Backstepping アプローチによる高次 Chained form の制御†

南 澤 謹*・美 多 勉**

High Order Nonholonomic Systems Control by Backstepping Approach†

Taek-Kun NAM* and Tsutomu MITA**

In this paper, we proposed feedback controller for the stabilization of nonholonomic systems in high order chained form by integrator backstepping method. The proposed controller yields exponential convergence of the states to the origin. The control strategy is applied to the posture control of an underactuated manipulator to verify the effectiveness of the control algorithm.

Key Words: backstepping control, nonholonomic system, underactuated manipulator

1. はじめに

ノンホロノミック系とは積分不可能な速度,あるいは,加速度拘束条件から導かれるシステムであり,制御入力の数より多い一般化座標を持つシステムとなる.また,対称アファイン系で表わされるノンホロノミック系は時不変の連続フィードバック制御では安定化できないことが知られている¹⁾.

ノンホロノミック系の制御に関する従来の研究をみると,2入力の対称アファイン系で次数が3,4次のものはほとんどの場合,Chained form という形式に変換でき,不変マニホールドを使う制御²⁾,制御対象を前置制御によって不連続化した後,時不変連続フィードバックによって安定化するもの¹⁵⁾,マルチレートディジタル制御によるもの⁴⁾,時変フィードバックによるもの^{5),6)}などがある.ただし,時変フィードバックによるものは振動的であり,さらに一般に収束も遅いという欠点がある.また,同様な観点から時間軸状態制御法が提案されている⁷⁾.そのほかにTayebiら^{8),9)}はBacksteppingを用いたChained formの安定化制御を行なっている.

一方,加速度拘束を受けるノンホロノミックシステムとして劣駆動マニピュレータが議論されている¹⁷⁾.荒井は3リンク劣駆動マニピュレータにおいて撃心に注目した安定化制御則を導いている²⁰⁾.井村²¹⁾らも,3リンクの劣駆動マニピュレータにおいて,2階のChained formへの変換を行ない,指数関数的に収束する目標軌道に追従させる安定化制御

則を提案している.しかし,その目標軌道とは非ホロノミックな拘束を持つものであり,実際の設計は簡単ではない.また,本論文で扱っている一般系の高次Chained system (n状態2入力)に対する制御問題は触れていない.

Astolfi¹⁶⁾は1Generatorの高次Chained Formを示し,その制御に文献¹⁵⁾の結果を適用し,ある種の劣駆動マニピュレータの制御問題を扱っている.一方で著者らはすでに同じ系に対してマルチレートディジタル制御を応用した制御法を提案している²⁴⁾.そこでは,マルチレートディジタル制御を多重Chained form,および,高次Chained formの制御へ統一的に拡張しており,特に高次のChained formの制御には各入力での制御周期の均等化のため,サンプル周期を可変とする可変周期有限整定制御とその実施方法が提案されている.しかし,可変周期有限整定制御は基本的にフィードフォワード的な制御概念であり,フィードバック制御とは言い難い.

そこで本論文では,高次のChained formに対するフィードバック制御の一つとしてBacksteppingによる制御法を開発した.開発した制御則を用いて高次のChained formの安定化制御^(注1)を行ない,さらに3リンク劣駆動マニピュレータの姿勢制御に適用し,制御則の有効性を検証した.

2. Backstepping 制御

まず,Backstepping 制御法の背景を紹介しておく^{10),11)}.制御対象は,つぎのような非線形システムを考える.

$$\dot{x}_1 = f(x_1) + g(x_1)x_2 \quad (1a)$$

(注1) ここで提案する制御則は全域で状態の原点への安定性が保証される漸近安定ではなく一種の不連続な制御則,すなわち,Fig.2のような制御上の特異点をもつ漸近収束制御則である.しかし,その特異点を回避するためのフィードフォワード制御則との併用によって全域での状態の原点への収束性が保証される.

† 第1回制御部門大会で発表(2001・5)

* 韓国電気研究院 韓国昌原市聖主洞 28-1

** 東京工業大学工学部 東京都目黒区大岡山 2-12-1

* Mechatronics group, Korea Electrotechnology Research Institute, Korea

** Faculty of Engineering, Tokyo Institute of Technology, Meguro-ku, Tokyo

(Received July 4, 2001)

(Revised March 4, 2002)

$$\dot{x}_2 = u \quad (1b)$$

ただし, $x_1, x_2 \in R$ は状態, u は制御入力であり, 関数 f, g は滑らかなものである. 以下, このシステムを安定化する ($x_1 = 0, x_2 = 0$) 状態フィードバック制御則を Backstepping 手法を用いて設計する. まず, (1a) 式, (1b) 式に対して以下の二つの仮定が成り立つとする.

[仮定 1] (1a) 式を安定化するフィードバック制御則 $x_2 = \phi(x_1), \phi(0) = 0$ が存在する. 以下, x_2 を仮想入力, $\phi(x_1)$ を安定化関数と呼ぶ.

[仮定 2] $\frac{\partial V_1}{\partial x_1} [f(x_1) + g(x_1)\phi(x_1)] \leq -W(x_1)$ を満たすリアプノフ関数 $V_1(x_1)$ が存在する. ここで, $W(x_1) > 0$ とする.

制御器の設計手順としては, まず, 仮想入力 x_2 と安定化関数 ϕ との誤差を

$$\xi = x_2 - \phi(x_1) \quad (2)$$

と定義し, リアプノフ関数の候補として

$$V_2 = V_1(x_1) + \frac{1}{2}\xi^2 \quad (3)$$

を選ぶ. その時間微分と (2) 式からの $x_2 = \xi + \phi$ より

$$\dot{V}_2 = \frac{\partial V_1}{\partial x_1} [f(x_1) + g(x_1)\phi] + \xi(\dot{x}_2 - \dot{\phi} + \frac{\partial V_1}{\partial x_1} g) \quad (4)$$

が得られる. つぎに, 制御入力 ($\dot{x}_2 = u$) を

$$u = \dot{\phi} - \frac{\partial V_1}{\partial x_1} g - k\xi, \quad k > 0 \quad (5)$$

と選ぶと, (4) 式と仮定 1 から

$$\dot{V}_2 \leq -W(x_1) - k\xi^2 \leq 0 \quad (6)$$

が成り立ち, $x_1, \xi \rightarrow 0, (t \rightarrow \infty)$ が保証される. すると, (2) 式から $x_2 = 0$ となり, すべての状態は安定化される.

3. 高次の Chained form の制御

本章では, 高次 Chained Form の安定化制御問題を考えていく. 高次の Chained form は

$$\begin{aligned} y_1^{(p_1)} &= u_1 \\ y_2^{(p_2)} &= u_2 \\ y_3^{(p_3)} &= y_2 u_1 \\ y_4^{(p_4)} &= y_3 u_1 \\ &\vdots \\ y_n^{(p_n)} &= y_{n-1} u_1 \end{aligned} \quad (7)$$

で表わされるシステムである. 本論文では, $p_i = 2 (\forall i)$ に対する一般系 ($n \geq 3$) の場合を扱う.

(7) 式に対して

$$z = (y_1, \dot{y}_1, y_n, \dot{y}_n, y_{n-1}, \dot{y}_{n-1}, \dots, y_2, \dot{y}_2) \quad (8)$$

の座標変換を施すと

$$\begin{aligned} \Sigma_1: \quad \dot{z}_1 &= z_2, \quad \Sigma_2: \quad \dot{z}_3 = z_4 \\ \dot{z}_2 &= u_1 & \dot{z}_4 &= z_5 u_1 \\ & & \vdots & \\ & & \dot{z}_{2i-3} &= z_{2i-2} \\ & & \dot{z}_{2i-2} &= z_{2i-1} u_1 \\ & & \vdots & \\ & & \dot{z}_{2n} &= u_2 \end{aligned} \quad (9)$$

のシステムが得られる. ただし, $i = (3, \dots, n+1)$ である. 制御問題は, Σ_1, Σ_2 で表わされるシステムの原点への漸近収束である.

まず,

$$u_1 = -(k_1 z_1 + k_2 z_2) := -\eta \quad (10)$$

で極を指定し, Σ_1 を安定化する. ただし, 以下で提案する制御方法においては, η が零になると特異となるので, 最初に η が零にならない Σ_1 の初期値のクラスと条件を与える. そこで, Σ_1 の極を

$$\alpha > \beta > 0 \quad (11)$$

を満たす 2 つの実極 $-\alpha, -\beta$ に指定する. このとき

$$k_1 = \alpha\beta, \quad k_2 = \alpha + \beta \quad (12)$$

となり閉ループ系の応答を計算すると

$$\eta(t) = C_\alpha e^{-\alpha t} - C_\beta e^{-\beta t} \quad (13)$$

となる. ただし,

$$\begin{aligned} C_\alpha &= \frac{(k_1 z_1(0) + k_2 z_2(0))\alpha - k_2 z_2(0)}{\alpha - \beta}, \\ C_\beta &= \frac{(k_1 z_1(0) + k_2 z_2(0))\beta - k_2 z_2(0)}{\alpha - \beta} \end{aligned} \quad (14)$$

すると, $\eta = 0$ から

$$0 \leq e^{-(\alpha-\beta)t} = \frac{C_\beta}{C_\alpha} \leq 1 \quad (15)$$

の不等式を得る ($t \rightarrow \infty$ まで考慮に入れている). これを解析して, $\eta = 0$ となる初期値を R^2 から除外すると, $z_1(0), z_2(0)$ の許容域は Fig. 2 のように

$$\begin{aligned} k_1 z_1(0) + k_2 z_2(0) &= 0, \\ k_1 z_1(0) + k_1(1 - 1/\beta) z_2(0) &= 0 \end{aligned} \quad (16)$$

を境界とする開領域となる. 証明は付録.A 参照. また, このとき $\eta(t)$ は

$$|\eta(t)| > M e^{-\alpha t} \quad (17)$$

として下から押さえられる. ただし, M は

$$M = \min(|C_\alpha|, |C_\beta - C_\alpha|) \quad (18)$$

である. 証明は付録.B 参照. また, 次章で z_2 を用いるのでその状態の挙動を求めると

$$z_2(t) = C_\gamma e^{-\alpha t} - C_\delta e^{-\beta t} \quad (19)$$

となる. ただし,

$$C_\gamma = \frac{k_1 z_1(0) + \alpha z_2(0)}{\alpha - \beta}, \quad C_\delta = \frac{k_1 z_1(0) + \beta z_2(0)}{\alpha - \beta} \quad (20)$$

つぎに、 Σ_2 の原点への漸近収束を考える。(10)式の制御入力を Σ_2 へ施すと

$$\begin{aligned}\Sigma_2 : \dot{z}_3 &= z_4 \\ \dot{z}_4 &= -\eta z_5 \\ &\vdots \\ \dot{z}_{2i-3} &= z_{2i-2} \\ \dot{z}_{2i-2} &= -\eta z_{2i-1} \\ &\vdots \\ \dot{z}_{2n-1} &= z_{2n} \\ \dot{z}_{2n} &= u_2\end{aligned}\quad (21)$$

が得られる。ただし、 $i = (3, \dots, n+1)$ である。以下では、(21)式のシステムに対して Backstepping 手法を適用し、原点への収束制御を行なう。

その設計の過程で使う安定化関数と誤差関数をつぎのように定める。

【定義 1】 安定化関数 ϕ_i を

(a) i が奇数の場合 ($3 \leq i \leq 2n-3$)

$$\begin{aligned}\phi_1 &= -k_3 z_3, \\ \phi_i &= \dot{\phi}_{i-1} + \eta \xi_{i-2} - k_{i+2} \xi_{i-1}\end{aligned}$$

(b) i が偶数の場合 ($4 \leq i \leq 2n-4$)

$$\begin{aligned}\phi_2 &= -\frac{\dot{\phi}_1}{\eta} + \frac{z_3}{\eta} + k_4 \frac{\xi_1}{\eta}, \\ \phi_i &= -\frac{\dot{\phi}_{i-1}}{\eta} + \frac{\xi_{i-2}}{\eta} + k_{i+2} \frac{\xi_{i-1}}{\eta},\end{aligned}$$

誤差関数 ξ_i を

$$\xi_i = z_{i+3} - \phi_i$$

と定義する。ただし、 $i = 1, \dots, 2n-3$ であり、 $k_j > 0, j = 4, 5, \dots, 2n-1$ である。

ここで安定化関数 ϕ_i の分母の η は安定化関数およびその微分を用いて構成される制御則の収束性に関係する。分子の各状態変数より先に η が零になると制御則は発散してしまうので、4章の補題2では安定化関数 ϕ_i の分母の項より分子の項が先に原点へ収束するようにフィードバックゲインを決めている。

制御器の設計手順はつぎのようになる。

Step 1)

リアプノフ関数の候補として

$$V_1 = \frac{1}{2} z_3^2 \quad (22)$$

を選ぶ。その時間微分を求めると $\dot{V}_1 = z_3 z_4$ となる。ここで、仮想入力 $z_4 = \phi_1$ とすると、

$$\dot{V}_1 = -k_3 z_3^2 = -2k_3 V_1 \leq 0 \quad (23)$$

が得られ、 $z_3 \rightarrow 0, (t \rightarrow \infty)$ となる。

Step 2)

つぎに、 z_3 の収束性を保つために、仮想入力 z_4 と ϕ_1 との誤差を

$$\xi_1 = z_4 - \phi_1 \quad (24)$$

とし、リアプノフ関数の候補を $V_2 = V_1 + \frac{1}{2} \xi_1^2$ と選ぶ。その時間微分と(24)式からの $z_4 = \xi_1 + \phi_1$ を用いると

$$\begin{aligned}\dot{V}_2 &= z_3 z_4 + \xi_1 \dot{\xi}_1 \\ &= z_3 \phi_1 + \xi_1 (\dot{z}_4 - \dot{\phi}_1 + z_3)\end{aligned}\quad (25)$$

が得られる。ここで、 $\dot{z}_4 = \dot{\phi}_1 - z_3 - k_4 \xi_1$ とすると

$$\begin{aligned}\dot{V}_2 &= \dot{V}_1 - k_4 \xi_1^2 \\ &= -2k_3 (V_1 + \frac{k_4}{2k_3} \xi_1^2)\end{aligned}$$

が得られる。 $k_4 \geq k_3$ とすると、 $V_2 = V_1 + \frac{1}{2} \xi_1^2$ から

$$\dot{V}_2 \leq -2k_3 V_2 = -k_3 z_3^2 - k_3 \xi_1^2 \leq 0 \quad (26)$$

となり、 $z_3, \xi_1 \rightarrow 0, (t \rightarrow \infty)$ が保証される。

また、(21)式の $\dot{z}_4 = -\eta z_5$ と $\dot{z}_4 = \dot{\phi}_1 - z_3 - k_4 \xi_1$ から仮想入力 $z_5 = -\frac{\dot{\phi}_1}{\eta} + \frac{z_3}{\eta} + k_4 \frac{\xi_1}{\eta}$ が得られる。前ステップと同様、仮想入力 z_5 と安定化関数 ϕ_2 との誤差を $\xi_2 = z_5 - \phi_2$ とする。

Step i) ($i = 3, \dots, 2n-3$ のとき)

リアプノフ関数の候補として $V_i = V_{i-1} + \frac{1}{2} \xi_{i-1}^2$ と選ぶ。

(a) i が奇数のとき ($3 \leq i \leq 2n-3$) の時間微分 $\dot{V}_i$ は

$$\dot{V}_i = \dot{V}_{i-1} + \xi_{i-1} (\dot{z}_{i+2} - \dot{\phi}_{i-1} - \eta \xi_{i-2}) \quad (27)$$

となり、 $\dot{z}_{i+2} = \dot{\phi}_{i-1} + \eta \xi_{i-2} - k_{i+2} \xi_{i-1}$ とする。

(b) i が偶数のとき ($4 \leq i \leq 2n-4$) の時間微分 $\dot{V}_i$ は、

$$\dot{V}_i = \dot{V}_{i-1} + \xi_{i-1} (\dot{z}_{i+2} - \dot{\phi}_{i-1} - \xi_{i-2}) \quad (28)$$

となり、 $\dot{z}_{i+2} = \dot{\phi}_{i-1} + \xi_{i-2} - k_{i+2} \xi_{i-1}$ とする。

すると、 $\dot{V}_i = \dot{V}_{i-1} - k_{i+2} \xi_{i-1}^2$ が成り立ち、(26)式と同様に $\dot{V}_i \leq -2k_3 (V_{i-1} + \frac{k_{i+2}}{2k_3} \xi_{i-1}^2)$ が得られ、 $k_{i+2} \geq k_3$ と選ぶと、

$$\dot{V}_i \leq -2k_3 V_i = -k_3 z_3^2 - k_3 \sum_{j=1}^{i-1} \xi_j^2 \leq 0 \quad (29)$$

となり、 $z_3, \xi_1, \dots, \xi_{2n-4} \rightarrow 0, (t \rightarrow \infty)$ が保証される。

Step i $i = 2n-2$ のとき)

$V_i = V_{i-1} + \frac{1}{2} \xi_{i-1}^2$ と選ぶ。 V_i の時間微分は

$$\dot{V}_i = \dot{V}_{i-1} + \xi_{i-1} (\dot{z}_{2n} - \dot{\phi}_{i-1} + \xi_{i-2}) \quad (30)$$

となる。ここで、 $\dot{z}_{2n} = u_2$ であるから

$$u_2 = \dot{\phi}_{i-1} - \xi_{i-2} - k_{i+2} \xi_{i-1} \quad (31)$$

とすると、 $\dot{V}_i = \dot{V}_{i-1} - k_{i+2} \xi_{i-1}^2$ となる。以前のステップと同様に、 $k_{i+2} \geq k_3$ とすると、

$$\begin{aligned}\dot{V}_i &\leq -2k_3 V_i \\ &\leq -k_3 z_3^2 - k_3 \sum_{j=1}^{i-1} \xi_j^2 \leq 0\end{aligned}\quad (32)$$

が得られ、 $z_3, \xi_1, \dots, \xi_{2n-3} \rightarrow 0, (t \rightarrow \infty)$ が保証される。したがって、定義1の誤差関数の定義 $\xi_i = z_{i+3} - \phi_i$ から $z_{i+3} \rightarrow \phi_i, (i = 1, \dots, 2n-3)$ となる。ここで、 $\phi_i \rightarrow 0$ が保証されれば、 $z_3, \dots, z_{2n} \rightarrow 0$ となり、 Σ_2 のすべての状態は原点に収束する。

4. 安定化関数の収束性

本章では、安定化関数の原点への収束性を調べることにする。まず、安定化関数の収束性に関する議論で用いる補題をあげておく。

[補題 1]

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{z_2}{\eta} \right)^i = \text{const.}, (i = 1, \dots, n)$$

すなわち、 $\left(\frac{z_2}{\eta} \right)^i$ の極限 ($t \rightarrow \infty$) は定数となる。

(証明) (13) 式と (19) 式から

$$\frac{z_2}{\eta} = \frac{e^{-\beta t}(-C_\delta + e^{-(\alpha-\beta)t}C_\gamma)}{e^{-\beta t}(-C_\beta + e^{-(\alpha-\beta)t}C_\alpha)}$$

となり、(11) 式の条件を用いると

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ \frac{z_2}{\eta} \right\} = \frac{C_\delta}{C_\beta}$$

が得られる。同様な計算から $\lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{z_2}{\eta} \right)^i = \text{const.}, i = 2, \dots, n$ が成り立つ。■

つぎに、定義 1 で示した安定化関数 $\phi_i, (i = 1, \dots, 2n-3)$ は

$$\phi_1 = -k_3 z_3 := f_1(z_3) \text{ とし,}$$

$$\phi_2 = -\frac{\phi_1}{\eta} + \frac{z_3}{\eta} + k_4 \frac{\xi_1}{\eta} = -k_3 \frac{z_4}{\eta} + \frac{z_3}{\eta} + k_4 \frac{\xi_1}{\eta}$$

$:= f_2\left(\frac{z_4}{\eta}, \frac{z_3}{\eta}, \frac{\xi_1}{\eta}\right)$ とすると、以下のように計算できる。

$$\phi_1 = f_1(z_3)$$

$$\phi_2 = f_2\left(\frac{z_4}{\eta}, \frac{z_3}{\eta}, \frac{\xi_1}{\eta}\right)$$

$$\phi_3 = f_3\left(z_5, \frac{z_4 z_2}{\eta^2}, \frac{z_4}{\eta}, \frac{z_3 z_2}{\eta^2}, \frac{z_3}{\eta}, \eta \xi_1, \xi_2\right)$$

$$\phi_4 = f\left(\frac{z_6}{\eta}, \frac{z_5 z_2}{\eta^2}, \frac{z_5}{\eta}, \frac{z_4 z_2^2}{\eta^4}, \dots, z_4, \frac{z_3 z_2^2}{\eta^4}, \dots, z_3, \xi_1, \frac{\xi_2}{\eta}, \frac{\xi_3}{\eta}\right)$$

⋮

$$\phi_{2n-4} = f_{2n-4}\left(\frac{z_{2n-2}}{\eta}, \frac{z_{2n-3} z_2}{\eta^2}, \frac{z_{2n-3}}{\eta}, \frac{z_{2n-4} z_2^2}{\eta^4}, \dots, \frac{z_{2n-4}}{\eta}, \dots, \frac{z_5 z_2^{2n-7}}{\eta^{3n-10}}, \dots, \frac{z_5}{\eta}, \frac{z_4 z_2^{2n-6}}{\eta^{3n-8}}, \dots, \frac{z_4}{\eta}, \frac{z_3 z_2^{2n-6}}{\eta^{3n-8}}, \dots, \frac{z_3}{\eta}, \xi_{2n-7}, \frac{\xi_{2n-6}}{\eta}, \frac{\xi_{2n-5}}{\eta}\right)$$

$$\phi_{2n-3} = f_{2n-3}\left(z_{2n-1}, \frac{z_{2n-2} z_2}{\eta^2}, \frac{z_{2n-2}}{\eta}, \frac{z_{2n-3} z_2^2}{\eta^4}, \dots, \frac{z_{2n-3}}{\eta}, \dots, \frac{z_{2n-4} z_2^3}{\eta^5}, \dots, \frac{z_{2n-4}}{\eta}, \dots, \frac{z_5 z_2^{2n-6}}{\eta^{3n-9}}, \dots, \frac{z_5}{\eta}, \frac{z_4 z_2^{2n-5}}{\eta^{3n-7}}, \dots, \frac{z_4}{\eta}, \frac{z_3 z_2^{2n-5}}{\eta^{3n-7}}, \dots, \frac{z_3}{\eta}, \eta \xi_{2n-5}, \xi_{2n-4}\right) \quad (33)$$

ここで、関数 f_i は $f_i(0, \dots, 0) = 0$ を満たすものである。また、 f_i の分子の各状態変数に対して、分母の η の次数が最大となる項に注目して安定化関数を整理すると、

$$\phi_1 = f_1(z_3)$$

$$\phi_2 = f_2\left(\frac{z_4}{\eta}, \frac{z_3}{\eta}\right)$$

$$\phi_3 = f_3\left(z_5, \frac{z_4}{\eta}, \frac{z_2}{\eta}, \frac{z_3}{\eta}, \frac{z_2}{\eta}\right)$$

$$\phi_4 = f_4\left(\frac{z_6}{\eta}, \frac{z_5}{\eta}, \frac{z_2}{\eta}, \frac{z_4}{\eta}, \frac{z_2}{\eta}, \frac{z_3}{\eta}, \frac{z_2}{\eta}\right)$$

⋮

(34)

$$\phi_{2n-5} = f_{2n-5}\left(z_{2n-3}, \frac{z_{2n-4}}{\eta}, \frac{z_2}{\eta}, \frac{z_{2n-5}}{\eta}, \frac{z_2}{\eta}, \dots, \frac{z_4}{\eta^{n-3}}, \frac{z_2^{2n-7}}{\eta^{2n-7}}, \frac{z_3}{\eta^{n-3}}, \frac{z_2^{2n-7}}{\eta^{2n-7}}\right)$$

$$\phi_{2n-4} = f_{2n-4}\left(\frac{z_{2n-2}}{\eta}, \frac{z_{2n-3}}{\eta}, \frac{z_2}{\eta}, \frac{z_{2n-4}}{\eta^2}, \frac{z_2^2}{\eta^2}, \dots, \frac{z_5}{\eta^{n-2}}, \frac{z_2^{2n-7}}{\eta^{2n-7}}, \frac{z_4}{\eta^{n-2}}, \frac{z_2^{2n-6}}{\eta^{2n-6}}, \frac{z_3}{\eta^{n-2}}, \frac{z_2^{2n-6}}{\eta^{2n-6}}\right)$$

$$\phi_{2n-3} = f_{2n-3}\left(z_{2n-1}, \frac{z_{2n-2}}{\eta}, \frac{z_2}{\eta}, \frac{z_{2n-3}}{\eta}, \frac{z_2^2}{\eta^2}, \frac{z_{2n-4}}{\eta^2}, \frac{z_2^3}{\eta^3}, \dots, \frac{z_5}{\eta^{n-3}}, \frac{z_2^{2n-6}}{\eta^{2n-6}}, \frac{z_4}{\eta^{n-2}}, \frac{z_2^{2n-5}}{\eta^{2n-5}}, \frac{z_3}{\eta^{n-2}}, \frac{z_2^{2n-5}}{\eta^{2n-5}}\right)$$

が得られる(注2)。ここで、(34) 式に補題 1 を適用すると、その収束性は $\left(\frac{z_2}{\eta} \right)^i, (i = 1, 2, \dots, 2n-5)$ の項を除いた状態変数が原点に収束すれば保証できる。

以下補題 2 では、 $\phi_i \rightarrow 0$ とするゲインを決めるが、その収束性を議論するのに必要な事項を述べておく。前節で、仮想入力と安定化関数との誤差 ξ の収束性を保証するために導入したりアプノフ関数の候補、 $V_i = V_{i-1} + \frac{1}{2} \xi_{i-1}^2, (i = 2, \dots, 2n-2)$ から

$$\xi_{i-1}^2 = 2(V_i - V_{i-1}) \quad (35)$$

が得られる。ここで、 $k_3 \leq k_j, (j = 4, 5, \dots, 2n)$ と選ぶと、(29) 式、(32) 式から

$$V_i(t) \leq e^{-2k_3 t} V_i(0), \quad (36)$$

が成り立つ。(35) 式に (36) 式を用いると、 $\xi_{i-1}^2 \leq 2e^{-2k_3 t}(V_i(0) + V_{i-1}(0))$ 、すなわち、

$$(z_{i+2} - \phi_{i-1})^2 \leq 2e^{-2k_3 t}(V_i(0) + V_{i-1}(0)) \quad (37)$$

が得られる。(37) 式から、誤差関数 $\xi_i, (i = 1, 2, \dots, 2n-3)$ は $k_3 \leq k_j, (j = 4, 5, \dots, 2n)$ によって、原点へ漸近収束することがわかる。

以上のことを用いると、安定化関数 ϕ_i の収束性に関するつぎの補題が得られる。

[補題 2] 安定化関数 ϕ_i は領域 $\Omega = \{z \in R^n / \eta(0) \neq 0\}$ 内でゲイン $k_j, (j = 4, \dots, 2n)$,

$$\alpha(n-2) < k_3 \leq k_j \quad (38)$$

によって有界となり、かつ、原点に漸近収束する。また、安定化関数の微分 $\dot{\phi}_i$ も有界、かつ、漸近収束する。

(証明) (34) 式の ϕ_{2n-3} から $\left(\frac{z_2}{\eta} \right)^i$ の各項を除いた状態

$$f_{2n-3}\left(z_{2n-1}, \frac{z_{2n-2}}{\eta}, \frac{z_{2n-3}}{\eta}, \dots, \frac{z_5}{\eta^{n-3}}, \frac{z_4}{\eta^{n-2}}, \frac{z_3}{\eta^{n-2}}\right) \quad (39)$$

を考え、各状態変数の原点への収束性を調べていく。

まず、 $\frac{z_3}{\eta^{n-2}}$ の収束性に関しては、 $i = 1$ を (37) 式に代入すると

$$z_3(t) \leq e^{-k_3 t} |z_3(0)| \quad (40)$$

が得られる。(40) 式の両辺を (17) 式の η^{n-2} で割ることによって

(注2) (33) 式の各 ξ_i に関する項は実際に計算を行なうと、 ξ_i が属する安定化関数 ϕ_i の他の状態変数で表わせる。

$$\frac{z_3}{\eta^{n-2}} \leq e^{-(k_3 - \alpha(n-2))t} \frac{|z_3(0)|}{M^{n-2}} \quad (41)$$

が成り立ち, (41) 式から $k_3 > \alpha(n-2)$ とすると, $\frac{z_3}{\eta^{n-2}} \rightarrow 0$, ($t \rightarrow \infty$) となる.

つぎに, $i = 2$ とし, (37) 式の両辺を $\eta^{2(n-2)}$ で割って, (17) 式を用いると

$$\left(\frac{z_4}{\eta^{n-2}} - \frac{\phi_1}{\eta^{n-2}}\right)^2 \leq 2e^{-2(k_3 - \alpha(n-2))t} \frac{V_2(0) + V_1(0)}{M^{2(n-2)}} \quad (42)$$

となる. ここで, $\phi_1 = -k_3 z_3$ であるので $\frac{\phi_1}{\eta^{n-2}} = -k_3 \frac{z_3}{\eta^{n-2}}$ となるが, 状態の原点への収束性だけを考えると

$$\frac{\phi_1}{\eta^{n-2}} := \left(\frac{z_3}{\eta^{n-2}}\right)$$

となり, これは (34) 式の ϕ_1 を η^{n-2} で割ったものと等価的になる. (41) 式からの $k_3 > \alpha(n-2)$ によって $\frac{\phi_1}{\eta^{n-2}}$ の原点への収束性が保証されるので,

$$\alpha(n-2) < k_3 \leq k_4 \quad (43)$$

とすると, $\frac{z_4}{\eta^{n-2}}, \frac{z_3}{\eta^{n-2}} \rightarrow 0$ となる. ただし, $k_3 \leq k_4$ は (26) 式を満たすための条件である.

つぎに, $i = 3$ とし, $\eta^{2(n-3)}$ で (37) 式の両辺を割ると

$$\left(\frac{z_5}{\eta^{n-3}} - \frac{\phi_2}{\eta^{n-3}}\right)^2 \leq 2e^{-2(k_3 - \alpha(n-3))t} * \quad (44)$$

となる. ただし, * は正の定数である. このとき, $\frac{\phi_2}{\eta^{n-3}}$ は (34) 式の ϕ_2 を η^{n-3} で割った上に $(\frac{z_2}{\eta})^i$ の項を除いて考えると

$$\frac{\phi_2}{\eta^{n-3}} := \left(\frac{z_4}{\eta^{n-2}}, \frac{z_3}{\eta^{n-2}}\right)$$

となり, (41) 式, (42) 式から

$$\alpha(n-2) < k_3 \leq k_4 \quad (45)$$

によって $\frac{\phi_2}{\eta^{n-3}} \rightarrow 0$ となることがわかる. また, $\alpha(n-2) > \alpha(n-3)$ から (44) 式に関しては

$$\left(\frac{z_5}{\eta^{n-3}} - \frac{\phi_2}{\eta^{n-3}}\right)^2 \leq 2e^{-2(k_3 - \alpha(n-2))t} * \quad (46)$$

が成り立ち,

$$\alpha(n-2) < k_3 \leq k_j, j = 4, 5 \quad (47)$$

によって, $\frac{z_5}{\eta^{n-3}}, \frac{z_4}{\eta^{n-2}}, \frac{z_3}{\eta^{n-2}} \rightarrow 0$ となる. ただし, $k_3 \leq k_5$ は (29) 式を満たすための条件であり, (46) 式の * は正の定数である.

$i = 4, \dots, 2n-5$ まで, 同様な解析を行なうと

$$\alpha(n-2) < k_3 \leq k_j, j = i+2 \quad (48)$$

によって

$$\frac{z_{2n-3}}{\eta}, \dots, \frac{z_6}{\eta^{n-4}}, \frac{z_5}{\eta^{n-3}}, \frac{z_4}{\eta^{n-2}}, \frac{z_3}{\eta^{n-2}} \rightarrow 0 \quad (49)$$

が得られる. 最後に, $i = 2n-4$ とし, (37) 式の両辺を η^2 で割って, $\alpha(n-2) \geq \alpha$ を用いると,

$$\left(\frac{z_{2n-2}}{\eta} - \frac{\phi_{2n-5}}{\eta}\right)^2 \leq 2e^{-2(k_3 - \alpha(n-2))t} * \quad (50)$$

が成り立つ. ただし, * は正の定数である. $\frac{\phi_{2n-5}}{\eta}$ は (34) 式と補題 1 との関係から

$$\frac{\phi_{2n-5}}{\eta} := \left(\frac{z_{2n-3}}{\eta}, \dots, \frac{z_6}{\eta^{n-4}}, \frac{z_5}{\eta^{n-3}}, \frac{z_4}{\eta^{n-2}}, \frac{z_3}{\eta^{n-2}}\right)$$

となり, $i = 2n-5$ での (49) 式から原点への収束性が保証される. すると, (50) 式から $\frac{z_{2n-2}}{\eta} \rightarrow 0$, ($t \rightarrow \infty$) が得られる.

以上のことから

$$\alpha(n-2) < k_3 \leq k_j, j = 4, 5, \dots, 2n-2 \quad (51)$$

によって

$$\left(\frac{z_{2n-2}}{\eta}, \frac{z_{2n-3}}{\eta}, \dots, \frac{z_6}{\eta^{n-4}}, \frac{z_5}{\eta^{n-3}}, \frac{z_4}{\eta^{n-2}}, \frac{z_3}{\eta^{n-2}}\right) \rightarrow 0 \quad (52)$$

が得られる. (52) 式は状態変数の原点への収束性の観点から見ると (34) 式の安定化関数 ϕ_{2n-4} の $(\frac{z_2}{\eta})^i$ の項を除いたものとなる. また, $\xi_{2n-4} = z_{2n-1} - \phi_{2n-4}$ の関係から $\xi_{2n-4} \rightarrow 0, \phi_{2n-4} \rightarrow 0$ となるので, $z_{2n-1} \rightarrow 0$ が保証される. ただし, $k_3 \leq k_{2n-1}$ によって $\xi_{2n-4} \rightarrow 0$ が保証される ((29) 式). 以上のことをまとめると,

$$\alpha(n-2) < k_3 \leq k_j, j = 4, 5, \dots, 2n-1 \quad (53)$$

によって (39) 式のすべての状態は原点へ漸近収束する.

ここで, (34) 式の安定化関数 ϕ_i において, 各状態変数を比較すると $(\frac{z_2}{\eta})^i$ を除いたすべての状態変数が ϕ_{2n-3} に存在し, さらに, ϕ_{2n-3} の各状態変数は分母の η の次数が最大のもので構成されていることがわかる. このことは安定化関数 ϕ_{2n-3} を原点へ漸近収束させるゲイン ((53) 式) によってすべての ϕ_i が原点に漸近収束することを意味する.

安定化関数の微分 $\dot{\phi}_i$ は

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_1 &= g_1(z_4) \\ \dot{\phi}_2 &= g_2(z_5, \frac{z_4}{\eta}, \frac{z_3}{\eta}, \frac{z_2}{\eta}) \\ \dot{\phi}_3 &= g_3(z_6, z_5, \frac{z_4}{\eta}, \frac{z_3}{\eta}, \frac{z_2}{\eta}) \\ &\vdots \\ \dot{\phi}_{2n-4} &= g_{2n-4}(z_{2n-1}, \frac{z_{2n-2}}{\eta}, \frac{z_{2n-3}}{\eta}, \frac{z_2^2}{\eta^2}, \frac{z_{2n-4}}{\eta^2}, \frac{z_2^3}{\eta^3}, \\ &\quad \dots, \frac{z_4}{\eta^{n-2}}, \frac{z_2^{2n-5}}{\eta^{2n-5}}, \frac{z_3}{\eta^{n-2}}, \frac{z_2^{2n-5}}{\eta^{2n-5}}) \\ \dot{\phi}_{2n-3} &= g_{2n-3}(z_{2n}, z_{2n-1}, \frac{z_2}{\eta}, \frac{z_{2n-2}}{\eta}, \frac{z_2^2}{\eta^2}, \frac{z_{2n-3}}{\eta^2}, \frac{z_2^3}{\eta^3}, \\ &\quad \frac{z_{2n-4}}{\eta^4}, \dots, \frac{z_4}{\eta^{n-2}}, \frac{z_2^{2n-4}}{\eta^{2n-4}}, \frac{z_3}{\eta^{n-2}}, \frac{z_2^{2n-4}}{\eta^{2n-4}}) \end{aligned}$$

となり, $\dot{\phi}_i$ に対しても ϕ_i と同様な解析ができ, ゲインを $\alpha(n-2) < k_3 \leq k_j, (j = 4, \dots, 2n)$ とすると, $\dot{\phi}_i$ の収束性が保証される^(注3). また, 以上の解析から $\phi_i, \dot{\phi}_i$ を構成するすべての状態は原点へ指数的に減少していくことがわかるので, (38) 式のゲインと $\eta \neq 0$ の条件のもとでその有界性が保証される. ■

以上のことから高次 Chained form の安定化制御に関するつぎの定理が得られる.

(注3) $\xi_{2n-3} = z_{2n} - \phi_{2n-3}$ の関係から $\xi_{2n-3} \rightarrow 0, \phi_{2n-3} \rightarrow 0$ によって $z_{2n} \rightarrow 0$ が保証される. ただし, $k_3 \leq 2n$ の条件によって (32) 式から $\xi_{2n-3} \rightarrow 0$ が得られる.

《定理1》 $p_i = 2 (\forall i)$ を満たす (9) 式の高次の Chained form は以下の制御入力によって原点に漸近収束する。

$$\begin{aligned} u_1 &= -k_1 z_1 - k_2 z_2 \\ u_2 &= \dot{\phi}_{2n-3} - \xi_{2n-4} - k_{2n} \xi_{2n-3} \end{aligned}$$

ただし,

$$\begin{aligned} \alpha &> \beta > 0, \\ \alpha(n-2) &< k_3 \leq k_j, (j=4, \dots, 2n) \end{aligned} \quad (54)$$

であり, ξ_i, ϕ_i は定義1のものとする。

ここで, $p_i = 3 (\forall i)$ の場合の高次の Chained form も考えられるが, その制御方針に関しては付録に譲る。

4.1 特異状態とその回避制御

定理1の制御則は Σ_2 のすべて状態が安定化される前に $\eta(z_1, z_2) = 0$ となると, (21) 式の $\dot{z}_4 = \dot{z}_6 = \dots = \dot{z}_{2n-2} = 0$ となり, 制御則の設計が不可能となる。これを特異状態と呼ぶことにする。Fig. 1 は Σ_1 に (10) 式を加えて得られる z_1, z_2 の軌道を位相平面に表わしており, 解の軌跡が第2, 第4象限を繋ぐ二つの直線を横切の場合, $\eta(z_1, z_2) = 0$ となり, 特異状態になる。ただし, その傾きは (16) 式の k_1, k_2, β によって決められる。Fig. 2 はその特異直線と安定化可能な初期状態の収束領域を表わしている。よって状態の初期値が収束領域の外側にある場合は, $u_1 = \text{const.}, u_2 = 0$ の制御入力に加え, 状態を収束領域に移動させた後, 定理1の制御入力に切換えを行なう必要がある。

Fig. 1 Phase portrait of z_1 and z_2

Fig. 2 Convergence region of proposed controller

本章では, 提案した制御則を用いて劣駆動機械系の制御を行なうことにする。

5. 劣駆動機械系の制御への応用

5.1 劣駆動マニピュレータの姿勢制御

本節では, 劣駆動機械系として, Fig. 3 に示した水平面内に置かれ重力の影響を受けない2次元内劣駆動マニピュレータを取り上げ, その姿勢制御問題を扱う^{20), 21)}。

Fig. 3 Underactuated manipulator

扱うマニピュレータは先端の第3リンクを駆動するアクチュエータがないので劣駆動系となる。ただし, 第1リンク, 第2リンクは自由に制御でき, 第3リンクの関節位置 (x, y) の加速度 $\ddot{x}, \ddot{y}$ が自由に制御できるものとし, 記述を簡単化する。この系は可制御であることが知られている²²⁾。

第3リンクの絶対回転角を θ とすれば, 第3リンクの運動方程式は

$$J\ddot{\theta} - m\ddot{x}\sin\theta + m\ddot{y}\cos\theta = 0 \quad (55)$$

となり, $\ddot{x} = u_1, \ddot{y} = u_2$ とおくと

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{ml}{J}\sin\theta & -\frac{ml}{J}\cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (56)$$

が得られる。ここで, m は第3リンクの質量, l は関節から重心までの距離, J は重心まわりの慣性モーメントである。

以下高次 Chained form へ変換するための操作を行なう。まず, 第3リンクの激心位置

$$\begin{aligned} x_p &= x + \lambda \cos\theta \\ y_p &= y + \lambda \sin\theta \end{aligned} \quad (57)$$

を新しい座標にとる。ただし, $\lambda = \frac{J}{ml}$ である。さらに

$$u = \begin{bmatrix} \cos\theta & \lambda \sin\theta \\ \sin\theta & -\lambda \cos\theta \end{bmatrix} v + \lambda \ddot{\theta}^2 \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix} \quad (58)$$

の入力変換を施すと

$$\begin{aligned} \ddot{x}_p &= \cos\theta v_1 \\ \ddot{y}_p &= \sin\theta v_1 \\ \ddot{\theta} &= v_2 \end{aligned} \quad (59)$$

となる。さらに (x_p, y_p, θ) の目標値を $(x_{pd}, y_{pd}, \theta_d)$ とし, 目標値からの偏差を考えた座標

$$\begin{aligned} y_1 &= \cos\theta_d(x_p - x_{pd}) + \sin\theta_d(y_p - y_{pd}) \\ y_2 &= \tan(\theta - \theta_d) \\ y_3 &= -\sin\theta_d(x_p - x_{pd}) + \cos\theta_d(y_p - y_{pd}) \end{aligned} \quad (60)$$

と最終的な入力変換

$$\begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta - \theta_d) & 0 \\ 0 & \sec^2(\theta - \theta_d) \\ 0 & 2\tan(\theta - \theta_d)\sec^2(\theta - \theta_d)\dot{\theta}^2 \end{bmatrix} v + \quad (61)$$

を施すと

$$y_1^{(2)} = \mu_1, y_2^{(2)} = \mu_2, y_3^{(2)} = y_2\mu_1 \quad (62)$$

の高次 Chained form を得る. 本変換の特異点は $\cos(\theta - \theta_d) = 0$, すなわち, $\theta = \theta_d \pm \pi/2$ となるので $|\theta - \theta_d| \leq \pi/2$ においてのみ座標変換は有効である.

(62) 式は, $p_1 = p_2 = p_3 = 2, n = 3$ の場合の高次 Chained form であることがわかり, 定理 1 を適用すると以下の系 1 が得られる.

[系 1] (59) 式のシステムは以下の制御入力によって原点に漸近収束する.

$$\begin{aligned} \mu_1 &= -k_1 z_1 - k_2 z_2 \\ \mu_2 &= \dot{\phi}_3 - \xi_2 - k_6 \xi_3 \end{aligned}$$

ただし, $\alpha > \beta > 0$,

$$\alpha < k_3 \leq k_j, (j = 4, 5, 6) \quad (63)$$

(証明) 定理 1 から明らかである. ■

劣駆動マニピュレータに対する座標変換と入力変換から得られた (59) 式に系 1 を用いて制御を行ない, Fig. 4 にそのシミュレーション結果を示す.

マニピュレータのパラメータを $m = 2[\text{kg}]$, $l = 0.5[\text{m}]$, $J = 0.1622[\text{kg.m}^2]$ とし, シミュレーションの条件を, $T = 10(\text{s})$, および, $(x, y, \theta, \dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta})$ の初期値を $(-1, 1, 1, 2, 0, 0)$ とし, ゲイン $k_1 = 2, k_2 = 3, k_3 = k_4 = k_5 = k_6 = 3$ とした. Fig. 5 はシミュレーション結果を動画で表わしたものである. ただし, 第 3 リンクのための運動を表わしており, 図上の実線と点線はそれぞれ第 3 関節の軌跡とリンク先端の軌跡を表わしている. シミュレーションの結果から, すべての状態が安定化されていることがわかる.

(a) states(x, y, θ)

(b) states($\dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta}$)

(c) inputs

Fig. 4 Responses of the underactuated manipulator

Fig. 5 Motion of the underactuated manipulator

5.2 特異状態の回避制御

Fig. 6 は $p_i = 2, n = 3$ の高次 Chained form の特異状態の回避制御を行なった結果を表わしている. 状態の初期値を $(z_1 z_2 z_3 z_4 z_5 z_6)^T = (-2 0 1 1 0 0)^T$ としており, この状態の初期値 z_1, z_2 は制御途中で特異直線を横切る初期値である. その回避法として $0.1 < t \leq 0.3$ の間には $u_1(t) = 10, u_2(t) = 0$ の制御入力を施し, 状態を収束可能な領域に移動した後, 提案した制御則 (系 1) に切り換えを行なったものである.

シミュレーション上でのフィードバックゲインは $k_1 = 2, k_2 = 3, k_3 = k_4 = k_5 = k_6 = 3$ とした.

Fig. 6 Singular control of high order chained form

6. 結 び

本論文では、Backstepping 設計法を用いて高次の Chained form の安定化フィードバック制御を行なった。また、提案した制御手法を劣駆動マニピュレータの姿勢制御に応用し、シミュレーションにて制御則の有効性を確認した。

参 考 文 献

- 1) R.W. Brockett: Asymptotic stability and feedback stabilization, *Differential Geometric Control Theory*, 181/191, Boston: Birkhauser (1983)
- 2) H. Khenouf and C.C. Wit: On the construction of stabilizing discontinuous controllers for nonholonomic systems, Proc. of IFAC Nonlinear Control Systems Design Sympo., Tahoe City, USA, 747/752 (1995)
- 3) A. Astolfi: Discontinuous control of nonholonomic systems, *Systems and Control Letters*, **27**, 37/45 (1996)
- 4) S. Monaco and D. N-Cyrot: An Introduction to motion planning using multi rate digital control, Proc. of IEEE CDC, 1780/1785 (1992)
- 5) J-B. Pomet: Explicit design of time-varying stabilizing control laws for a class of controllable systems without drift, *Systems and Control Letters*, **18**, 147/158 (1992)
- 6) C. Samson: Control of chained systems-application to path following and time-varying point-stabilization of mobile robots-, *IEEE Trans. on AC*, **40**-1, 64/77 (1995)
- 7) 清田, 三平: 時間軸状態制御形によるドリフト項を持たない非ホロノミックシステムの安定化, システム制御情報学会誌, **12**-11, 647/654 (1999)
- 8) A. Tayebi, M. Tadjine and A. Rachid: Discontinuous control design for the stabilization of nonholonomic systems in chained form using the backstepping approach, Proc. of CDC, 3089/3090 (1997)
- 9) A. Tayebi and A. Rachid: Backstepping-based discontinuous adaptive control design for the stabilization of nonholonomic mobile robots with matched uncertainties, Proc. of CDC, 3664/3669 (1997)
- 10) M. Krstic, I. Kanellakopoulos and P. Kokotovic: Nonlinear and adaptive control design, John Wiley & Sons, INC. (1995)
- 11) H.K. Khalil: Nonlinear systems, 2nd Edition, Prentice Hall.
- 12) H. Khenouf and C.C. Wit: Quasi-continuous exponential stabilizers for nonholonomic systems, Proc. of 13th IFAC world congress, **2b**-174, 49/54 (1996)
- 13) O. Egeand, E. Berglund and O.J. Sordalen: Exponential stabilization of a nonholonomic underwater vehicle with constant desired configuration, Proc. of IEEE Robotics and Automation, 20/25 (1994)
- 14) L.G. Bushnell, D.M. Tilbury and S.S. Sastry: Steering three-input nonholonomic systems: *Int. J. of Robotics Research*, **14**, 366/381 (1995)
- 15) M.C. Laiou and A. Astolfi: Exponential Stabilization of High-Order Chained Systems, Proc. of IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems Design, 649/654 (1998)
- 16) M.C. Laiou and A. Astolfi: Discontinuous control of high-order generalized chained systems, *System and Control Letters*, 309/322 (1999)
- 17) 中村, 岩本, 吉本: ドリフト項をもつ非ホロノミック機械の制御, 日本ロボット学会誌, **13**-6, 830/837 (1995)
- 18) A.D. Luca, R. Mattone and G. Oriolo: Control of Underactuated Mechanical Systems: Application to the Planar 2R Robot, Proc. of IEEE CDC, 1455/1460 (1996)
- 19) A.D. Luca and G. Oriolo: Motion planning and trajectory control of an underactuated three-link robot via dynamic feedback linearization, Proc. of IEEE International conference on robotics and automation, 2789/2795 (2000)
- 20) 荒井裕彦: 非駆動関節を有する3自由度マニピュレータの非ホロノミック拘束下における可制御性, 日本ロボット学会誌, **14**-5, 751/758 (1996)
- 21) J. Imura, K. Kobayashi and T. Yoshikawa: Nonholonomic Control of 3 Link Planar Manipulator with a Free Joint, Proc. of IEEE CDC, 1435/1436 (1996)
- 22) 小林, 井村, 吉川: 一つの非駆動関節を持つ平面劣駆動マニピュレータの可制御性, 日本ロボット学会誌, **17**-6, 57/63 (1999)
- 23) N. Faiz and S.K. Agrawal: Optimal planning of an underactuated planar body using higher-order method, Proc. of IEEE International conference on robotics and automation, 736/741 (1998)
- 24) 南, 美多: 高次ノンホロノミック制御系の可変周期有限整定制御と劣駆動機械制御への応用, 計測自動制御学会論文誌, **36**-11, 952/961 (2000)

《付 録》

A. 収束領域

($C_\alpha > 0$ の場合) (15) 式は

$$0 \leq (k_1 z_1(0) + k_2 z_2(0))\beta - k_2 z_2(0) \leq (k_1 z_1(0) + k_2 z_2(0))\alpha - k_2 z_2(0) \quad (\text{A.1})$$

となり, 最初の不等式から

$$k_1 z_1(0) + k_2(1 - 1/\beta)z_2(0) \geq 0 \quad (\text{A.2})$$

二つ目の不等式から

$$(k_1 z_1(0) + k_2 z_2(0))(\alpha - \beta) \geq 0 \quad (\text{A.3})$$

を得るが, $\alpha - \beta > 0$ から

$$k_1 z_1(0) + k_2 z_2(0) \geq 0 \quad (\text{A.4})$$

を得る. よって, その共通域は Fig.2 の A の領域となる.

($C_\alpha < 0$ の場合) (15) 式は

$$0 \geq (k_1 z_1(0) + k_2 z_2(0))\beta - k_2 z_2(0) \geq (k_1 z_1(0) + k_2 z_2(0))\alpha - k_2 z_2(0) \quad (\text{A.5})$$

となり, 同様に解析すると

$$k_1 z_1(0) + k_2(1 - 1/\beta)z_2(0) \leq 0 \quad (\text{A.6})$$

$$k_1 z_1(0) + k_2 z_2(0) \leq 0$$

を得, その共通域は Fig.2 の B の領域となる. よって, A, B を除いた斜線で示した領域が $\eta(t) \neq 0$ を満たす初期値 $z(0)$ の許容域となる.

B. η の収束率

(15) 式が満たされないときの η の解を考える.

($C_\beta/C_\alpha \leq 0$ のとき)

$$\eta = C_\alpha e^{-\alpha t} (1 + (-C_\beta/C_\alpha)e^{(\alpha-\beta)t}) \quad (\text{B.1})$$

から

$$|\eta| = |C_\alpha|e^{-\alpha t} (1 + (-C_\beta/C_\alpha)e^{(\alpha-\beta)t}) > |C_\alpha|e^{-\alpha t} \quad (\text{B.2})$$

とおける.

($C_\beta/C_\alpha > 1$ のとき)

$C_\beta/C_\alpha = 1 + h$ とおくと

$$\eta = C_\alpha e^{-\alpha t} (1 - (1 + h)e^{(\alpha-\beta)t}) = -hC_\alpha e^{-\beta t} \quad (\text{B.3})$$

となるので

$$|\eta| = |C_\alpha| |h| e^{-\beta t} > |C_\alpha| |h| e^{-\alpha t} \quad (\text{B.4})$$

を得る.

(まとめ)

$$h = 1 - C_\beta/C_\alpha = (C_\beta - C_\alpha)/C_\alpha \quad (\text{B.5})$$

なので, (B.2) 式, (B.4) 式はまとめて

$$|\eta| > \min(|C_\alpha|, |C_\beta - C_\alpha|) e^{-\alpha t} \quad (\text{B.6})$$

とおける.

C. $p_i = 3$ の場合の制御方針

$p_i = 3$ の場合の高次の Chained form に対して

$$z = (y_1, \dot{y}_1, \ddot{y}_1, y_n, \dot{y}_n, \ddot{y}_n, y_{n-1}, \dot{y}_{n-1}, \ddot{y}_{n-1}, \dots, y_2, \dot{y}_2, \ddot{y}_2) \quad (\text{C.1})$$

の座標変換を施すと

$$\begin{aligned} \Sigma_1: \quad \dot{z}_1 &= z_2, & \Sigma_2: \quad \dot{z}_{3i-5} &= z_{3i-4} \\ \dot{z}_2 &= z_3, & \dot{z}_{3i-4} &= z_{3i-3} \\ \dot{z}_3 &= u_1, & \dot{z}_{3i-3} &= z_{3i-2} u_1 \\ & & \vdots & \\ \dot{z}_{3n} &= u_2 \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

のシステムが得られる. ただし, $i = (3, \dots, n+1)$ である. (C.2) 式の Σ_1 は線形の可制御正準系となり, Σ_1 を安定化する連続で微分可能な制御入力 u_1 は求めることができる. Σ_2 に対して線形のフィードバック制御則 u_1 を施すと, その閉ループ系は Backstepping 手法が適用できる形となり, $p_i = 2$ の場合と同様な設計法によってそのすべての状態を原点へ漸近収束させることができると考えられる.

[著 者 紹 介]

南 澤 槿 (正会員)

1996 年韓国海洋大学機関工学科修士課程修了. 97 年 10 月東京工業大学院理工学研究科制御工学専攻博士後期課程入学. 2001 年同大学院博士後期課程修了. スライディングモード制御やノンホロノミック制御について研究中. (工学博士).

美 多 勉 (正会員)

1975 年東京工業大学大学院理工学研究科博士課程 (電気工学専攻) 修了, 同年千葉大学講師, 90 年同教授を経て, 95 年東京工業大学工学部制御システム工学科教授. 制御理論, 非線形制御のロボット工学への応用に関する教育研究に従事. 日本ロボット学会, IEEE などの会員 (工学博士). 計測自動制御学会論文賞, 著述賞, 技術賞など受賞.