はめ込みによるモデル構造簡略化の代数的特徴づけ†

大塚 敏之*

Algebraic Characterization of Model Structure Simplification via Immersion†

Toshiyuki OHTSUKA*

This paper considers quadratic-in-the-state representations, which consist of state equations that are at most quadratic with respect to the states, as representations for a broad class of nonlinear systems. A necessary and sufficient condition is shown for existence of a quadratic-in-the-state representation that has the identical input-output map with a given nonlinear system. That condition is characterized by the algebraic structure of the observation space of the given system and is so mild that many types of nonlinear systems have a quadratic-in-the-state representation. A sufficient condition is also shown in terms of differentially algebraic functions, which is useful to check the existence of a quadratic-in-the-state representation for most of practical systems.

Key Words: nonlinear systems, model structure, input-output map, immersion, quadratic-in-the-state representation

1. はじめに

パラメータ推定手法を非線形系の同定に適用する際には、パラメトリックなモデル構造が事前にわかっていなければならない。ここでいう構造とは、どのような関数が含まれるか、という情報のことをいう。線形系の場合は状態量と入力に関して線形な関数しか含まないが、非線形系の場合は何ら制限が無い。幅広いクラスの非線形系を表わすことのできる構造を持つ状態方程式を用いれば、モデル構造に対する事前の仮定は少なくともすむ。したがって、幅広いクラスの非線形系を表わすことのできるモデル構造を見出すことは重要な課題である。非線形システム同定の分野ではさまざまなモデル構造が提案されてきたが^{1)~4)}、非線形系のモデルが含みうる関数には制限が無い場合、完全に同一の入出力関係を表現するのではなく、近似できれば良しとすることが多い。フィードバック線形化⁵⁾のように、与えられた非線形系を特殊な形式に変換する手法もあるが、適用可能なシステムが限られている上に、フィードバック変換を行なうには状態方程式が既知でなければならないため、未知な非線形系の同定には適さない。

一方、非線形系のはめ込み^{6)~8)}は、与えられたシステムを入出力関係が等しいほかのモデル構造へ変換する写像であり、同定に利用できると考えられる。与えられたシステムが

ある特定の構造を持つシステムへはめ込み可能であることさえわかっているならば、元のシステムの構造やはめ込み自体は未知であっても、与えられたシステムと同じ入出力関係を持ち特定の構造で表わされるシステムをパラメータ推定により決定できる可能性がある。従来の研究では、線形系⁶⁾や双線形系⁹⁾へのはめ込みが論じられており、はめ込み可能性の必要十分条件も得られている。しかし、線形系や双線形系にはめ込み可能なシステムは限られており、また、線形系や双線形系では幅広い非線形系の入出力関係を表わすことができないことも明らかである。双線形系は多くの非線形系を近似できることが知られているが^{10), 11)}、入力が無ければ線形系にはかならない。

線形系や双線形系と比較してきわめて幅広いクラスの非線形系がはめ込み可能なモデル構造として、状態量に関してただか2次までの多項式からなる状態2次表現がある¹²⁾。状態2次表現へはめ込み可能であるための必要十分条件は緩く、実用上ほとんどの非線形系の入出力関係が状態2次表現で表わされる。したがって、未知非線形系のモデル構造として状態2次表現を用い、そこに含まれる係数を何らかのパラメータ推定手法で決定する、という同定手法が考えられる。

しかし、文献12)で考えられたクラスのはめ込みの存在は、非常に緩い条件のもとで保証されるものの、与えられたシステムと同一の入出力関係を持つ状態2次表現の存在に対しては十分条件である。そこで、本論文では、はめ込みの定義を整理し、従来あまり意識されていなかったはめ込みの区別を導入する。そして、与えられたシステムと同一の入出力関係を持つ状態2次表現が存在するための必要十分条件を示す。ただし、状態の有理式からなる状態有理式表現へのはめ込み

† 第2回制御部門大会で一部発表(2002・5)および第31回制御理論シンポジウムで一部発表(2002・10)

* 大阪大学大学院工学研究科 吹田市山田丘2-1

* Graduate School of Engineering, Osaka University, Suita
(Received May 12, 2003)

(Revised August 21, 2003)

可能性と状態 2 次表現へのはめ込み可能性とが等価であることはすでに示されているので¹²⁾, 実際には状態有理式表現へのはめ込み可能性条件を与える. この条件はシステムの観測空間が有限生成な体に含まれるか否かのみで与えられ, 既存のはめ込み可能性条件より緩い. さらに, はめ込み可能性の判別に有用な十分条件として, システムの状態空間表現が微分代数関数¹³⁾のみを含めば状態有理式表現および状態 2 次表現にはめ込み可能であることを示す.

なお, システムのはめ込みに関しては, 閉ループ系が望ましい性質を持つようフィードバック制御によってはめ込みを構成する手法^{5), 14)}があるが, 本研究ではシステムの開ループ特性のみに着目し, フィードバックはまったく用いない. また, 変数を拡張することで微分方程式の構造を変換するはめ込みと類似のアイデアは, アナログ計算可能性の研究^{15)~17)}や, 非多項式型の微分方程式を多項式型に変換する手法^{18), 19)}においても用いられている. しかし, アナログ計算可能性はシステムではなく静的関数の性質であり, 多項式型微分方程式への変換も状態空間表現の入出力関係を保存する変換と厳密には一致しない. それに対し本研究では, 入出力関係を保ちながら状態空間表現を特定の構造へ変換するための必要十分条件を与える. モデル構造に関するほかの結果としては, 適切に変数を拡張しない限り限られたクラスのシステムしか有理式のモデル構造では実現できないこと²⁰⁾と, 離散時間系では多項式のモデル構造を考える限り多項式の入出力関係しか表現し得ないこと²¹⁾とが知られている. これらと比較して本論文の結果は適用範囲が広い.

本論文の構成は以下のとおりである. まず第 2 節では, 本論文で扱うシステムのはめ込みとモデル構造を定義し, それらの性質を整理する. 第 3 節では, 状態有理式表現へのはめ込み可能性条件を観測空間の代数的構造によって特徴づける. 第 4 節では, 微分代数関数を用いたはめ込み可能性の十分条件を与える. 第 5 節では, いくつかの例題によってはめ込みとはめ込み可能性条件の性質を明らかにする.

2. システムのはめ込みとモデル構造

本論文で扱うシステムは, 以下のような形で表わされる解析的な非線形系とする.

$$\Sigma \begin{cases} \dot{x} = g_0(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x)u_i \\ y = h(x) \end{cases},$$

ここで $x(t) \in U \subset \mathbf{R}^n$ は状態ベクトル, U は開集合, $u(t) = [u_1(t), \dots, u_m(t)]^T \in \mathbf{R}^m$ は入力ベクトル, $y(t) \in \mathbf{R}^p$ は出力ベクトルとする. このシステムを $\Sigma(g_0, g_1, \dots, g_m, h)$ または単に Σ と表わすことにする. システム Σ が U で解析的であるとは, $g_i: U \rightarrow \mathbf{R}^n$ ($i \in I_{0,m}$) と $h: U \rightarrow \mathbf{R}^p$ が解析的であることとする. なお, 添え字の集合を $I_{i_1, i_2} = \{i \in \mathbf{Z} : i_1 \leq i \leq i_2\}$ および $I_{i_1, \infty} = \{i \in \mathbf{Z} : i \geq i_1\}$ と定義する. 入力関数

$u: [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}^m$ の集合 Ω は共通な上界を持つ有界な区分的連続関数からなるとする. 共通な上界で入力をスケールリングすることにより, 一般性を失わずに $|u_i(t)| \leq 1$ ($t \geq 0, i \in I_{1,m}$) と仮定できる. 時刻 $t = 0$ において初期状態 x_0 から出発し, 入力関数 u が加えられたシステム Σ の出力を $y_\Sigma^u(t, x_0)$ と表わすことにする. 観測空間 $\mathcal{O}_\Sigma$ を次式で定義する.

$$\mathcal{O}_\Sigma = \text{span}\{L_{g_{i_1}} \dots L_{g_{i_k}} h_j : (i_1, \dots, i_k) \in I_{0,m}^k, \\ j \in I_{1,p}, k \in I_{0,\infty}\},$$

ここで $h = [h_1, \dots, h_p]^T$, $L_{g_i} h_j = (\partial h_j / \partial x) g_i$ である. 点 $x_0 \in U$ における可観測性コディストリビューションは以下で定義される $\mathbf{R}$ 上のベクトル空間である.

$$d\mathcal{O}_\Sigma(x_0) = \text{span}\{d\eta(x_0) : \eta \in \mathcal{O}_\Sigma\}.$$

ここで $d\eta = \partial \eta / \partial x$ である.

【定義 1】^{6)~8)} ある開集合 $U \subset \mathbf{R}^n$ で定義されたシステム $\Sigma(g_0, \dots, g_m, h)$ が U の開部分集合 U' 上で $\tilde{n}$ 次元システム $\tilde{\Sigma}(\tilde{g}_0, \dots, \tilde{g}_m, \tilde{h})$ へはめ込み可能であるとは, 解析的な写像 $\alpha: U' \rightarrow \mathbf{R}^{\tilde{n}}$ が存在して, $\tilde{\Sigma}$ が $\alpha(U')$ を含む開集合で解析的であり, かつ任意の $x_0 \in U'$ と任意の $u \in \Omega$ に対して, すべての十分小さな $t > 0$ で以下が成り立つことをいう.

$$y_\Sigma^u(t, x_0) = y_{\tilde{\Sigma}}^u(t, \alpha(x_0)).$$

そのような写像 α を Σ の $\tilde{\Sigma}$ へのはめ込みという. 文脈から明らかなときや $U' = U$ のときは U' を明記しない.

システムのはめ込みは, 多様体のはめ込み²²⁾のように α のヤコビアンが単射であることを要求せず, 単に入出力関係を保存すればよい. また, ここでの入出力関係とは, 入力が無い自律系の初期値応答も含むものとする. つぎの定理により, 与えられた写像 α がはめ込みであるか否かが判別できる. **《定理 1》** $U \subset \mathbf{R}^n$ を開集合, $\alpha: U \rightarrow \mathbf{R}^{\tilde{n}}$ を解析的な写像, $\Sigma(g_0, \dots, g_m, h)$ を U で解析的なシステム, $\tilde{\Sigma}(\tilde{g}_0, \dots, \tilde{g}_m, \tilde{h})$ を $\alpha(U)$ を含む開集合で解析的なシステムとする. α が Σ の $\tilde{\Sigma}$ へのはめ込みであるための必要十分条件は, 任意の $x_0 \in U$ に対して以下が成り立つことである.

$$L_{g_{i_1}} \dots L_{g_{i_k}} h(x_0) = L_{\tilde{g}_{i_1}} \dots L_{\tilde{g}_{i_k}} \tilde{h}(\alpha(x_0)), \\ (i_1, \dots, i_k) \in I_{0,m}^k, k \in I_{0,\infty}. \quad (1)$$

(証明) システム Σ と $\tilde{\Sigma}$ の Fliess 汎関数級数展開⁵⁾を, それぞれ x_0 と $\alpha(x_0)$ で考える. (1) 式は, 二つの級数展開の対応する係数がすべて等しいことを意味する. 一方, Ω に属する任意の入力に対して二つの解析的システムの出力が等しいことは, 両者の Fliess 級数展開が等しいことと等価であるから, 定理が成り立つ. $\square$

定理 1 を用いて, システムのはめ込みと多様体のはめ込みを以下のように関係付けることができる.

《定理 2》 ある開集合 $U \subset \mathbf{R}^n$ で定義されたシステム Σ が $\tilde{n}$ 次元システム $\tilde{\Sigma}$ へはめ込み可能であるとし, はめ込みを $\alpha: U \rightarrow \mathbf{R}^{\tilde{n}}$ とする. 任意の $x_0 \in U$ に対して可観

測性ランク条件 $\dim d\mathcal{O}_\Sigma(x_0) = n$ が成り立つならば, α は多様体のはめ込み, すなわち任意の $x_0 \in U$ に対して $\text{rank } \partial\alpha(x_0)/\partial x = n$ である.

(証明) 定理1より, 各 $\eta \in \mathcal{O}_\Sigma$ に対応する $\tilde{\eta} \in \mathcal{O}_{\tilde{\Sigma}}$ が存在して, すべての $x_0 \in U$ において $\eta(x_0) = \tilde{\eta}(\alpha(x_0))$ が成り立つ. 合成関数の微分によって,

$$\frac{\partial \eta}{\partial x}(x_0) = \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \tilde{x}}(\alpha(x_0)) \frac{\partial \alpha}{\partial x}(x_0)$$

が成り立つ. ここで $\tilde{x}$ は $\tilde{\Sigma}$ の状態ベクトルである. したがって,

$$\dim d\mathcal{O}_\Sigma(x_0) \leq \min \left\{ \dim d\mathcal{O}_{\tilde{\Sigma}}(\alpha(x_0)), \text{rank } \frac{\partial \alpha}{\partial x}(x_0) \right\}$$

より $\text{rank } \partial\alpha(x_0)/\partial x \geq \dim d\mathcal{O}_\Sigma(x_0) = n$ がすべての $x_0 \in U$ に対して成り立つ. 一方, $\partial\alpha(x_0)/\partial x$ は $\tilde{n} \times n$ 行列だから, $\text{rank } \partial\alpha(x_0)/\partial x \leq \min\{\tilde{n}, n\} \leq n$ が成り立つ. よって, $\text{rank } \partial\alpha(x_0)/\partial x = n$. $\square$

システムの可観測性コディストリビューションが一定次元であれば, 可観測性ランク条件を満たすサブシステムと出力に影響しないサブシステムとに分解できるので²³⁾, システムのはめ込みが多様体のはめ込みにもなるような問題設定が多くの場合可能である. システムのはめ込みと多様体のはめ込みとの関係に関しては, 第5節の例題1も参照されたい.

つぎに, はめ込みの特殊な場合を定義する.

【定義2】 ある開集合 $U \subset \mathbf{R}^n$ で定義された解析的なシステム $\Sigma(g_0, \dots, g_m, h)$ が U の開部分集合 U' 上で $\tilde{n}$ 次元システム $\tilde{\Sigma}(\tilde{g}_0, \dots, \tilde{g}_m, \tilde{h})$ に不変はめ込み可能であるとは, 解析的な写像 $\alpha: U' \rightarrow \mathbf{R}^{\tilde{n}}$ が存在して, $\tilde{\Sigma}$ が $\alpha(U')$ を含む開集合で解析的であり, かつ任意の $x_0 \in U'$ に対して以下が成り立つことをいう.

$$L_{g_i}\alpha(x_0) = \tilde{g}_i(\alpha(x_0)), \quad i \in I_{0,m},$$

$$h(x_0) = \tilde{h}(\alpha(x_0)).$$

そのような写像 α を不変はめ込みという.

不変はめ込みの定義から, $\alpha(U')$ の点を初期状態とする $\tilde{\Sigma}$ の軌道はある時間 $\alpha(U')$ に留まる. また, α のヤコビアン²⁴⁾のランクが一定である適当な開部分集合 $U'' \subset U'$ の像 $\alpha(U'')$ は多様体になるから²⁴⁾, $\alpha(U'') \subset \alpha(U')$ は局所的に $\tilde{\Sigma}$ の不変多様体^{5), 23)}となる. 不変はめ込みを単にはめ込みと呼ぶことも多いが, 入出力関係が等価であることは定義1の意味でははめ込み可能性と等価であり, 不変はめ込み可能性は必ずしも必要ない. したがって, 本論文では両者を区別することにする.

はめ込みは, 入出力関係を保存する点でフィードバック線形化などのフィードバック変換とは異なり, また, 状態ベクトルの次元を必ずしも保存しない点で座標変換とは異なる. さらに, 平衡点の安定性とは無関係にはめ込みが定義できることと, はめ込み可能性が座標系の取り方に依存しないことにも注意されたい.

本論文では, できるだけ幅広いクラスの非線形系からの

め込みが存在するようなモデル構造を考える. 具体的には, 与えられたシステムに対して, 有理式, 多項式, もしくは2次式という特定の構造を持つシステムへのはめ込みが存在するための条件について考察する. 表記を簡潔にするために, 必ずしも次元が等しくない複数のベクトル $w_1, \dots, w_r$ の要素を変数とする実係数有理式全体の集合を $\mathbf{R}(w_1, \dots, w_r)$ と表わす. そして, $w_1, \dots, w_r$ の要素を変数とする実係数多項式全体の集合を $\mathbf{R}[w_1, \dots, w_r]$, その部分集合で次数が ℓ 次以下の多項式全体を $\mathbf{R}[w_1, \dots, w_r]_{\leq \ell}$ と表わす. $\mathbf{R}(w_1, \dots, w_r)$ に属する要素からなる $n \times m$ 行列の集合を $\mathbf{R}(w_1, \dots, w_r)^{n \times m}$ と表わし, ほかも同様とする. これらの記号を使って, 本論文で考えるモデル構造を以下のように定義する.

【定義3】 システム $\tilde{\Sigma}(\tilde{g}_0, \dots, \tilde{g}_m, \tilde{h})$ を考え, その状態ベクトルを $\tilde{x} \in \mathbf{R}^{\tilde{n}}$ とする. システム $\tilde{\Sigma}$ は, $\tilde{g}_i(\tilde{x}) \in \mathbf{R}(\tilde{x})^{\tilde{n}}$ ($i \in I_{0,m}$) かつ $\tilde{h}(\tilde{x}) \in \mathbf{R}(\tilde{x})^p$ のとき状態有理式表現, $\tilde{g}_i(\tilde{x}) \in \mathbf{R}[\tilde{x}]^{\tilde{n}}$ ($i \in I_{0,m}$) かつ $\tilde{h}(\tilde{x}) \in \mathbf{R}[\tilde{x}]^p$ のとき状態多項式表現という. また, $\tilde{g}_i(\tilde{x}) \in \mathbf{R}[\tilde{x}]_{\leq 2}^{\tilde{n}}$ ($i \in I_{0,m}$) かつ $\tilde{h}(\tilde{x}) \in \mathbf{R}[\tilde{x}]_{\leq 1}^p$ のとき状態2次表現という.

本論文では状態ベクトルを不定元としても用いるが, 混乱は無いだろう. 状態2次表現の定義では, 出力方程式が状態量に関してただか1次となっていることに注意されたい. 上記3種類のモデル構造への(不変)はめ込み可能性が等価であることはすでにわかっている.

《定理3》¹²⁾ 開集合 U で定義された解析的なシステム Σ に対して, 以下の (i) ~ (iii) は等価である.

- (i) Σ は状態有理式表現へ(不変)はめ込み可能.
- (ii) Σ は状態多項式表現へ(不変)はめ込み可能.
- (iii) Σ は状態2次表現へ(不変)はめ込み可能.

したがって, 状態有理式表現への(不変)はめ込み可能性を考えれば十分である.

3. はめ込み可能性の代数的特徴づけ

本論文で用いる代数学の基本事項を整理しておく^{25)~27)}. L を体, K をその部分体とする. K を含む L の部分体を L と K の中間体という. L の部分集合 S に対して, K と S を含む L の最小の部分体を $K(S)$ で表わし, K 上 S で生成された体, または K に S を添加した体と呼ぶ. また, S の元を生成元と呼ぶ. $S = \{a_1, \dots, a_\nu\}$ のときは, $K(S)$ を $K(a_1, \dots, a_\nu)$ と表わしたり, $a = [a_1, \dots, a_\nu]^T$ として単に $K(a)$ などと表わす. 前節のように必ずしも次元の等しくない複数のベクトルを用いることもある. $L = K(a_1, \dots, a_\nu)$ となるような有限個の $a_1, \dots, a_\nu \in L$ が存在するとき, L は K 上有限生成であるという.

同様に, 可換環 S , その部分環 R , 部分集合 $A \subset S$ に対し, R と A を含む S の最小の部分環を $R[A]$ で表わし, R 上 A で生成された環, または R に A を添加した環と呼ぶ. A の元を生成元と呼び, 体の場合と同様の表わし方をする. 可換環 R の元 a に対して $ab = 0$ となる $b \neq 0$ が存在するとき, a は零因子であるという. 可換環で0以外の零因子を

持たないものを整域という. 整域 R に対して R を含む最小の体が存在し, それを R の商体または分数体と呼び $\text{Frac } R$ で表わす.

[補題 1]²⁵⁾ 体 L が体 K 上有限生成であれば, K と L の中間体も K 上有限生成である.

[補題 2]²⁶⁾ L を体 K の拡大体とする. S を L の部分集合, $\{S_\lambda\}$ を S の有限部分集合の全体とすると, $K(S) = \bigcup_\lambda K(S_\lambda)$.

補題 1 より, 体 L が K 上有限生成であれば, K に $S \subset L$ を添加した体 $K(S)$ も K 上有限生成であることが保証される. これは体が持つ良い性質であり, 環は同様の性質を持たない. また, 補題 2 より, たとえ S が無限集合であっても, $K(S)$ の元はつねに S の有限個の元の有理式として表わせることが保証される.

さて, システムの状態有理式表現へのはめ込みを考える際には, 解析関数の有理式を扱う. 解析関数の適当な集合の元がつくる有理式全体を考えたとき, それが体になることは厳密には自明でない. そこで, 適切な設定の下で解析関数の集合によって生成された体が定義できることを確認しておこう. 開集合 $U \subset \mathbf{R}^n$ で定義された実解析関数全体の集合を $C^\omega(U)$ と表わすことにする. $C^\omega(U)$ は通常の和と積に関して可換環である. さらに, U が領域 (連結な開集合) ならば, 収束べき級数に関する一致の定理によって $C^\omega(U)$ は整域である^{27), 28)}. そのとき, 整域 $C^\omega(U)$ の商体 $\text{Frac } C^\omega(U)$ が定義できる. $\mathbf{R}$ は定値関数として $\text{Frac } C^\omega(U)$ の部分体と見なせ, $C^\omega(U)$ の任意の部分集合 S は $\text{Frac } C^\omega(U)$ の部分集合とも見なせる. したがって, $\mathbf{R}$ 上 S で生成された体 $\mathbf{R}(S) \subset \text{Frac } C^\omega(U)$ が定義できる. また, その生成元について以下が成り立つ.

[補題 3] $U \subset \mathbf{R}^n$ を領域とし, $S \subset C^\omega(U)$ とする. $\mathbf{R}(S)$ が $\mathbf{R}$ 上有限生成であれば, その生成元は $C^\omega(U)$ から選べる (必ずしも S の元でなくてもよい).

(証明) $\mathbf{R}(S)$ の生成元を $a_1, \dots, a_\nu \in \mathbf{R}(S)$ とする. すなわち, $\mathbf{R}(S) = \mathbf{R}(a_1, \dots, a_\nu)$. たとえば, a_1 が U で解析的でないとする. 補題 2 によって, 有限個の解析関数 $b_1, \dots, b_\mu \in S \subset \mathbf{R}(S)$ が存在し, $a_1 \in \mathbf{R}(b_1, \dots, b_\mu)$ が成り立つ. したがって, $\mathbf{R}(S) = \mathbf{R}(b_1, \dots, b_\mu, a_2, \dots, a_\nu)$ が成り立つ. もしもほかに解析的でない生成元が存在するならば, 同様に解析関数で置き換えればよい. $\square$

さらに, システムのはめ込みでは, はめ込み後のシステムが解析的であることを保証しなければならない. そのためにつぎの補題を用いる.

[補題 4] $U \subset \mathbf{R}^n$ を領域とし, $f: U \rightarrow \mathbf{R}$ と $\alpha: U \rightarrow \mathbf{R}^{\tilde{n}}$ は解析的とする. U の稠密開部分集合 U' と有理関数 $\tilde{f} \in \mathbf{R}(\tilde{x})$ ($\tilde{x} \in \mathbf{R}^{\tilde{n}}$) が存在して, $\tilde{f}$ が $\alpha(U')$ を含む開集合 $\tilde{U} \subset \mathbf{R}^{\tilde{n}}$ で解析的かつ U' で $f = \tilde{f} \circ \alpha$ を満たすための必要十分条件は, $f \in \mathbf{R}(\alpha)$ が成り立つことである.

(証明) 最初に, 十分性を示す. $f \in \mathbf{R}(\alpha) = \text{Frac } \mathbf{R}[\alpha]$ より, $f = \tilde{f}(\alpha)$ を満たす $\tilde{f} \in \mathbf{R}(\tilde{x})$ が存在し, また, その

分母を $d \in \mathbf{R}[\tilde{x}]$ とすると, $d(\alpha) \in \mathbf{R}[\alpha]$ は 0 でない. すなわち $d(\alpha)$ は U で恒等的には 0 でない解析関数である. ここで $d(\alpha)$ が 0 でない U の点全体を U' とすると, $d(\tilde{x})$ は $\alpha(U')$ に零点を持たないことになる. したがって, $\tilde{f}(\tilde{x})$ は $\alpha(U')$ を含むある開集合 $\tilde{U}$ で解析的である. あとは U' が U の稠密な開部分集合であることを示せばよい. まず, $d(\alpha)$ の連続性により U' の点はすべて内点であり, U' は開集合となる. また, もしも $d(\alpha)$ がある $x \in U$ の近傍で恒等的に 0 だとすると, 一致の定理により $d(\alpha)$ は領域 U 全体で恒等的に 0 でなくてはならず, 矛盾である. したがって, 任意の $x \in U$ のどのような近傍にも必ず $d(\alpha)$ が 0 でない点 (U' の点) が存在する. すなわち, 任意の $x \in U$ は U' の集積点であり, これは U' が U で稠密であることを意味する.

つぎに, 必要性を示す. 互いに素な多項式 $n, d \in \mathbf{R}[\tilde{x}]$ を用いて $\tilde{f}(\tilde{x}) = n(\tilde{x})/d(\tilde{x})$ と表わすと, $\tilde{f}$ が $\alpha(U')$ で解析的なので, d は $\alpha(U')$ に零点を持たない. したがって, $d(\alpha)$ は整域 $\mathbf{R}[\alpha] \subset C^\omega(U)$ の非零元であり, 商体に逆元 $1/d(\alpha) \in \mathbf{R}(\alpha) = \text{Frac } \mathbf{R}[\alpha]$ を持つ. また, $d(\alpha(x))f(x) = n(\alpha(x))$ は開集合 $U' \subset U$ で成り立つので, 一致の定理により領域 U でも恒等的に成り立つ. すなわち, $d(\alpha)f = n(\alpha)$ が $C^\omega(U)$ において成り立ち, したがって, $f = n(\alpha)/d(\alpha) \in \mathbf{R}(\alpha) \subset \text{Frac } C^\omega(U)$. $\square$

たとえ f が U で解析的であっても, 有理関数 $\tilde{f}$ が解析的でない点が $\alpha(U)$ にあり得ることに注意されたい (第 5 節の例題 2 参照).

以上の準備の下で, つぎの主要結果を示すことができる. 《定理 4》 領域 U で定義された解析的システム Σ に対して, 以下は互いに同値である.

- (i) U の稠密開部分集合において, U 上の解析的写像によって Σ は状態有理式表現へ不変はめ込み可能.
- (ii) U の稠密開部分集合において, U 上の解析的写像によって Σ は状態有理式表現へはめ込み可能.
- (iii) $\mathcal{O}_\Sigma$ は $\mathbf{R}$ 上有限生成な体に含まれる.
- (iv) $\mathbf{R}(\mathcal{O}_\Sigma)$ は $\mathbf{R}$ 上有限生成.

さらに, (iv) が成り立つとき, $\mathbf{R}(\mathcal{O}_\Sigma)$ の解析的な生成元の組が (i) の不変はめ込みを与える.

(証明) 与えられたシステム $\Sigma(g_0, \dots, g_m, h)$ が領域 $U \subset \mathbf{R}^n$ で定義されているとする.

(i) $\Rightarrow$ (ii) は明らか.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): システム Σ が U の稠密開部分集合 U' において, 状態有理式表現 $\Sigma_R(g_{R0}, \dots, g_{Rm}, h_R)$ へはめ込み可能だとする. Σ_R の次元と状態ベクトルをそれぞれ n_R, x_R , Σ の Σ_R へのはめ込みを $\alpha: U' \rightarrow \mathbf{R}^{n_R}$ とする. 定理 1 より, 任意の $x_0 \in U'$ に対して,

$$h(x_0) = h_R(\alpha(x_0)) \in \mathbf{R}(\alpha(x_0)),$$

$$L_{g_i} h(x_0) = L_{g_{Ri}} h_R(\alpha(x_0)) = \frac{\partial h_R(\alpha(x_0))}{\partial x_R} g_{Ri}(\alpha(x_0)) \in \mathbf{R}(\alpha(x_0))^p, i \in I_{0,m}$$

が成り立ち、同様に、

$$L_{g_{i_1}} \dots L_{g_{i_k}} h(x_0) = L_{g_{Ri_1}} \dots L_{g_{Ri_k}} h_R(\alpha(x_0)) \\ \in \mathbf{R}(\alpha(x_0))^p, (i_1, \dots, i_k) \in I_{0,m}^k, k \in I_{0,\infty}$$

が成り立つから、補題4によって $\mathcal{O}_\Sigma \subset \mathbf{R}(\alpha)$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv): $\mathbf{R}(\mathcal{O}_\Sigma)$ は、 $\mathcal{O}_\Sigma$ を含む $\mathbf{R}$ 上有限生成な体と $\mathbf{R}$ との中間体である。したがって、補題1により、 $\mathbf{R}(\mathcal{O}_\Sigma)$ も $\mathbf{R}$ 上有限生成である。

(iv) $\Rightarrow$ (i): 定義により、 $\mathcal{O}_\Sigma \subset C^\omega(U)$ である。したがって、補題3により、有限個の解析関数 $\alpha_1, \dots, \alpha_{\bar{n}} \in \mathbf{R}(\mathcal{O}_\Sigma)$ を選んで、 $\mathbf{R}(\mathcal{O}_\Sigma) = \mathbf{R}(\alpha_1, \dots, \alpha_{\bar{n}})$ とできる。すると、

$$h_i \in \mathcal{O}_\Sigma \subset \mathbf{R}(\alpha_1, \dots, \alpha_{\bar{n}}), \quad i \in I_{1,p} \quad (2)$$

が成り立つ。つぎに、補題2により、それぞれの α_j ($j \in I_{1,\bar{n}}$) に対して、有限個の $\beta_{j1}, \dots, \beta_{j\mu_j} \in \mathcal{O}_\Sigma$ が存在して $\alpha_j \in \mathbf{R}(\beta_{j1}, \dots, \beta_{j\mu_j})$ とできる。 $\beta_{jk} \in \mathcal{O}_\Sigma \subset \mathbf{R}(\mathcal{O}_\Sigma)$ ($k \in I_{1,\mu_j}, j \in I_{1,\bar{n}}$) なので、

$$\frac{\partial \alpha_j}{\partial \beta_{jk}} \in \mathbf{R}(\beta_{j1}, \dots, \beta_{j\mu_j}) \subset \mathbf{R}(\alpha_1, \dots, \alpha_{\bar{n}}), \\ k \in I_{1,\mu_j}, j \in I_{1,\bar{n}},$$

$$L_{g_i} \beta_{jk} \in \mathcal{O}_\Sigma \subset \mathbf{R}(\alpha_1, \dots, \alpha_{\bar{n}}),$$

$$k \in I_{1,\mu_j}, j \in I_{1,\bar{n}}, i \in I_{0,m}$$

が成り立つ。ここで、 $\partial \alpha_j / \partial \beta_{jk}$ は α_j を $\beta_{j1}, \dots, \beta_{j\mu_j}$ の有理関数と見なした偏導関数である。よって、

$$L_{g_i} \alpha_j = \sum_{k=1}^{\mu_j} \frac{\partial \alpha_j}{\partial \beta_{jk}} L_{g_i} \beta_{jk} \in \mathbf{R}(\alpha_1, \dots, \alpha_{\bar{n}}), \\ i \in I_{0,m}, j \in I_{1,\bar{n}}. \quad (3)$$

つまり、(2), (3) 式より、 $\alpha = [\alpha_1, \dots, \alpha_{\bar{n}}]^T$ と定義すると、補題4により、 U の稠密開部分集合 U' と有理関数 $\tilde{g}_i \in \mathbf{R}(\tilde{x})^{\bar{n}}$ ($i \in I_{0,m}$)、 $\tilde{h} \in \mathbf{R}(\tilde{x})^p$ ($\tilde{x} \in \mathbf{R}^{\bar{n}}$) が存在して、任意の $x_0 \in U'$ に対して

$$L_{g_i} \alpha(x_0) = \tilde{g}_i(\alpha(x_0)), \quad i \in I_{0,m},$$

$$h(x_0) = \tilde{h}(\alpha(x_0)),$$

かつ、 $\tilde{g}_i$ ($i \in I_{0,m}$) と $\tilde{h}$ は $\alpha(U')$ を含む開集合 $\tilde{U} \in \mathbf{R}^{\bar{n}}$ で解析的である。すなわち、 U' において Σ は α によって状態有理式表現 $\tilde{\Sigma}(\tilde{g}_0, \dots, \tilde{g}_m, \tilde{h})$ へ不変はめ込み可能である。□

実際上多くの非線形系が定理4の条件(iii)や(iv)を満たし、状態有理式表現へ不変はめ込み可能である。そして、状態有理式表現への不変はめ込みは $\mathbf{R}(\mathcal{O}_\Sigma)$ の解析的な生成元によって与えられ、そこから状態多項式表現や状態2次表現への不変はめ込みは定理3の構成的証明¹²⁾によって容易に構成できる。定理4によれば必ずしもシステムが定義された領域のすべての点ではめ込み可能とは限らないが、定理3は領域でない開集合でも成立するので問題なく適用できる。

定理4の条件(iii)は、線形系や双線形系へのはめ込み可能性条件^{5),6)}を拡張したものとなっている。さらに、線形系

や双線形系へのはめ込みの場合と同様、はめ込み可能性から不変はめ込み可能性もいえることがわかった。

ここでは観測空間が生成する体によって状態有理式表現へのはめ込み可能性を特徴づけたが、同様に、観測空間が生成する環によって状態多項式表現へのはめ込み可能性を特徴づけることも考えられる。しかし、定理4の(iii) $\Rightarrow$ (iv)を示すのに補題1が本質的であることに注意されたい。前述の通り環は補題1に相当する性質を持たないので、定理4と等価な特徴づけを環によって示すことはできない。実際、状態多項式表現へのはめ込み可能性は必ずしも $\mathbf{R}[\mathcal{O}_\Sigma]$ が $\mathbf{R}$ 上有限生成であることを意味しない(第5節の例題3参照)。ただし、状態多項式表現へのはめ込み可能性から $\mathbf{R}[\mathcal{O}_\Sigma]$ が $\mathbf{R}$ 上有限生成な環の部分環であることは示すことができ、また、 $\mathbf{R}[\mathcal{O}_\Sigma]$ が $\mathbf{R}$ 上有限生成であれば状態多項式表現へのはめ込み可能であることを示すこともできる。

4. 微分代数関数による特徴づけ

つぎに、はめ込み可能性判別に有用な十分条件として、システムの状態空間表現が微分代数関数¹³⁾のみを含めば状態有理式表現にはめ込み可能であることを示す。

【定義4】 領域 $U \subset \mathbf{R}^n$ で定義された実解析関数 $f(x)$ ($x \in \mathbf{R}^n$) が微分代数関数であるとは、各 $i = 1, \dots, n$ に対して零でない多項式 p_i と整数 $\rho_i \geq 0$ が存在して

$$p_i \left(x, f(x), \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}, \dots, \frac{\partial^{\rho_i} f(x)}{\partial x_i^{\rho_i}} \right) = 0$$

が成り立つことをいう。微分代数関数でない関数を超越的超越関数という。

《定理5》 領域 U で定義されたシステム $\Sigma(g_0, \dots, g_m, h)$ において、 $g_0(x), \dots, g_m(x), h(x)$ のすべての要素が微分代数関数であれば、 U の稠密開部分集合において Σ は状態有理式表現へ不変はめ込み可能である。

(証明) まず、一つの微分代数関数 f のすべての偏導関数が有限個の解析関数の有理式で表わせることを示す。 $K_i = \mathbf{R}(x, f(x), \dots, \partial^{\rho_i-1} f(x) / \partial x_i^{\rho_i-1})$ ($i \in I_{0,n}$) とおくと、微分代数関数の定義は各 $\partial^{\rho_i} f(x) / \partial x_i^{\rho_i}$ が K_i 上代数的である(K_i 係数の代数方程式を満たす)ことを意味する。すると、 p_i を $\partial^{\rho_i} f(x) / \partial x_i^{\rho_i}$ の K_i 上の最小多項式を選んで代数方程式 $p_i = 0$ を x_i で微分したとき、 $\partial^{\rho_i+1} f(x) / \partial x_i^{\rho_i+1}$ の係数が非零になって $\partial^{\rho_i+1} f(x) / \partial x_i^{\rho_i+1}$ が $K_i(\partial^{\rho_i} f(x) / \partial x_i^{\rho_i})$ に属することを示せる(文献29)のSec.2または文献25)のSec.2.3参照)。したがって、 x_i に関するより高階の偏導関数もすべて $K_i(\partial^{\rho_i} f(x) / \partial x_i^{\rho_i})$ に属する。これがすべての $i = 1, \dots, n$ について成り立つから、結局、 f のすべての偏導関数は x および $\{\partial^{\mu_1+\dots+\mu_n} f(x) / \partial x_1^{\mu_1} \dots \partial x_n^{\mu_n} : \mu_i \in I_{0,\rho_i}, i \in I_{1,n}\}$ の有理式として表わせることになる。

つぎに、システム Σ において $g_0(x), \dots, g_m(x), h(x)$ のすべての要素が微分代数関数であれば、上の議論を個々の微分代数関数に適用して、有限個の解析関数 $\alpha = [\alpha_1, \dots, \alpha_{\bar{n}}]^T$

によって

$$g_i \in \mathbf{R}(\alpha)^n, i \in I_{0,m},$$

$$h \in \mathbf{R}(\alpha)^p,$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} \in \mathbf{R}(\alpha)^{\tilde{n} \times n}$$

とできる。したがって、

$$L_{g_i} \alpha = \frac{\partial \alpha}{\partial x} g_i \in \mathbf{R}(\alpha)^{\tilde{n}}, i \in I_{0,m}$$

である。以上より、定理 4 の証明と同様に補題 4 を利用して、 U の稠密開部分集合において Σ が α によって状態有理式表現へ不変はめ込み可能であることがいえる。□

実際に多くのシステムに含まれる関数は微分代数関数であり、定理 5 によって状態有理式表現や状態 2 次表現へ不変はめ込み可能である。たとえば、代数関数、指数関数、対数関数、三角関数、Bessel 関数は一変数の微分代数関数である。さらに、微分代数関数の和、積、商、合成や逆関数も再び微分代数関数になる。一方、超越的超越関数としては Euler の Γ 関数や Riemann の ζ 関数が知られている³⁰⁾。

従来、微分代数関数はアナログ計算可能性^{15)~17)}や非多項式型微分方程式の多項式型への変換可能性^{18), 19)}を特徴づけるのにも用いられてきたが、システムのはめ込み可能性に関しては十分条件しか与えない。つまり、はめ込み可能性の必要十分条件を与えるのはあくまでも観測空間の代数的構造であって、システムがどのような関数を含むかは直接の関係が無い。実際、状態空間表現が超越的超越関数を含むか否かは、超越的超越関数を含む座標変換によって変化し得る性質であり、本質的ではない(第 5 節の例題 4 参照)。しかし、現実のシステムをモデリングした際には微分代数関数しか表われないことが多いので、定理 5 は有用である。

5. 例題

本節では、はめ込みとはめ込み可能性条件の性質を明らかにするためにいくつかの例題を示す。

[例題 1] この例題では、システムのはめ込みと多様体のはめ込みとの違いを示す。以下のような 1 次元のシステムを考える。

$$\Sigma \begin{cases} \dot{x} = (\sin x)u \\ y = \sin x \end{cases}$$

容易に $\mathbf{R}(\mathcal{O}_\Sigma) = \mathbf{R}(\sin x, \cos x)$ を確認でき、写像 $\alpha(x) = [\sin x, \cos x]^T$ によって Σ は以下の状態 2 次表現 $\tilde{\Sigma}$ へ不変はめ込み可能である。

$$\tilde{\Sigma} \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \tilde{x}_2 \\ -\tilde{x}_1^2 \end{bmatrix} u \\ y = \tilde{x}_1 \end{cases}$$

写像 $\alpha: \mathbf{R} \rightarrow S^1 \subset \mathbf{R}^2$ は多様体 $\mathbf{R}$ のはめ込みでもあるが、埋め込みではない。つぎに、以下のような不可観測な部分を

持つ 2 次元のシステムを考える。

$$\Sigma' \begin{cases} \dot{x}_1 = (\sin x_1)u \\ \dot{x}_2 = f(x_1, x_2) \\ y = \sin x_1 \end{cases}$$

ここで f は解析的な関数である。すると、 Σ' も $\tilde{\Sigma}$ へ不変はめ込み可能であり、不変はめ込みは $\alpha' = [\sin x_1, \cos x_1]^T$ である。しかし、 α' のヤコビアン³¹⁾のランクは 2 未満であり、 α' は多様体 $\mathbf{R}^2$ のはめ込みではない。

[例題 2] この例題では、状態有理式表現が必ずしもはめ込みの像のすべての点において解析的とは限らないことを示す。つぎのような 1 次元のシステムを考える。

$$\Sigma \begin{cases} \dot{x} = \frac{\sin x}{x} \\ y = x \end{cases}$$

すると、 $\mathbf{R}(\mathcal{O}_\Sigma) = \mathbf{R}(x, \sin x, \cos x)$ なので、 $\mathbf{R}$ 上の解析的な写像 $\alpha(x) = [x, \sin x, \cos x]^T$ によって Σ は以下の状態有理式表現にはめ込み可能である。

$$\tilde{\Sigma} \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 \\ \dot{\tilde{x}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_2/\tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2\tilde{x}_3/\tilde{x}_1 \\ -\tilde{x}_2^2/\tilde{x}_1 \end{bmatrix} \\ y = \tilde{x}_1 \end{cases}$$

この状態有理式表現 $\tilde{\Sigma}$ は、開集合 $\tilde{U} = \{\tilde{x} \in \mathbf{R}^3 : \tilde{x}_1 \neq 0\} \supset \alpha(\mathbf{R} \setminus \{0\})$ において解析的である。すなわち、 Σ は $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ において状態有理式表現 $\tilde{\Sigma}$ へはめ込み可能である。 $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ は Σ と α の定義域 $\mathbf{R}$ の稠密開部分集合になっている。

[例題 3] この例題では、たとえシステムが状態多項式表現へはめ込み可能であっても、必ずしも $\mathbf{R}(\mathcal{O}_\Sigma)$ が $\mathbf{R}$ 上有限生成ではないことを示す。以下のような 2 次元のシステムを考える。

$$\Sigma \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 x_2 \\ \dot{x}_2 = 0 \\ y = x_1 \end{cases}$$

これはすでに状態 2 次表現であり、恒等写像がこのシステム自身へのはめ込みだと見なせる。観測空間は $\mathcal{O}_\Sigma = \text{span}\{x_1, x_1 x_2, x_1 x_2^2, \dots\}$ であり、 $\mathbf{R}(\mathcal{O}_\Sigma) = \mathbf{R}[x_1, x_1 x_2, x_1 x_2^2, \dots]$ は $\mathbf{R}$ 上有限生成ではないが有限生成環 $\mathbf{R}[x_1, x_2]$ の部分環である。つまり、はめ込み可能性からは $\mathbf{R}(\mathcal{O}_\Sigma)$ の有限生成性をいえない。一方、 $\mathbf{R}(\mathcal{O}_\Sigma) = \mathbf{R}(x_1, x_2)$ は $\mathbf{R}$ 上有限生成であり、これは定理 4 と整合している。

[例題 4] この例題では、超越的超越関数を含むが状態有理式表現へはめ込み可能なシステムを示す。システム Σ をつぎのように与える。

$$\Sigma \begin{cases} \dot{x} = u/\Gamma'(x) \\ y = \Gamma(x) \end{cases}$$

ここで、 $x(t)$ は $1 \in \mathbf{R}$ の適当な近傍に属するものとし、 $\Gamma(x)$ は Euler の Γ 関数、 $\Gamma'(x)$ はその導関数である。 $\Gamma(x)$ は超越

的超越関数であるが、 $R(\mathcal{O}_\Sigma) = R(\Gamma(x))$ なので、 $\tilde{x} = \Gamma(x)$ によって Σ は状態有理式表現へ不変はめ込み可能である。実際、 Σ はつぎのような線形系 $\tilde{\Sigma}$ に変換される。

$$\tilde{\Sigma} \begin{cases} \dot{\tilde{x}} = u \\ y = \tilde{x} \end{cases}$$

この例では、システムが超越的超越関数を含むか否かが座標変換 $\tilde{x} = \Gamma(x)$ によって変化している。一般にはめ込みは超越的超越関数を含んでも良く、定理5の条件ははめ込み可能性に必要でない。

6. おわりに

本論文では、幅広いクラスの非線形系の入出力関係を表わしうるモデル構造として、状態2次表現を考えた。与えられたシステムが状態2次表現を持つ、すなわち状態2次表現へはめ込み可能であるための必要十分条件を、観測空間の代数的構造によって特徴づけた。とくに、状態2次表現へはめ込み可能であれば、はめ込みの像が局所的に不変多様体となる不変はめ込みも存在することを示した。したがって、はめ込み後のシステムの状態が動く範囲をある程度規定することができる。さらに、はめ込み可能性判別に有用な十分条件として、システムの状態空間表現が微分代数関数のみを含めば状態2次表現にはめ込み可能であることを示した。この条件は座標系に依存するが、現実のシステムには微分代数関数しか表われないことが多いので有用である。今後は、はめ込み後のシステムの性質や応用をさらに検討することが課題である。

謝辞 本研究の一部は、C&C振興財団の助成を受けた。

参考文献

- 1) 足立修一：ユーザのためのシステム同定理論，計測自動制御学会 (1993)
- 2) J. Sjöberg, Q. Zhang, L. Ljung, A. Benveniste, B. Delyon, P.-Y. Glorennec, H. Hjalmarsson and A. Juditsky: Nonlinear Black-Box Modeling in System Identification: A Unified Overview, *Automatica*, **31**-12, 1691/1724 (1995)
- 3) R. Haber and H. Unbehauen: Structure Identification of Nonlinear Dynamics Systems – A Survey on Input/Output Approaches, *Automatica*, **26**-4, 651/677 (1990)
- 4) R. K. Pearson: Nonlinear Input/Output Modelling, *J. Process Control*, **5**-4, 197/211 (1995)
- 5) A. Isidori: Nonlinear Control Systems, Springer, 3rd ed. (1995)
- 6) J. Levine and R. Marino: Nonlinear System Immersion, Observers and Finite-Dimensional Filters, *Systems and Control Letters*, **7**-2, 133/142 (1986)
- 7) M. Fliess and I. Kupka: A Finiteness Criterion for Nonlinear Input-Output Differential Systems, *SIAM J. Control and Optimization*, **21**-5, 721/728 (1983)
- 8) S. Monaco and D. Normand-Cyrot: On the Immersion of a Discrete-Time Polynomial Analytic System into a Polynomial Affine One, *Systems and Control Letters*, **3**-2, 83/90 (1983)
- 9) J. T.-H. Lo: Global Bilinearization of Systems with Control Appearing Linearly, *SIAM J. Control*, **13**-4, 879/885 (1975)
- 10) A. J. Krener: Bilinear and Nonlinear Realizations of Input-Output Maps, *SIAM J. Control*, **13**-4, 827/834 (1975)

- 11) H. J. Sussmann: Semigroup Representations, Bilinear Approximation of Input-Output Maps, and Generalized Inputs, *Mathematical Systems Theory* (Eds. by G. Marchesini and S. K. Mitter), Springer, 172/191 (1976)
- 12) 大塚敏之：非線形系の標準構造：状態2次表現へのはめ込み可能性条件，計測自動制御学会論文集，**36**-7, 569/574 (2000)
- 13) L. A. Rubel and M. F. Singer: A Differentially Algebraic Elimination Theorem with Application to Analog Computability in the Calculus of Variations, *Proc. American Mathematical Society*, **94**-4, 653/658 (1985)
- 14) A. Astolfi and R. Ortega: Immersion and Invariance: A New Tool for Stabilization and Adaptive Control of Nonlinear Systems, *IEEE Trans. Automatic Control*, **48**-4, 590/606 (2003)
- 15) C. E. Shannon: Mathematical Theory of the Differential Analyzer, *J. Mathematics and Physics*, **20**, 337/354 (1941)
- 16) M. B. Pour-El: Abstract Computability and Its Relation to the General Purpose Analog Computer (Some Connections Between Logic, Differential Equations and Analog Computers), *Trans. American Mathematical Society*, **199**, 1/28 (1974)
- 17) L. Lipshitz and L. A. Rubel: A Differentially Algebraic Replacement Theorem, and Analog Computability, *Proc. American Mathematical Society*, **99**-2, 367/372 (1987)
- 18) W.-T. Wu and T. Wu: A Méchanization Method of Geometry and Its Applications. 5. Solving Transcendental Equations by Algebraic Methods, *MM Research Preprints* 3, Institute of Systems Science, Academia Sinica (1989)
- 19) P. Lindskog: Methods, Algorithms and Tools for System Identification Based on Prior Knowledge, PhD thesis, Linköping University (1996)
- 20) K. Forsman: On Rational State Space Realizations, *Proc. IFAC Symp. Nonlinear Control System Design*, 197/202 (1992)
- 21) E. D. Sontag: Polynomial Response Maps, Springer (1979)
- 22) 松本幸夫：多様体の基礎，東京大学出版会 (1988)
- 23) H. Nijmeijer and A. J. van der Schaft: Nonlinear Dynamical Control Systems, Springer (1990)
- 24) R. Abraham, J. E. Marsden and T. Ratiu: *Manifolds, Tensor Analysis, and Applications*, Springer, 2nd ed. (1988)
- 25) 永田雅宣：可換体論（新版），裳華房 (1985)
- 26) 東郷重明：代数入門，サイエンス社 (1977)
- 27) 中島匠一：代数と数論の基礎，共立出版 (2000)
- 28) 福田，泉屋，石川（編）：解析関数と特異点，共立出版 (2002)
- 29) A. Seidenberg: Some Basic Theorems in Differential Algebra (Characteristic p , Arbitrary), *Trans. American Mathematical Society*, **73**-1, 174/190 (1952)
- 30) L. A. Rubel: A Survey of Transcendentally Transcendental Functions, *American Mathematical Monthly*, **96**-9, 777/788 (1989)

[著者紹介]

大塚敏之（正会員）

1967年生。90年東京都立科学技術大学工学部卒業，95年同大学大学院工学研究科博士課程修了。同年筑波大学構造工学系講師。99年大阪大学大学院工学研究科講師，2003年同助教授，現在に至る。博士（工学）。日本航空宇宙学会，日本機械学会，AIAA，IEEEなどの会員。