$\mathcal{L}_2$ 性能基準に基づく静的 Anti-windup 補償器の設計

和田 信 敬*・佐 伯 正 美*

Design of a Static Anti-windup Compensator Based on $\mathcal{L}_2$ Performance Criterion

Nobutaka WADA* and Masami SAEKI*

In this paper, we will present a design method of a static anti-windup compensator that satisfies $\mathcal{L}_2$ performance criterion. The design problem is formulated as a convex optimization problem with linear matrix inequality (LMI) constraints. A numerical example is provided to illustrate effectiveness of the proposed method.

Key Words: input saturation, anti-windup, $\mathcal{L}_2$ performance criterion, linear matrix inequality

1. はじめに

アクチュエータ出力の振幅制限に起因する制御性能の劣化を抑制する実用的な制御系設計法の一つに、Anti-windup 補償器を用いる方法があり、これまでに、閉ループ系の内部安定性や $\mathcal{L}_2$ ゲイン性能を保証する Anti-windup 補償器の設計法が示されている^{3), 5), 7)}。これらの設計法は、ステップ入力などの $\mathcal{L}_2$ に含まれない外部入力に加わった場合における系の安定性や時間応答を厳密に考慮することが困難であり、そのような場合を扱うことの可能な制御系の設計法や解析法が近年検討されている^{4), 6), 8)}。

文献 6) では、Anti-windup 性能の評価指標として、飽和を含まない仮想的線形制御系と Anti-windup 制御系のプラント出力の誤差の $\mathcal{L}_2$ ノルムが提案された。本稿ではこれを $\mathcal{L}_2$ 性能基準と呼ぶことにする。この基準を用いると、 $\mathcal{L}_2$ に含まれない外部入力に加わった場合における系の安定性や時間応答を厳密に考慮した制御系設計を行なうことが可能となる。これまでに、 $\mathcal{L}_2$ 性能基準に基づく動的 Anti-windup 補償器の系統的な設計法が文献 1), 6) で示されている。一方、実装時における計算負荷が小さく実用上重要な静的補償器については、文献 4) で、1 パラメータの Anti-windup 補償器をラインサーチで設計する方法が示されているのみであり、この手法は高次の制御器や多変数系に適用することは困難である。そこで本稿では、高次制御器や多変数系に適用可能な $\mathcal{L}_2$ 性能基準に基づく静的 Anti-windup 補償器の一設計法を示す。さらに、数値シミュレーションにより動的補償器を用いた場合と比較検証する。

本稿では、以下の記号を用いる。飽和要素 $\phi_a(\cdot)$ と不感帯要素 $\psi_a(\cdot)$ をそれぞれ次式で定義する。

$$\phi_a(v) = \begin{cases} a \cdot \text{sgn}(v), & |v| > a \\ v, & |v| \leq a \end{cases}, \quad \psi_a(v) = v - \phi_a(v)$$

ただし、 $a = 1$ のとき a は省略する。また、 $A = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$, $a_i > 0$ とするとき、多変数飽和要素を $\Phi_A(v) = (\phi_{a_1}(v_1), \dots, \phi_{a_n}(v_n))^T$ で、多変数不感帯要素を $\Psi_A(v) = (\psi_{a_1}(v_1), \dots, \psi_{a_n}(v_n))^T$ で次式で定義する。ただし、 $A = I$ のとき A は省略する。 $v \in \mathcal{R}^n$ に関するユークリッドノルムを $\|v\|_2 := (v^T v)^{1/2}$ で表わす。 $\|v\|_{\mathcal{L}_2[0, T]} := (\int_0^T v(t)^T v(t) dt)^{1/2}$ である。また、 $[0, \infty)$ 上で定義される信号 $v(t)$ について、 $\|v\|_{\mathcal{L}_2} := (\int_0^\infty v(t)^T v(t) dt)^{1/2}$ が有界になる場合に、 $v \in \mathcal{L}_2$ と表わす。また、以下の記号を用いる。

$$\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] = C(sI - A)^{-1}B + D$$

2. 問題設定

次式で記述される線形制御系について考える。

$$y_{lin} = P u_{lin}, \quad u_{lin} = K \begin{bmatrix} r \\ y_{lin} \end{bmatrix} \quad (1)$$

ここで、 $u_{lin} \in \mathcal{R}^{n_u}$, $y_{lin} \in \mathcal{R}^{n_y}$, $r \in \mathcal{R}^{n_r}$ である。 $P(s)$ はプラントであり、その実現は次式で与えられるものとする。

$$P = \left[\begin{array}{c|c} A_p & B_p \\ \hline C_p & 0 \end{array} \right] \quad (2)$$

本稿では、 $P(s)$ は漸近安定であるものとする。 $K(s)$ はコントローラを表わし、その実現は次式で与えられるものとする。

$$K = [K_1, K_2] = \left[\begin{array}{c|cc} A_c & B_{c1} & B_{c2} \\ \hline C_c & D_{c1} & D_{c2} \end{array} \right] \quad (3)$$

ここで、 $K(s)$ は (1) 式の制御系を安定化し、かつ、所望の仕様を満たすように設計されているものとする。つぎに、次式で記述される Anti-windup 制御系について考える。

$$y = Pu, \quad u = \Phi(\tilde{u}), \quad \tilde{u} = \tilde{K} \begin{bmatrix} r \\ y \\ u - \tilde{u} \end{bmatrix} \quad (4)$$

ここで、 $u, \tilde{u} \in \mathcal{R}^{n_u}$, $y \in \mathcal{R}^{n_y}$ である。また、 $\tilde{K}(s)$ の実現は次式で与えられるものとする。

$$\tilde{K} = [K_1, K_2, K_3] = \left[\begin{array}{c|ccc} A_c & B_{c1} & B_{c2} & \Lambda_1 \\ \hline C_c & D_{c1} & D_{c2} & \Lambda_2 \end{array} \right] \quad (5)$$

* 広島大学大学院工学研究科 東広島市鏡山 1-4-1

* Graduate School of Engineering, Hiroshima University, Higashi-Hiroshima

(Received November 28, 2001)

(Revised April 4, 2002)

Fig. 1 Subsystem for closed-loop stability

(5) 式の K_1 と K_2 は, (3) 式と同一であるものとする. 定数行列 Λ_1, Λ_2 は, $u \neq \tilde{u}$ の場合のみ作動する補償器であり, これを静的 Anti-windup 補償器と呼ぶことにする. 本稿では, 以下の設計問題について考察する.

[問題 1] (1) 式の線形制御系と, (4) 式の Anti-windup 制御系について考える. 次式を満たし, かつ γ を最小化する Λ_1, Λ_2 を設計せよ.

$$\|y - y_{lin}\|_{\mathcal{L}_2} \leq \gamma \|\Psi(u_{lin})\|_{\mathcal{L}_2} \quad (6)$$

線形制御系 (1) のコントローラ出力 u_{lin} が定常的に飽和値以下となる場合, $\|\Psi(u_{lin})\|_{\mathcal{L}_2}$ は有界となる. そのような u_{lin} を生成する目標入力 r が加わる場合, (6) 式が成立するならば, Anti-windup 制御系 (4) のプラント出力 y は, 線形制御系のプラント出力 y_{lin} に漸近的に追従する. このとき目標入力 r としては, ステップ入力や正弦波などの持続的な外部入力も含まれることに注意されたい. (6) 式は文献 6) で提案された Anti-windup 制御系の性能基準であり, 本稿ではこれを $\mathcal{L}_2$ 性能基準と呼ぶことにする. 次節では, 問題 1 に対する解法を導く準備として, (6) 式の不等式条件を具体的に導出する.

3. $\mathcal{L}_2$ 性能の上界

線形制御系 (1) と Anti-windup 制御系 (4) の偏差系は次式で表わされる.

$$y - y_{lin} = -P(G + I)d \quad (7)$$

$$\tilde{u} - u_{lin} = -Gd, \quad d = \tilde{u} - \Phi(\tilde{u}) = \Psi(\tilde{u}) \quad (8)$$

ただし, $G(s) = (I - K_2P)^{-1}(K_2P + K_3)$ である. ここで, 不感帯要素 $\Psi(\cdot)$ に関する以下の補題を導入する.

[補題 1] 任意の $F = \text{diag}[f_1, \dots, f_{n_u}] > 0$ および $x, y \in \mathcal{R}^n$ について考える. ただし, x, y は $\Psi_F(x), y \in \mathcal{L}_{2[0,T]}$ を満たすものとする. このときつぎの関係が成立する¹⁾.

$$\|\Psi_F(x + y)\|_{\mathcal{L}_{2[0,T]}} \leq \|\Psi_F(x)\|_{\mathcal{L}_{2[0,T]}} + \|y\|_{\mathcal{L}_{2[0,T]}}$$

(証明) 任意の $f_i > 0, x_i, y_i \in \mathcal{R}$ について,

$$|\psi_{f_i}(x_i + y_i)| \leq |\psi_{f_i}(x_i)| + |y_i|$$

が明らかに成立する. 上式の両辺をそれぞれ二乗し, $i = 1, \dots, n_u$ で和をとり, Schwartz の不等式を適用すると,

$$\|\Psi_F(x + y)\|_2^2 \leq \|\Psi_F(x)\|_2^2 + \|y\|_2^2 + 2\|\Psi_F(x)\|_2\|y\|_2$$

を得る. さらに, 上式の両辺を $[0, T]$ で積分し, Schwartz の不等式を適用すると, 補題の関係が得られる. $\square$

補題 1 を用いることで, 以下の定理が得られる.

《定理 1》 ある与えられた $F = \text{diag}[f_1, \dots, f_{n_u}] > 0$ につ

Fig. 2 Equivalent system

いて, 次式を満たす Λ_1, Λ_2 が存在するものとする.

$$\|F(G + I) - I\|_\infty < 1 \quad (9)$$

さらに, $\Psi(u_{lin}) \in \mathcal{L}_2$ であるとき, 以下の関係が成立する.

$$\|y - y_{lin}\|_{\mathcal{L}_2} \leq \frac{\|F\| \|P(G + I)\|_\infty}{1 - \|F(G + I) - I\|_\infty} \|\Psi(u_{lin})\|_{\mathcal{L}_2} \quad (10)$$

(証明) (8) 式より, Anti-windup 制御系 (4) と安定性の点で等価な Fig. 1 の部分システムが得られる. さらに, Fig. 1 のシステムは, Fig. 2 のシステムに等価変換できる. ここで, $q = Fu_{lin} - \{F(G + I) - I\}d$ とするとき, $d = \Psi(\tilde{u}) = \Psi_F(q)$ が成立することに注意し, Fig. 2 の閉ループ系に補題 1 を適用すると, 任意の時間区間 $[0, T]$ で

$$\begin{aligned} \|d\|_{\mathcal{L}_{2[0,T]}} &= \|\Psi_F(Fu_{lin} - \{F(G + I) - I\}d)\|_{\mathcal{L}_{2[0,T]}} \\ &\leq \|\Psi_F(Fu_{lin})\|_{\mathcal{L}_{2[0,T]}} + \|F(G + I) - I\|_\infty \|d\|_{\mathcal{L}_{2[0,T]}} \\ &\leq \frac{\|F\|}{1 - \|F(G + I) - I\|_\infty} \|\Psi(u_{lin})\|_{\mathcal{L}_{2[0,T]}} \end{aligned} \quad (11)$$

の関係が成立する. ただし, 最後の不等式の導出の際に, (9) 式と $\Psi_F(Fu_{lin}) = F\Psi(u_{lin})$ の関係を用いた. (11) 式の関係は $T \rightarrow \infty$ でも成立し, かつ, 仮定より $\Psi(u_{lin}) \in \mathcal{L}_2$ なので右辺は有界となる. (11) 式において $T \rightarrow \infty$ としたものと (7) 式より, (10) 式の関係が得られる. $\square$

(10) 式は, (6) 式の形式となっている. (10) 式は, 文献 1) で定理を証明する際用いられている手法を本稿のクラスの補償器に適用し導出している. 文献 1) では, 既約分解型動的 Anti-windup 補償器の設計法が示されている. なお, $\Psi_F(\cdot)$ はセクタ $[0, 1]$ により覆われるので, (9) 式が満たされるとき, Fig. 2 の系の内部安定性は大域的に保証される.

(注意) スカラ系の場合, (9) 式の条件は, 複素平面上において $G(j\omega)$ のナイキスト軌跡が, 中心 $(1/f - 1, 0)$, 半径 $1/f$ の円領域の内部に存在することを要求する. この円領域は, f を小さく選ぶと, 実軸と $(-1, 0)$ で直交する線分より右側の領域に拡大される. すなわち, (9) 式の条件は, f を小さい値に選ぶと円板条件に近づく.

4. LMI に基づく設計法

本節では, (10) 式の右辺を小さくする Λ_1, Λ_2 の具体的な設計法を示す. 以下の問題について考える.

[問題 2] ある与えられた $F > 0, 0 < \delta \leq 1$ について, 以下の制約のもと, μ を最小化する Λ_1, Λ_2 を設計せよ.

$$\|F(G + I) - I\|_\infty < \delta, \quad \|P(G + I)\|_\infty < \mu \quad (12)$$

問題2は、(10)式の右辺の分母がある値以下となるように固定しておき、その上で、分子を最小化するように Λ_1, Λ_2 を設計することを意味する。(12)式は、有界実の補題より、それぞれ以下の行列不等式条件に帰着できる。

$$\begin{bmatrix} AQ + QA^T & QC^T & B \\ CQ & -\delta I & D \\ B^T & D^T & -\delta I \end{bmatrix} < 0, Q = Q^T > 0 \quad (13)$$

$$\begin{bmatrix} AR + RA^T & RC_y^T & B \\ C_y R & -\mu I & 0 \\ B^T & 0 & -\mu I \end{bmatrix} < 0, R = R^T > 0 \quad (14)$$

ただし、

$$A = \begin{bmatrix} A_c & B_{c2}C_p \\ B_pC_c & A_p + B_pD_{c2}C_p \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \Lambda_1 \\ B_p(I + \Lambda_2) \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} FC_c & FD_{c2}C_p \end{bmatrix}, C_y = \begin{bmatrix} 0 & C_p \end{bmatrix}$$

および $D = F(\Lambda_2 + I) - I$ である。(13), (14) 式は変数 $\Lambda_1, \Lambda_2, Q, R, \mu$ に関する LMI 条件なので、問題2は、数値的最適化手法により容易に解くことが可能である。ところで、本来小さくしたいのは μ でなく、 $\gamma_{ub} := \|F\| \|P(G+I)\|_\infty / (1 - \|F(G+I) - I\|_\infty)$ である。 γ_{ub} を最小化する解を得るには、 δ に関するラインサーチが必要である。また、行列 F を変数とみなした場合、(13)式は変数 Λ_2, Q, F に関する双線形項を含む BMI 条件となる。ここでは、 F を定数とみなすことで LMI 条件に帰着している。

5. 数値例

以下の $P(s)$ と $K(s)$ について考える⁶⁾。

$$P(s) = \frac{1}{10s+1} \begin{bmatrix} 15 & 40 \\ 12 & 30 \end{bmatrix}$$

$$K(s) = \frac{10s+1}{s} \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & -1/10 & 0 & 1/10 \end{bmatrix}$$

$F = 0.01I$ とし、 $\delta = 0.99$ と $\delta = 0.2$ の二つの場合について Λ_1, Λ_2 の設計を行なった。このときの μ および γ_{ub} の値を Table 1 に示す。 δ を 1 に近い値に設定すると、 μ と γ_{ub} は小さくなっている。 $r(t) = [0.6, 0.4]^T, (t \geq 0)$ に対するステップ応答を Fig. 3 に示す。Anti-windup 補償器を用いていない制御系は不安定化している(破線)が、 $\delta = 0.99$ として設計した Anti-windup 補償器を用いた制御系のプラント出力(実線)は、線形制御系のプラント出力(一点鎖線)とほぼ一致している。 $\delta = 0.2$ として得た Anti-windup 補償器を用いた場合(点線)、目標値に追従するのに時間を要している。Fig. 4 に他の設計法による Anti-windup 補償器を用いた制御系の応答を示す。CT(Conditioning Technique)法²⁾による Anti-windup 補償器を用いた制御系は不安定化している(一点鎖線)。提案手法による静的 Anti-windup 補償器を用いた応答(実線)と文献6)の動的 Anti-windup 補償器を用いた応答(破線)はほぼ一致している。

Table 1 Relation between δ, μ and γ_{ub}

δ	μ	γ_{ub}
0.99	53.65	53.56
0.2	4582	54.24

Fig. 3 $y(t)$ (dash-dot:unconstrained, solid:with AWC ($\delta = 0.99$), dotted:with AWC ($\delta = 0.2$), dashed:w/o AWC)

Fig. 4 $y(t)$ (solid:with proposed AWC, dashed:dynamic AWC⁶⁾, dash-dot:CT²⁾)

6. おわりに

$\mathcal{L}_2$ 性能基準に基づく静的 Anti-windup 補償器の一設計法を示した。本設計法を用いると過渡応答を比較的に見通し良く調整でき、静的補償器でも動的補償器と同等の性能を発揮しうることを数値例を用いて示した。ただし、動的補償器の場合^{1), 6)}と異なり、静的補償器の場合には、プラントが漸近安定であっても可解でないことがある。これは、(9)式を満たす解が存在しない可能性があるためであり、そのような場合における設計法の構築が今後の課題として挙げられる。

参考文献

- 1) S. Crawshaw and G. Vinnicombe: Anti-windup synthesis for guaranteed $\mathcal{L}_2$ performance; *Proc. IEEE CDC* (2000)
- 2) R. Hanus, M. Kinnaert and J.-L. Henrotte: Conditioning Technique, a General Anti-windup and Bumpless Transfer Method; *Automatica*, **23**-6, 729/739 (1987)
- 3) E.F. Mulder, M.V. Kothare and M. Morari: Multivariable Anti-Windup Controller Synthesis Using Linear Matrix Inequalities; *Automatica*, **37**-9, 1407/1416 (2001)
- 4) A. Rantzer: A Performance Criterion for Anti-windup Compensators; *European Journal of Control*, **6**, 449/452 (2000)
- 5) M. Saeki and N. Wada: Synthesis of a Static Anti-windup Compensator via Linear Matrix Inequalities, *Int. J. Robust & Nonlinear Control* (to appear)
- 6) A.R. Teel and N. Kapoor: The $\mathcal{L}_2$ anti-windup problem: Its definition and solution; *Proc. ECC* (1997)
- 7) 和田, 佐伯: ロバスト安定性を保証する静的 Anti-Windup 補償器の設計; システム制御情報学会論文誌, **12**-11, 664/670 (1999)
- 8) 渡辺, 内田, 藤田: 出力可到達集合解析に基づいたアンチワインドアップコントローラの解析; 計測自動制御学会論文集, **35**-7, 861/868 (1999)