曲げ・ねじり変形を考慮した 1 リンクフレキシブルアームの ダイナミクスベーストルク制御†

森田良文*・松野文俊**・小林幸洋*
池田素久*・鵜飼裕之*・神藤久*

Dynamics Based Force Control of a One-Link Flexible Arm Considering Bending and Torsional Deformation†

Yoshifumi MORITA*, Fumitoshi MATSUNO**, Yukihiro KOBAYASHI*,
Motohisa IKEDA*, Hiroyuki UKAI* and Hisashi KANDO*

We discuss the dynamics based force control suppressing the coupled bending and torsional vibrations of a one-link flexible arm with a rigid tip body. We construct output feedback control law on the basis of the distributed parameter model using Lyapunov method, and prove the asymptotic stability of the closed-loop system. The proposed controller consists of the PD feedback of the motor angle and a feedback of the bending moment at the root of the flexible arm. We perform some simulations to show the effectiveness of the proposed controller.

Key Words: flexible arm, distributed parameter system, coupled bending and torsional vibrations, force control, dynamics based control, Lyapunov method

1. はじめに

近年、宇宙開発が盛んに行なわれ、作業用宇宙ロボットが活躍するようになってきた。宇宙ロボットでは、ロケットの搭載重量や打ち上げコストなどの理由から積極的なアームの軽量化が行なわれている。しかしながら、アームの軽量化は剛性不足となり、弾性振動を引き起こすため、その振動を抑制することが不可欠である。また、宇宙空間において宇宙ステーション等の大規模宇宙構造物を建設する際、アームの位置制御だけでなく対象物に加える力を制御することも必要となる。このため、種々の立場からフレキシブルアームならびにフレキシブルマニピュレータの制御に関する研究が行なわれている^{1), 2)}。

一方、アームの先端に手先効果器を取り付けた場合や、さらには手先効果器を用いて対象物を把持する場合、アームの先端負荷を質点として見なすことができず、アームに曲げだけでなくねじれによる変形・振動が発生する。そこで、先端負荷を剛体として扱った曲げとねじれの振動抑制問題に対して、

有限次元近似モデルに基づくロバストな制御器が提案されている^{3)~8)}。文献3)~5)では位置制御問題が、文献6)~8)では力制御問題が議論されている。一方、最近、柔軟物が持つ分布定数系のダイナミクスに着目したダイナミクスベーストルク制御 (Dynamics Based Control) が提案されている^{9)~12)}。これは、有限次元近似モデルに依らない構造的に安定な出力フィードバック制御であり、ロバスト性を有する簡便でかつ実装が容易な制御法である。しかしながら、曲げとねじれの結合振動を伴う力制御問題に対して、ダイナミクスベーストルク制御がどのように構成されるのかは明らかではない。

本論文では、水平面内で回転する 1 リンクフレキシブルアームを制御対象とし、曲げ・ねじれの結合振動の抑制と同時に力制御を実現する制御器としてダイナミクスベーストルク制御法を適用し、導出された制御器の構成を明らかにすることを目的とする。まず、分布定数モデルに対して、リアプノフ関数に基づいた制御器を構成し、その後、分布系としての閉ループ系の漸近安定性を証明する。最後に、提案手法の制御効果を数値シミュレーションにより検証する。

2. 分布定数モデル

Fig. 1 に示すように、アーム先端に剛体負荷を持ち水平面内で回転するフレキシブルアームが剛体負荷のある一点 (点 R) で環境面に拘束された場合の力制御問題を考える。ここで、接触点での摩擦はないものと仮定する。

† 第 40 回 SICE 学術講演会で発表 (2001・7)

* 名古屋工業大学 名古屋市昭和区御器所町

** 東京工業大学大学院総合理工学研究科 横浜市緑区長津田町

* Nagoya Institute of Technology, Showa, Nagoya

** Tokyo Institute of Technology, Midori, Yokohama
(Received September 28, 2001)

(Revised February 25, 2002)

Fig. 1 Constrained flexible arm with a rigid tip body

Fig. 1 に示すように、 $O-XYZ$ を慣性座標系 Σ_0 、アームの長手方向を X_1 軸とし、モータの回転軸に固定した座標系 $O_1-X_1Y_1Z_1$ を Σ_1 、剛体負荷とアームとの結合点を原点とし、アーム先端におけるたわみの接線方向を X_2 軸とした座標系 $O_2-X_2Y_2Z_2$ を Σ_2 、また、原点が O_2 に固定され、剛体負荷の回転運動とともに回転する座標系 $O_3-X_3Y_3Z_3$ を Σ_3 とする。さらに、 Σ_3 を剛体負荷の質量中心 Q まで平行移動した座標系 $Q-X_4Y_4Z_4$ を Σ_4 とする。 $\tau(t)$ はモータの発生トルク、 $\theta(t)$ はモータの回転角度を表わし、どちらも反時計方向を正とする。 $w(t, r)$ はアームの曲げ変位を表わし、回転の逆方向を正とし、 $\varphi(t, r)$ はアームのねじれ変位を表わし、反時計方向を正とする。また、 $f(t)$ は拘束面から受ける反力を表わす。一方、物理パラメータとして、 L をリンクの長さ、 E をリンクのヤング率、 I をリンクの断面 2 次モーメント、 G をリンクのせん断弾性係数、 J をリンクの断面 2 次極モーメント、 ρ をリンクの線密度、 $\rho\kappa^2$ をリンクの極慣性モーメント、 J_m をモータ・ロータの Z 軸まわりの慣性モーメント、 J_x を剛体負荷の X_4 軸まわりの慣性モーメント、 m を剛体負荷の質量、 g を重力加速度とする。 EI 、 GJ はそれぞれリンクの曲げ剛性、ねじれ剛性を表わす。ここで、議論を簡単にするため、剛体負荷の点 Q 、点 R は Z_3 軸上にあるものとし、 $|\overline{O_3Q}| = e_z$ 、 $|\overline{O_3R}| = l_z$ とする。本論文では、平衡点近傍での small motion を考えるので、 $\theta(t) \cong 0$ 、 $w(t, r) \cong 0$ 、 $w'(t, r) \cong 0$ 、 $\varphi(t, r) \cong 0$ として、それらの積を無視する線形化を行なう。

Fig. 1 における拘束面の方程式は、

$$\phi(X, Y, Z) = Y = 0 \quad (1)$$

で与えられ、一般化座標を用いると、

$$\begin{aligned} \phi(\theta(t), w_E(t), \varphi_E(t)) \\ = L\theta(t) - w_E(t) - l_z\varphi_E(t) = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

と表わされる。ただし、 $w_E(t) = w(t, L)$ 、 $w'_E(t) = w'(t, L)$ 、 $\varphi_E(t) = \varphi(t, L)$ とする。また、 $(\cdot)$ は空間に関する微分を、 $(\cdot)$ は時間に関する微分を表わす。

ここで、 $\lambda(t)$ を拘束条件 (2) に対応するラグランジュ乗数としてハミルトン原理を適用すると、以下の運動方程式が得られる⁸⁾。

モータの回転方程式:

$$\begin{aligned} J_m\ddot{\theta}(t) + EIw''(t, 0) \\ = \tau(t) + \lambda(t)\left(\frac{\partial\phi}{\partial\theta} + \frac{\partial\phi}{\partial w_E}L\right) \end{aligned} \quad (3)$$

リンクの曲げに関する振動方程式:

$$\ddot{w}(t, r) + \frac{EI}{\rho}w''''(t, r) = r\ddot{\theta}(t) \quad (4)$$

$$\begin{aligned} EI\left[\frac{m}{\rho}w_E''''(t) + w_E''''(t)\right] - \frac{GJme_z}{\rho\kappa^2}\varphi_E''(t) \\ = -\lambda(t)\frac{\partial\phi}{\partial w_E} \end{aligned} \quad (5)$$

$$EIw_E''(t) = 0 \quad (6)$$

$$w(t, 0) = 0, \quad w'(t, 0) = 0 \quad (7)$$

リンクのねじれに関する振動方程式:

$$\ddot{\varphi}(t, r) - \frac{GJ}{\rho\kappa^2}\varphi''(t, r) = 0 \quad (8)$$

$$\begin{aligned} -\frac{EIme_z}{\rho}w_E''''(t) + \frac{GJ}{\rho\kappa^2}(me_z^2 + J_x)\varphi_E''(t) \\ + GJ\varphi_E'(t) = \lambda(t)\frac{\partial\phi}{\partial\varphi_E} \end{aligned} \quad (9)$$

$$\varphi(t, 0) = 0 \quad (10)$$

また、拘束力 $f(t)$ とラグランジュ乗数 $\lambda(t)$ の関係は、

$$f(t) = -\lambda(t) \quad (11)$$

で表わされる。

3. ダイナミクスバースト力制御

3.1 目標状態

制御目的を「目標とする力で拘束面を押しながら、系が完全に静止する」とし、このような状態を目標状態とする。目標とする拘束力を f_d とするとき、これに対応するラグランジュ定数を λ_d 、また、目標状態におけるモータの回転角度、曲げ変位、ねじれ変位の定常値をそれぞれ θ_d 、 $w_d(r)$ 、 $\varphi_d(r)$ とする。

まず、目標拘束力 f_d とそれに対応するラグランジュ乗数 λ_d との関係は、(11) 式より、

$$f_d = -\lambda_d \quad (12)$$

となる。つぎに、目標状態において、

$$\begin{cases} \theta(t) = \theta_d, & \dot{\theta}(t) = \ddot{\theta}(t) = 0, \\ w(t, r) = w_d(r), & \dot{w}(t, r) = \ddot{w}(t, r) = 0, \\ \varphi(t, r) = \varphi_d(r), & \dot{\varphi}(t, r) = \ddot{\varphi}(t, r) = 0, \\ f(t) = f_d, & \lambda(t) = \lambda_d \end{cases} \quad (13)$$

が成り立つので、これらの関係を振動方程式 (4)~(10) 式および拘束条件 (2) 式に代入すると、

$$\begin{cases} w_d''''(r) = 0 \\ EIw_d'''(L) = -f_d \\ EIw_d''(L) = 0 \\ w_d(0) = 0, \quad w_d'(0) = 0 \end{cases} \quad (14)$$

$$\begin{cases} \varphi_d''(r) = 0 \\ GJ\varphi_d'(L) = l_z f_d \\ \varphi_d(0) = 0 \end{cases} \quad (15)$$

$$L\theta_d(t) - w_d(L) - l_z\varphi_d(L) = 0 \quad (16)$$

となる。ここで、(14)式、(15)式からそれぞれ $w_d(r)$ 、 $\varphi_d(r)$ を求めると、

$$w_d(r) = \frac{1}{6EI}(3Lr^2 - r^3)f_d \quad (17)$$

$$\varphi_d(r) = \frac{l_z}{GJ}rf_d \quad (18)$$

が得られ、また、(16)式に(17)、(18)式を代入すると、

$$\theta_d = \frac{h_0}{3EIGJ}f_d \quad (19)$$

が得られる。ただし、 h_0 は以下で表わされる定数である。

$$h_0 = GJL^2 + 3EIL_z^2(>0)$$

3.2 制御器の構成

k_1, k_2, k_3 を正の定数として、以下のスカラ関数 $V(x)$ を考える。

$$\begin{aligned} V(x) = & \frac{1}{2}k_1J_m\dot{\theta}^2(t) \\ & + k_2\left\{\frac{1}{2}\int_0^L \rho\dot{r}^T\dot{r}dr + \frac{1}{2}\int_0^L \rho\kappa^2\dot{\varphi}^2(t,r)dr\right. \\ & + \frac{1}{2}m\dot{P}^T\dot{P} + \frac{1}{2}J_x\dot{\varphi}_E^2(t) \\ & + \frac{1}{2}\int_0^L EI[w''(t,r) - w_d''(r)]^2dr \\ & + \frac{1}{2}\int_0^L GJ[\varphi'(t,r) - \varphi_d'(r)]^2dr \\ & \left. + \frac{1}{2}k_3(\theta(t) - \theta_d)^2\right\} \end{aligned} \quad (20)$$

ただし、

$$\begin{aligned} x = & [\theta(t), \dot{\theta}(t), w(t,r), \dot{w}(t,r), \varphi(t,r), \dot{\varphi}(t,r), \\ & w_E(t), \dot{w}_E(t), \varphi_E(t), \dot{\varphi}_E(t), w'_E(t), \dot{w}'_E(t), \\ & w''(t,r), \varphi'(t,r)]^T \end{aligned}$$

である。また、 r はアーム上の任意の点を表わす位置ベクトル、 P は剛体負荷の重心の位置ベクトルを表わし、それぞれ次式で与えられる。

$$r = [r \quad r\theta(t) - w(t,r) \quad 0]^T \quad (21)$$

$$P = [L \quad L\theta(t) - w_E(t) - \varphi_E(t)e_z \quad e_z]^T \quad (22)$$

(20)式の右辺第1項はモータの回転エネルギーに対して k_1 の重み付けした項、第2項はモータの回転エネルギー以外のシステムの全エネルギー、すなわちモータ負荷の全エネルギーに対して k_2 の重み付けした項、最終項は $\theta(t)$ が θ_d と

なるような制御則を導くために付け加えた仮想ポテンシャルの項である。ここで、目標状態 x_d を、

$$x_d = [\theta_d, 0, w_d(r), 0, \varphi_d(r), 0, w_d(L), 0, \varphi_d(L), 0, w_d'(L), 0, w_d''(r), \varphi_d'(r)]^T \quad (23)$$

とおくと、 $V(x_d) = 0$ 、 $V(x) > 0 (x \neq x_d)$ を満たすことがわかる。

いま、(20)式を(3)~(10)式の解軌道に沿って時間微分すると、

$$\begin{aligned} \frac{dV(x)}{dt} = & \dot{\theta}(t)\{k_1\tau(t) + (k_2 - k_1)EIw''(t,0) \\ & + k_3(\theta(t) - \theta_d) - k_2EIw_d''(0)\} \end{aligned} \quad (24)$$

となる。ここで、入力トルク $\tau(t)$ として、

$$\begin{aligned} \tau(t) = & -\left\{\frac{k_3}{k_1}(\theta(t) - \theta_d) + \frac{k_d}{k_1}\dot{\theta}(t) \right. \\ & + \frac{k_2 - k_1}{k_1}EI(w''(t,0) - w_d''(0)) \\ & \left. - EIw_d''(0)\right\} \end{aligned} \quad (25)$$

とすれば、

$$\frac{dV(x)}{dt} = -k_d\dot{\theta}^2(t) \leq 0 \quad (26)$$

が導かれ、 V はリアプノフ関数となる。ただし、(25)式で $k_d > 0$ とした。入力トルク(25)は、 $K_p = k_3/k_1$ 、 $K_d = k_d/k_1$ 、 $K_s = (k_2 - k_1)/k_1$ とおくことで、

$$\begin{aligned} \tau(t) = & -K_p(\theta(t) - \theta_d) - K_d\dot{\theta}(t) \\ & - K_sEI(w''(t,0) - w_d''(0)) + EIw_d''(0) \end{aligned} \quad (27)$$

と表わされる。ここで、 $k_1 > 0$ 、 $k_2 > 0$ 、 $k_3 > 0$ 、 $k_d > 0$ より、 $K_p > 0$ 、 $K_d > 0$ 、 $K_s > -1$ の条件が導かれる。また、入力トルク(27)において、モータの回転角度 $\theta(t)$ はエンコーダ、角速度 $\dot{\theta}(t)$ はタコジェネレータ、アームの根元での曲げモーメント $w''(t,0)$ はアーム根元に貼られた歪みゲージにより、それぞれ直接計測することができる。この制御入力にはモータ角度のPD制御に加え、曲げ歪み(Strain)量を直接フィードバックすることからPDS制御と呼ばれており、有限次元モデルに基づく状態観測器は不要である。すなわち、本質的にスピルオーバー現象は起こらない。最終項は力制御を実現するための定常トルク入力である。なお、 $K_s = 0$ ($k_1 = k_2$) の場合には通常のPD制御となる。

(27)式右辺第3項と最終項に、物理パラメータである EI が含まれているが、第3項はゲイン K_s の一部と見なすことができるので、実際の EI の値を知る必要はない。また、最終項は、(17)式から $EIw_d''(0) = Lf_d$ と表わせるので、 EI の値を知る代わりに実際のアームの長さ L の値を必要とするが、アームの長さは設計上わかっていると考えられる。

4. 漸近安定性

漸近安定性を示すために、LaSalleの不変原理¹³⁾を用いる。すなわち、リアプノフ関数 $V(x)$ に対して、 $\dot{V}(x) = 0$ を満

たす集合に含まれる不変集合は x_d だけであることを示すことで、 $x \rightarrow x_d(t \rightarrow \infty)$ を示す。

(26) 式より、 $\dot{V}(x) = 0$ となるのは、 $\dot{\theta}(t) = 0$ のときであることから、つぎの条件下で漸近安定性を証明する。

$$\dot{\theta}(t) = 0 \quad (\theta(t) = \theta_s = \text{const.}), \quad \ddot{\theta}(t) = 0 \quad (28)$$

4.1 不変集合における状態方程式

(28) 式を拘束条件 (2) に用いると、以下の不変集合における拘束条件が得られる。

$$w_E(t) + l_z \varphi_E(t) = L\theta_s = \text{const.} \quad (29)$$

また、入力トルク (25) を (3) 式に代入し、(28) 式を用いると、以下の不変集合におけるモータの回転方程式が得られる。

$$w''(t, 0) = -\frac{k_3}{k_2 EI}(\theta_s - \theta_d) + w_d''(0) \quad (30)$$

さらに、(4)~(10) 式に (28), (29) 式を用いると、以下の不変集合における振動方程式が得られる。

リンクの曲げに関する振動方程式:

$$\ddot{w}(t, r) + \frac{EI}{\rho} w''''(t, r) = 0 \quad (31)$$

$$w_E(t) + l_z \varphi_E(t) = L\theta_s \quad (32)$$

$$w_E''(t) = 0, \quad w(t, 0) = 0, \quad w'(t, 0) = 0 \quad (33)$$

リンクのねじれに関する振動方程式:

$$\ddot{\varphi}(t, r) - \frac{GJ}{\rho \kappa^2} \varphi''(t, r) = 0 \quad (34)$$

$$EI \left[\frac{m}{\rho} (l_z - e_z) v_1''''(t) + l_z v_1'''(t) \right] + GJ \varphi_E'(t) + \frac{GJ}{\rho \kappa^2} \{ m e_z (e_z - l_z) + J_x \} v_2''(t) = 0 \quad (35)$$

$$\varphi(t, 0) = 0 \quad (36)$$

ここで、(35) 式は、(5) 式を用いて (9) 式の $\lambda(t)$ を消去したものである。また、(32) 式は (29) 式そのもので、(5) 式の代わりに新たに加えた境界条件である。

4.2 境界条件の同次化

不変集合における振動方程式 (31)~(36) において、(32) 式が非同次な境界条件となっている。そこで、この境界条件を同次化するために、以下の新しい変数を導入する。

$$v_1(t, r) = w(t, r) + \frac{GJ}{2h_0} \theta_s (r^3 - 3Lr^2) \quad (37)$$

$$v_2(t, r) = \varphi(t, r) - \frac{3EI l_z}{h_0} \theta_s r \quad (38)$$

新しい変数 (37), (38) を (31)~(36) 式に代入することで、以下に示す同次化された振動方程式を得る。

リンクの曲げに関する振動方程式:

$$\ddot{v}_1(t, r) + \frac{EI}{\rho} v_1''''(t, r) = 0 \quad (39)$$

$$v_{1E}(t) + l_z v_{2E}(t) = 0 \quad (40)$$

$$v_{1E}''(t) = 0, \quad v_1(t, 0) = 0, \quad v_1'(t, 0) = 0 \quad (41)$$

リンクのねじれに関する振動方程式:

$$\ddot{v}_2(t, r) - \frac{GJ}{\rho \kappa^2} v_2''(t, r) = 0 \quad (42)$$

$$EI \left[\frac{m}{\rho} (l_z - e_z) v_1''''(t) + l_z v_1'''(t) \right] + GJ v_2'(t) + \frac{GJ}{\rho \kappa^2} \{ m e_z (e_z - l_z) + J_x \} v_2''(t) = 0 \quad (43)$$

$$v_2(t, 0) = 0 \quad (44)$$

4.3 偏微分作用素の性質

偏微分方程式 (39), (42) と境界条件 (40), (41), (43), (44) に対応する偏微分作用素 $\mathcal{A}$ とその定義域 $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ を

$$\mathcal{A}v = \begin{bmatrix} \frac{EI}{\rho} v_1'''' \\ \frac{GJ}{\rho \kappa^2} v_2'' \end{bmatrix} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\mathcal{A}) = \{ & v = [v_1, v_2]^T \in \mathcal{H}^4([0, L]) \times \mathcal{H}^2([0, L]) | \\ & v_1(0) = v_1'(0) = v_1''(L) = v_2(0) = 0, \\ & v_1(L) + l_z v_2(L) = 0, \\ & EI \left[\frac{m}{\rho} (l_z - e_z) v_1''''(L) + l_z v_1'''(L) \right] + GJ v_2'(L) \\ & + \frac{GJ}{\rho \kappa^2} \{ m e_z (e_z - l_z) + J_x \} v_2''(L) = 0 \} \end{aligned} \quad (46)$$

と定義する。また、ヒルベルト空間 $\mathcal{H} = \mathcal{L}_2(0, L) \times \mathcal{L}_2(0, L)$ における内積を、

$$\begin{aligned} \left\langle \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{bmatrix} \right\rangle = & \int_0^L \rho (v_{11}(r) v_{12}(r) + \kappa^2 v_{21}(r) v_{22}(r)) dr \\ & + [v_{11}(L) \quad v_{21}(L)] \begin{bmatrix} m & m e_z \\ m e_z & J_x + m e_z^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{12}(L) \\ v_{22}(L) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (47)$$

のように定義する。ここで、作用素 $\mathcal{A}$ について調べる。任意の $\Psi_i = [\psi_{1i}, \psi_{2i}]^T$, $\Psi_j = [\psi_{1j}, \psi_{2j}]^T \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ に対して、

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}\Psi_i, \Psi_j \rangle &= \int_0^L \rho \left(\frac{EI}{\rho} \psi_{1i}'''' \psi_{1j} - \kappa^2 \frac{GJ}{\rho \kappa^2} \psi_{2i}'' \psi_{2j} \right) dr \\ &+ \left[\frac{EI}{\rho} \psi_{1i}''''(L) - \frac{GJ}{\rho \kappa^2} \psi_{2i}''(L) \right] \cdot \begin{bmatrix} m & m e_z \\ m e_z & J_x + m e_z^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{1j}(L) \\ \psi_{2j}(L) \end{bmatrix} \\ &= \int_0^L EI \psi_{1i}'' \psi_{1j}'' dr + \int_0^L GJ \psi_{2i}' \psi_{2j}' dr \quad (48) \\ &= \langle \Psi_i, \mathcal{A}\Psi_j \rangle \end{aligned}$$

となり、対称性が示される。また、(48) 式において $\Psi_j = \Psi_i$ とおけば、

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}\Psi_i, \Psi_i \rangle &= \int_0^L EI (\psi_{1i}'')^2 dr + \int_0^L GJ (\psi_{2i}')^2 dr > 0 \quad (49) \end{aligned}$$

となり、正定性が示される。これより、作用素 $\mathcal{A}$ は自己共役、正定であり、 $\mathcal{A}^{-1}$ が存在してコンパクトであるので、作用素 $\mathcal{A}$ の固有値 γ 、固有関数 Ψ は以下の性質を持つ。

$$(1) \quad 0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_n < \dots$$

(2) $\mathcal{A}\Psi_n = \gamma_n \Psi_n$, $n = 1, 2, \dots$

(3) 固有関数系 $\{\Psi_n\}$ は, 正規直交系である.

ここで, 作用素 $\mathcal{A}$ に対する固有値問題について考える. 作用素 $\mathcal{A}$ に対する固有値を γ , 固有関数を $\Psi = [\psi_1, \psi_2]^T \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H}$ とすると, 固有値問題 $\mathcal{A}\Psi = \gamma\Psi$ は以下のよう書き換えられる.

$$\begin{bmatrix} \frac{EI}{\rho} \psi_1''''(r) \\ -\frac{GJ}{\rho\kappa^2} \psi_2''(r) \end{bmatrix} = \gamma \begin{bmatrix} \psi_1(r) \\ \psi_2(r) \end{bmatrix} \quad (50)$$

$$\psi_1(0) = 0, \psi_1'(0) = 0, \psi_1''(L) = 0, \psi_2(0) = 0$$

$$\psi_1(L) + l_z \psi_2(L) = 0$$

$$m\gamma(l_z - e_z)\psi_1(L) - \gamma\{me_z(e_z - l_z) + J_x\}\psi_2(L)$$

$$+ EI l_z \psi_1'''(L) + GJ \psi_2'(L) = 0$$

ただし, γ を次式で定義する.

$$\gamma = \frac{EI}{\rho} \left(\frac{\beta}{L}\right)^4$$

ここで, この固有値問題から以下の固有方程式が得られる.

$$\det \begin{bmatrix} a_{11}(\beta) & a_{12}(\beta) & a_{13}(\beta) \\ a_{21}(\beta) & a_{22}(\beta) & a_{23}(\beta) \\ a_{31}(\beta) & a_{32}(\beta) & a_{33}(\beta) \end{bmatrix} = 0 \quad (51)$$

ただし,

$$a_{11}(\beta) = \xi_{11}\Gamma_3(\beta), \quad a_{12}(\beta) = \xi_{11}\Gamma_4(\beta)$$

$$a_{13}(\beta) = \xi_{12} \sin \frac{\alpha\beta^2}{L}, \quad a_{21}(\beta) = \xi_{21}\beta^2\Gamma_1(\beta)$$

$$a_{22}(\beta) = \xi_{21}\beta^2\Gamma_2(\beta), \quad a_{23}(\beta) = 0$$

$$a_{31}(\beta) = \xi_{31}\beta^4\Gamma_3(\beta) + \xi_{32}\beta^3\Gamma_2(\beta)$$

$$a_{32}(\beta) = \xi_{31}\beta^4\Gamma_4(\beta) + \xi_{32}\beta^3\Gamma_3(\beta)$$

$$a_{33}(\beta) = \xi_{33}\beta^4 \sin \frac{\alpha\beta^2}{L} + \xi_{34}\beta^2 \cos \frac{\alpha\beta^2}{L}$$

$$\xi_{11} = -1, \quad \xi_{12} = l_z, \quad \xi_{21} = -\frac{1}{L^2},$$

$$\xi_{31} = -\frac{EI m(l_z - e_z)}{\rho L^4}, \quad \xi_{32} = -\frac{EI l_z}{L^3},$$

$$\xi_{33} = -\frac{EI\{me_z(e_z - l_z) + J_x\}}{\rho L^4}, \quad \xi_{34} = \frac{GJ\alpha}{L^2}$$

$$\alpha = \kappa \sqrt{\frac{EI}{GJ}}.$$

$$\Gamma_1(\beta) = \sinh \beta + \sin \beta, \quad \Gamma_2(\beta) = \cosh \beta + \cos \beta$$

$$\Gamma_3(\beta) = \sinh \beta - \sin \beta, \quad \Gamma_4(\beta) = \cosh \beta - \cos \beta$$

である. したがって, β が固有方程式 (51) を満たす場合に限り, 固有値問題 (50) は非自明解を持つことがわかる. ここで, β_n を $0 < \beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_n < \dots$ を満たす固有方程式 (51) の解とすると, 固有値 γ_n は,

$$\gamma_n = \frac{EI}{\rho} \left(\frac{\beta_n}{L}\right)^4, \quad n = 1, 2, \dots \quad (52)$$

で与えられ, 対応する固有関数は,

$$\psi_{1n}(r) = \frac{1}{C_n} \left\{ \sin \frac{\beta_n}{L} r - \sinh \frac{\beta_n}{L} r \right.$$

$$\left. + \mu_1(\beta_n) \left(\cos \frac{\beta_n}{L} r - \cosh \frac{\beta_n}{L} r \right) \right\} \quad (53)$$

$$\psi_{2n}(r) = \frac{1}{C_n} \mu_2(\beta_n) \sin \frac{\alpha\beta_n^2}{L^2} r \quad (54)$$

で与えられる. ただし, $\mu_1(\beta_n)$, $\mu_2(\beta_n)$ は,

$$\mu_1(\beta_n) = -\frac{\sinh \beta_n + \sin \beta_n}{\cosh \beta_n + \cos \beta_n} \quad (55)$$

$$\mu_2(\beta_n) = \frac{2(\sinh \beta_n \cos \beta_n - \cosh \beta_n \sin \beta_n)}{l_z(\cosh \beta_n + \cos \beta_n) \sin(\alpha\beta_n^2/L)} \quad (56)$$

である. ここで, $C_n \neq 0$ は有界な任意の定数である.

4.4 固有関数展開

(39)~(44) 式の解は, (52) 式の固有値 γ_n とそれに対応する固有関数 (53), (54) を用いて以下で表わされる.

$$\begin{bmatrix} v_1(t, r) \\ v_2(t, r) \end{bmatrix} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n} \begin{bmatrix} \psi_{1n}(r) \\ \psi_{2n}(r) \end{bmatrix} \nu_n(t) \quad (57)$$

(57) 式の $\nu_n(t)$ は以下の微分方程式の解である.

$$\ddot{\nu}_n(t) = -\gamma_n \nu_n(t), \quad n = 1, 2, \dots \quad (58)$$

この解は, c_n , ϕ_n を定数とし,

$$\nu_n(t) = c_n \sin(\sqrt{\gamma_n} t + \phi_n), \quad n = 1, 2, \dots \quad (59)$$

で与えられ, これを (57) 式に代入すると,

$$\begin{bmatrix} v_1(t, r) \\ v_2(t, r) \end{bmatrix} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n} \begin{bmatrix} \psi_{1n}(r) \\ \psi_{2n}(r) \end{bmatrix} c_n \sin(\sqrt{\gamma_n} t + \phi_n) \quad (60)$$

が得られる.

ここで, $v_1(t, r)$ に対して空間に関する2回微分を行ない, $r = 0$ とすると,

$$v_1''(t, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n} \psi_{1n}''(0) c_n \sin(\sqrt{\gamma_n} t + \phi_n) \quad (61)$$

が得られる. 上式の $\psi_{1n}''(0)$ は (53) 式より,

$$\psi_{1n}''(0) = -2\mu_1(\beta_n) \left(\frac{\beta_n}{L}\right)^2 \frac{1}{C_n}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (62)$$

で与えられる. ここで, (55) 式より $\mu_1(\beta_n) \neq 0 (\beta_n > 0)$ であるので, $\psi_{1n}''(0) \neq 0$ であることがわかる.

4.5 平衡状態の解析と漸近安定性

(37) 式より,

$$v_1''(t, 0) = w''(t, 0) - \frac{3GJL}{h_0} \theta_s \quad (63)$$

となり, これに (30) 式を代入すると,

$$\begin{aligned} v_1''(t, 0) &= -\frac{k_3}{k_2 EI} (\theta_s - \theta_d) + w_d''(0) - \frac{3GJL}{h_0} \theta_s \\ &= -c_0 = \text{const.} \end{aligned} \quad (64)$$

となる. この関係を用いれば (61) 式は,

$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{1}{\gamma_n} \psi_{1n}''(0) \sin(\sqrt{\gamma_n} t + \phi_n) = 0 \quad (65)$$

Table 1 Physical parameters

Parameter	Value
L	0.85 [m]
EI	5.43 [Nm ²]
GJ	7.61 [Nm ²]
ρ	0.307 [kg/m]
$\rho\kappa^2$	4.11×10^{-5} [kgm]
J_m	0.137 [kgm ²]
J_x	4.50×10^{-3} [kgm ²]
m	1.34 [kg]
l_z	0.13 [m]
e_z	-0.05 [m]

と表わされる。ここで、関数列 $\{1, \sin \sqrt{\gamma_1}t, \sin \sqrt{\gamma_2}t, \dots\}$ が一次独立であることから、任意の時刻 t において (65) 式が成立するためには、 $c_0 = c_1 = c_2 = \dots = 0$ でなくてはならない。これを (59) 式に適用すれば、

$$\nu_n(t) = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (66)$$

が得られ、(57) 式より不変集合は平衡状態であることがわかる。(66) 式を (57), (64) 式に適用すれば、

$$v_1(t, r) = 0, \quad v_2(t, r) = 0 \quad (67)$$

$$-\frac{k_3}{k_2 EI}(\theta_s - \theta_d) + w_d''(0) - \frac{3GJL}{h_0}\theta_s = 0 \quad (68)$$

が得られる。さらに、(68) 式に (17), (19) 式を用いると、

$$\left(\frac{k_3}{k_2 EI} + \frac{3GJL}{h_0}\right)(\theta_s - \theta_d) = 0 \quad (69)$$

となり、 $\theta_s - \theta_d$ の係数が常に正であることから、

$$\theta_s = \theta_d \quad (70)$$

が成り立つ。つぎに、(67), (70) 式を (37), (38) 式に用いると、

$$w(t, r) = -\frac{GJ}{2h_0}\theta_d(r^3 - 3Lr^2) \quad (71)$$

$$\varphi(t, r) = \frac{3EI l_z}{h_0}\theta_d r \quad (72)$$

が得られる。ここで、(71), (72) 式に (19) 式を代入すれば、 $w(t, r) = w_d(r)$, $\varphi(t, r) = \varphi_d(r)$ が示される。

以上より、 $\dot{V}(x) = 0$ を唯一満たす $\dot{\theta} = 0$ の下で得られた状態 x すなわち不変集合は目標状態 x_d のみであるので、LaSalle の定理より x_d が漸近安定であることが示された。

5. シミュレーション

PDS 制御則の有効性を数値シミュレーションにより検証する。シミュレーションモデルとして、長さ 0.85[m]、厚さ 2.85[mm]、幅 40[mm] のフレキシブルアームの先端に重量 1.34[kg] の剛体負荷を取り付けたものを想定した。その他の物理パラメータを Table 1 に示す。また、シミュレーションモデルは振動の第 4 モードまで含むものとした。

目標力 f_d は 2.0[N] とし、これに対応する目標回転角度 θ_d は 0.0693[rad]、目標の曲げモーメント $EIw_d''(0)$ は 1.76[Nm]、目標のねじれモーメント $GJ\varphi_d'(0)$ は -0.260[Nm] である。

(a) $(K_p = 50, K_d = 5, K_s = 0)$ (b) $(K_p = 50, K_d = 10, K_s = 0)$

Fig. 2 Step Responses for PD Control

(a) $(K_p = 50, K_d = 10, K_s = 5)$ (b) $(K_p = 50, K_d = 10, K_s = -0.5)$

Fig. 3 Step Responses for PDS Control

目標力へのステップ応答を Fig. 2, Fig. 3 に、モータトルクへのインパルス外乱応答を Fig. 4 に示す。それぞれの結果は、上段から力 $f(t)$ 、回転角度 $\theta(t)$ 、曲げモーメント $EIw''(t, 0)$ 、ねじれモーメント $GJ\varphi'(t, 0)$ の時間応答を表わす。インパルス外乱として、時刻 $t = 1$ [sec] に大きさ 2[Nm] のトルク外乱を 0.05 秒間与えた。

Fig. 2 は PD 制御の結果であり、フィードバックゲインは、(a) では $K_p = 50, K_d = 5, K_s = 0$, (b) では $K_p = 50, K_d = 10, K_s = 0$ とした。PD 制御では、力制御の立ち上がりで励起された振動は目標値の周りで残留し、あまり抑制

Fig. 4 Responses for disturbance

されない。(b)では、(a)に比べて K_d を大きくすることで応答の立ち上がりを速くしたが、励起された振動は抑制されない。さらに、 K_d を大きくしても同様な傾向が得られる。

Fig. 3はPDS制御の結果であり、フィードバックゲインは、(a)では $K_p = 50, K_d = 10, K_s = 5$, (b)では $K_p = 50, K_d = 10, K_s = -0.5$ とした。(a)のゲインは、力応答の立ち上がりがFig. 2(a)と同じになるように選んだ。PD制御に比べてPDS制御の振動抑制効果が大いことがわかる。また、PDS制御では、曲げ振動だけでなくねじれ振動に対しても抑制効果が確認できる。一方、(b)では、力応答の立ち上がりが(a)に比べて遅くなったものの、持続的な振動が残っている。これについて、以下のように考察する。3章に、漸近安定性を保証する曲げ歪フィードバックゲインは $K_s > -1$ であることが示されている。ここで、 $-1 < K_s < 0$ は $k_1 > k_2$ に対応する。これを、リアプノフ関数(20)のエネルギーから考えると、モータ負荷のエネルギーすなわち振動系のエネルギーに比べて、モータの回転エネルギーを大きくすることになることから、弾性振動効果は期待できない。一方、 $K_s > 0$ は $k_1 < k_2$ に対応する。これは、モータの回転エネルギーに比べて振動系のエネルギーを大きくすることになることから、弾性振動効果が期待できる。これらの考察は、Fig. 3の結果から妥当性が示される。結局、PDS制御で歪みフィードバックゲインを正にとれば振動抑制が期待でき、ゲインを上げることでその効果は大きくなることが確認された。

Fig. 4(a)はPD制御、(b)はPDS制御でのインパルス外乱応答である。フィードバックゲインは、PD制御の場合にはFig. 2(a)と、PDS制御の場合にはFig. 3(a)と同じものを用いた。これらの結果からも、PD制御に比べてPDS制御の振動抑制効果が大いことがわかる。

6. おわりに

本論文では、アームの先端に剛体負荷を持つフレキシブルアームの力制御問題を考え、ダイナミクスベース制御に基づく出力フィードバック制御器を導出し、漸近安定性を証明した。導出された制御器は、モータ角度のPD制御に加え、アーム根元での曲げモーメントのフィードバック、さらに力制御を実現するための定常トルクから構成されている。これは、曲げ・ねじれの結合振動系に対して、ねじれモーメントの情報を制御器に用いることなく、漸近安定性が保証されることを示している。提案した制御器の有効性は、振動抑制効果の点からシミュレーションによって検証された。

今後、ダイナミクスベース力制御の有効性を、実機によって検証する予定である。さらに、今後の課題として、先端に剛体負荷を持つ双腕フレキシブルアームを用いた協調制御が考えられる。

参考文献

- 金子真編：フレキシブルアーム特集，日本ロボット学会誌，**6-5**, 415/466 (1988)
- 松野文俊編：フレキシブル・マニピュレータ特集，日本ロボット学会誌，**12-2**, 169/230 (1994)
- Y. Sakawa and Z.H. Luo: Modeling and control of coupled bending and torsional vibrations of flexible beams, IEEE Trans. Automatic Control, **AC-34-9**, 970/977 (1989)
- 羅，坂和：フレキシブルアームの曲げ・ねじり連成振動の制御実験，計測自動制御学会論文集，**27-4**, 422/428 (1991)
- 松野，村地，坂和：フレキシブル・ビームの曲げ・ねじり非結合性振動のフィードバック制御，システム制御情報学会論文集，**5-6**, 244/252 (1992)
- 松野，梅山，笠井，神澤：フレキシブル・アームの曲げ・ねじれ結合振動と力のロバスト制御，計測自動制御学会論文集，**33-7**, 674/679 (1997)
- 松野，神澤：曲げ・ねじり変形を考慮したアームに対する力フィードバックの安定性解析とロバスト力制御，日本ロボット学会誌，**15-5**, 789/794 (1997)
- Y. Morita, F. Mastuno, Y. Kobayashi, T. Kanzawa, H. Ukai and H. Kando: Robust Force Control of a Flexible Arm with a Nonsymmetric Rigid Tip Body, J. Robotic Systems, **18-5**, 221/235 (2001)
- 大須賀，松野：マニピュレータにおける受動性のロバスト性について，日本ロボット学会誌，**19-1**, 75/80 (2001)
- 松野文俊：機械システムのタスクディレクティブモデリング，システム/制御/情報，**42-9**, 477/486 (1998)
- 松野，大野，田中：集約的および分布的柔軟性を持った大型宇宙構造物の分布定数制御（ばね結合した2本の柔軟ビームの場合），計測自動制御学会論文集，**34-12**, 1889/1896 (1998)
- S. Kasai and F. Matsuno: Force Control of One-Link Flexible Arms mounted on a Linear Motor with PD and Shear Force (PDSF) Feedback, Proc. IEEE Int. Conf. on Industrial Electronics, Control and Instrumentation (IECON-2000), 195/200 (2000)
- J.K. Hale: Dynamical Systems and Stability, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **26**, 39/59 (1969)

[著者紹介]

森田 良文 (正会員)

1989年名古屋工業大学大学院電気情報工学専攻博士前期過程修了。89年日本電装(株)に入社。91年岐阜工業高等専門学校助手。2000年より名古屋工業大学講師(電気情報工学科)となり、現在に至る。主に、フレキシブルマニピュレータの制御と応用、リハビリ支援システムに関する研究に従事。電気学会、日本ロボット学会、日本機械学会、IEEEなどの会員(工学博士)。

松野 文俊 (正会員)

1986年大阪大学大学院基礎工学研究科博士課程修了。大阪大学基礎工学部助手、神戸大学工学部講師、同助教授を経て、96年より東京工業大学大学院総合理工学研究科助教授(知能システム科学専攻)となり、現在に至る。主に、ロボット・大型宇宙構造物の制御、分布定数系の制御に関する研究に従事。IEEE、日本ロボット学会、システム制御情報学会などの会員(工学博士)。

小林 幸洋

1999年名古屋工業大学電気情報工学科卒業。2001年同大学大学院電気情報工学専攻博士前期過程修了。2001年、豊田工機(株)に入社。在学中、フレキシブルアームのロバスト制御の研究に従事。

池田 素久 (学生会員)

2001年名古屋工業大学電気情報工学科卒業。現在、同大学大学院電気情報工学専攻博士前期過程に在学中。

鵜飼 裕之 (正会員)

1979年名古屋工業大学大学院計測工学専攻修士課程修了。80年名古屋工業大学助手、同講師を経て、98年より同助教授(システムマネジメント工学科)となり、現在に至る。主に、分布定数系の制御理論、弾性構造物や電力系統などの制御応用に関する研究に従事。電気学会、日本原子力学会、IEEEなどの会員(工学博士)。

神藤 久 (正会員)

1970年京都大学大学院電気工学専攻修士課程修了。74年名古屋工業大学助手、同助教授を経て、98年より同教授(電気情報工学科)となり、現在に至る。主に、デジタル制御、多次元デジタル信号処理、大規模システム理論などに関する研究に従事。システム制御情報学会、電気学会、IEEEなどの会員(工学博士)。