Sigma(E, F)$ の Lyapunov 関数である.

4. 線形行列不等式による安定条件

条件 (27), (28) は任意の列フルランクな定数行列 G に対して成り立つので, 系 1 において G を列フルランクに選ぶことにより, 増淵・示村⁴⁾の LMI 安定条件を得る.

《定理 3》⁴⁾ システム $\Sigma(E, F)$ が内部安定であるための必要十分条件は, つぎの CLMI が解 X をもつことである.

$$E^T X = X^T E \geq 0 \quad (31a)$$

$$F^T X + X^T F < 0 \quad (31b)$$

また, (31) 式の解 X は $V_1^T E^T X V_1 > 0$ を満たす. $\diamond$

同様に, 系 2 において G を列フルランクにとることによりつぎの定理が成り立つ. これは, 上里・池田¹³⁾の LMI 安定条件の一般化である.

《定理 4》 システム $\Sigma(E, F)$ が内部安定であるための必要十分条件は, つぎの LMI が解 (P, S) をもつことである.

$$F^T (PE + WS) + (PE + WS)^T F < 0, P = P^T > 0 \quad (32)$$

ここに, W は定理 2 で定義された定数行列である. $\diamond$

5. 線形 2 次最適制御系の安定解析

LME に基づく安定条件の有用性を示すために, 線形 2 次 (LQ) 最適制御系の安定解析を行なう.

インプリシットシステム

$$E\dot{\xi}(t) = F\xi(t), E, F \in \mathbf{R}^{m \times n} \quad (33)$$

を任意の初期条件 $\xi(0-) = \xi_0$ に対して内部安定化し, かつ 2 次形式評価関数

$$J = \int_{0-}^{\infty} \xi^T(t) G^T G \xi(t) dt, G \in \mathbf{R}^{l \times n} \quad (34)$$

を最小にするコントローラを設計する問題を考える. この問

題において、システム変数ベクトル $\xi(t) \in \mathbf{R}^n$ のすべての要素は制御に利用可能であり、以下の条件が成り立つと仮定する。

$$(A1) \text{ rank}(F - sE) = m, \forall s \in \mathbf{C}$$

$$(A2) \text{ im} E + F \ker E = \mathbf{R}^m$$

$$(A3) \text{ rank} \begin{bmatrix} F - sE \\ G \end{bmatrix} = n, \forall s \in \mathbf{C} \text{ s.t. } \text{Re}[s] \geq 0$$

$$(A4) \ker E \cap F^{-1} \text{im} E \cap \ker G = \{0\}$$

(A1),(A2) はそれぞれ指数可制御性およびインパルス可制御性⁶⁾に対応しており、(A3),(A4) は指数可検出性とインパルス可観測性の条件である。

つぎの CLMI の解 X の集合を $\mathcal{X}$ と定義する。

$$E^T X = X^T E \quad (35a)$$

$$F^T X + X^T F + G^T G \geq 0 \quad (35b)$$

このとき、LQ 最適制御問題の解はつぎの定理で与えられる⁷⁾。

《定理 5》⁷⁾ 仮定 (A1)~(A4) の下で、LQ 最適制御問題における評価関数 J の最適値 J^* は

$$J^* = \xi_0^T E^T X^+ \xi_0 \quad (36)$$

で与えられる。ただし、 $X^+ \in \mathcal{X}$ は CLMI (35) の解のうち $E^T X^+ \geq E^T X \forall X \in \mathcal{X}$ を満足する解である。さらに、

$$F^T X^+ + X^{+T} F + G^T G = H^T H \quad (37)$$

なる行列 H を用いて、最適コントローラは

$$H\xi(t) = 0 \quad (38)$$

で与えられる。◇

(注意) (38) 式のコントローラは、システム変数 ξ の陰形式の代数的制約条件で表わされており、変数間に入出力の区別を与えていない。これは、コントローラの実装方法について何の制約も課していないことを意味する。すなわち、通常のように ξ の変数間に適当な入出力関係を付与することにより、状態フィードバックの LQ 最適レギュレータを構成することも可能であるが、より広い意味で“制御”を捉えて、プラントの物理パラメータや機構を変更することにより所望の制御性能を実現させることもコントローラの実装方法の一つと考えることができる。このことは、ビヘイビア (behavior)¹⁵⁾ に基づく制御の考え方と密接に関係している。

LQ 最適制御問題の解は CLMI(35) の解 X^+ を用いて与えられているが、この CLMI は 4 章の CLMI 条件 (31) とは不等号の向きが異なっている。筆者の知る限りでは、後者の CLMI 安定条件に基づく LQ 最適制御問題の解はまだ報告されていない。

Takaba⁷⁾ は、この LQ 最適制御系の安定性を状態空間表現と LQ 最適レギュレータ理論を用いて証明した。ここでは、状態空間表現を経由せずに直接的な証明を与える。

(33),(38) 式より LQ 最適制御系は

$$\begin{bmatrix} E \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\xi}(t) = \begin{bmatrix} F \\ H \end{bmatrix} \xi(t), \xi(0-) = \xi_0 \quad (39)$$

と表わされる。ここで、

$$\hat{E} = \begin{bmatrix} E \\ 0 \end{bmatrix}, \hat{F} = \begin{bmatrix} F \\ H \end{bmatrix}$$

とおくと、仮定 (A3),(A4) より

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \hat{F} - s\hat{E} \\ G \end{bmatrix} = n \quad \forall s \in \mathbf{C} \text{ s.t. } \text{Re}[s] \geq 0$$

$$\ker \hat{E} \cap \hat{F}^{-1} \text{im} \hat{E} \cap \ker G = \{0\}$$

を得る。また、 $X^+ \in \mathcal{X}$ と (37) 式より、

$$\hat{E}^T \hat{X} = \hat{X}^T \hat{E}$$

$$\hat{F}^T \hat{X} + \hat{X}^T \hat{F} + G^T G = 0$$

が成り立つ。ただし、

$$\hat{X} = \begin{bmatrix} X^+ \\ -\frac{1}{2}H \end{bmatrix}$$

とした。さらに、評価関数 J の定義から明らかに $J^* \geq 0, \forall \xi_0 \in \mathbf{R}^n$ であるから、(36) 式より $\hat{E}^T \hat{X} = E^T X^+ \geq 0$ である。したがって、定理 1 より、(39) 式の制御系は内部安定である。

LQ 最適制御系において最適コントローラの係数行列 H は (37) 式の‘方程式’によって与えられている。このため、CLMI または LMI に基づく安定条件を適用して制御系の内部安定性を証明することは困難であり、定理 1 を用いた上の証明は LME 安定条件の有用性を示しているといえる。

6. おわりに

本論文では、インプリシットシステムに対し、指数可検出性とインパルス可観測性の下で、LME による内部安定条件を導出した。提案する安定条件はディスクリプタシステムに対する LME 安定条件^{8),9),12)}を一般化したものであり、これらの LME 条件から容易に CLMI および LMI による安定条件が導かれることを示した。さらに、第 5 章の LQ 最適制御系の安定解析で示したように、提案する LME 安定条件はインプリシットシステムの解析・制御系設計のための基本的かつ有用なツールである。

参考文献

- 1) J.D. Aplevich: *Implicit Linear Systems*, Springer-Verlag (1991)
- 2) M. Kuijper: *First-order Representations of Linear Systems*, Birkhäuser (1994)
- 3) 汐月哲夫: Implicit System Model への招待, 計測と制御, **36**-7, 496/502 (1997)
- 4) 増淵, 示村: インパルスを考慮したインプリシットシステムの安定解析, 計測自動制御学会論文集, **35**-1, 66/70 (1999)
- 5) I. Masubuchi: Stability and stabilization of implicit systems via interconnection, *Proc. of IEEE 39th Conf. Decision and Contr.*, 3636/3641 (2000)

- 6) A.H.W. Geerts and J.M. Schumacher: Impulsive-smooth behavior in multimode systems Part II: Minimality and Equivalence, *Automatica*, **32-6**, 819/832 (1996)
- 7) K. Takaba: Dissipativity and LQ optimal control of linear implicit systems, *Trans. Soc. Inst. Contr. Eng.*, **37-6**, 533/540 (2001)
- 8) K. Takaba, N. Morihira and T. Katayama: A generalized Lyapunov theorem for descriptor system, *Syst. & Contr. Lett.*, **24-1**, 49/51 (1995)
- 9) 片山 徹: 線形システムの最適制御 - デスクリプタシステム入門, 近代科学社 (1999)
- 10) 増淵, 小原, 須田: 状態フィードバックによるデスクリプタシステムのロバスト安定化, 計測自動制御学会論文集, **30-12**, 1553/1555 (1994)
- 11) I. Masubuchi, Y. Kamitane, A. Ohara and N. Suda: H_∞ control for descriptor systems: A matrix inequalities approach, *Automatica*, **33-4**, 669/673 (1997)
- 12) Woon, 池田, 上里: デスクリプタシステムに対する最適レギュレータの新たな計算法, 第 27 回 制御理論シンポジウム資料, 185/190 (1998)
- 13) 上里, 池田: デスクリプタシステムに対する等式制約を含まない LMI 安定条件とそのロバスト安定化への応用, 計測自動制御学会論文集, **34-12**, 1854/1860 (1998)
- 14) F. R. Gantmacher: *The Theory of Matrices*, Chelsea Publishing (1959)
- 15) J. C. Willems: On interconnections, control and feedback, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **AC-42-3**, 326/339 (1997)

[著 者 紹 介]

鷹 羽 淨 嗣 (正会員)

1989 年, 京都大学 工学部 数理工学科卒業。1991 年, 同大学 大学院 修士課程 応用システム科学専攻修了。同年, 同大学 工学部 数理工学科助手。1998 年, 同大学 大学院 情報学研究科 数理工学専攻 助教授, 現在に至る。博士 (工学)。ロバスト制御, 最適制御の研究に従事。システム制御情報学会および IEEE の各会員。

市 原 豊

2001 年, 京都大学 工学部 情報学科卒業。同年, 同大学 大学院 情報学研究科 数理工学専攻 修士課程 入学, 現在に至る。インプリシットシステムの研究に従事。

片 山 徹 (正会員)

1969 年 京都大学 大学院 工学研究科 博士課程 数理工学専攻修了。1970 年 京都大学 工学部 数理工学科 助教授, 1984 年 愛媛大学 工学部 教授を経て, 1986 年 京都大学 工学部 (現在, 大学院 情報学研究科) 教授。確率システムの推定・同定, 制御系の設計などの研究に従事。工学博士。システム制御情報学会, 応用数理学会, IEEE の各会員。