拘束条件を有する最適制御問題の一数值解法

岩村 誠人*・河野 裕介**

尾崎 弘明*・毛利 彰***

A Numerical Algorithm for Optimal Control Problems with Constraints

Makoto IWAMURA*, Yusuke KAWANO**,
Hiroaki OZAKI* and Akira MOHRI***

This paper presents a novel gradient-type iterative algorithm for the solution of optimal control problems with constraints on the control variables, the terminal state and the state variables. In this algorithm, the control variation for improvement is constructed in a hierarchical manner so that it decides the convergence rates of the terminal constraints, the state constraints and the cost functional separately, to improve the convergence performance. A clipping-off technique is used to deal with the input constraints. The proposed algorithm can be also applied to the problem with final time unspecified by introducing a time-scale factor. A numerical example is shown to illustrate the effectiveness of the proposed algorithm.

Key Words: optimal control, input constraints, terminal constraints, state constraints, gradient method

1. はじめに

最適制御問題は一般に解析的に解くことが困難であるため、その数值解法に関する研究が活発に行なわれている。拘束条件がある場合/ない場合、終端時刻が固定される場合/自由な場合など、種々の形の問題に対してさまざまなアイデアに基づく手法が提案されている^{1)~12)}。

拘束条件がない問題に対しては、共役勾配法⁵⁾や準ニュートン法⁶⁾など、有限次元空間における非線形計画法を無限次元空間に拡張した強力なアルゴリズムが確立されている。一方、拘束条件を有する問題に対しては、スラック変数を用いた変換法⁷⁾やペナルティ法⁸⁾など、拘束のない問題に変換する手法が主流になっている。しかし、スラック変数を用いた変換法は適用できる問題に限られており、またペナルティ法はパラメータの微妙な調整が必要であるなどの問題点がある。そのほかに、拘束条件を直接取り扱うことができる手法として Kuhn-Tucker の定理と双対準ニュートン法を無限次元空間に拡張した手法¹¹⁾が提案されている。この手法は有効で

あると考えられるが、方向発見問題を解くために繰り返し計算を必要とするため全体としてのアルゴリズムは若干複雑になっている。一方、岩村ら¹³⁾も拘束条件として終端拘束と状態拘束を考慮することができる階層勾配法という手法を提案している。この手法では、終端拘束、状態拘束および評価汎関数の間に優先順位を付け、順位の低いものの収束が順位の高いものの収束を妨げないようにそれぞれの収束速度を決定する。そのため、停留を起こしにくく比較的良好な収束が得られるという特徴がある。また、ペナルティ法のようにパラメータの微妙な調整が不要である、双対準ニュートン法のように方向発見問題を解くために繰り返し計算を必要としない、などの長所がある。しかし、文献13)で提案されたアルゴリズムでは操作量の拘束は考慮されておらず、また終端時刻があらかじめ指定されている問題にしか適用できないため応用範囲が狭かった。そこで、本論文では階層勾配法を操作量に拘束がある問題、終端時刻自由問題に対しても適用できるように拡張することを考える。これにより広範囲の問題を効率的に解くことが可能になると考えられる。

本論文は以下のように構成される。第2章では操作量拘束、終端拘束、状態拘束を含む最適制御問題の定式化を行なう。第3章では、文献13)で示された階層勾配法について説明する。第4章では、階層勾配法を終端時刻自由問題、操作量に拘束がある問題に対しても適用できるように拡張する。第5章では、自動車の最短軌道生成問題に対して提案手法を適用し、その有効性を確認する。

* 福岡大学工学部 福岡市城南区七隈 8-19-1

** 松下電器産業(株) 門真市大字門真 1006

*** 九州大学大学院工学研究院 福岡市東区箱崎 6-10-1

* Faculty of Engineering, Fukuoka University, Nanakuma, Jonan-ku, Fukuoka

** Matsushita Electric Industrial Co., Ltd, Kadoma

*** Faculty of Engineering, Kyushu University, Hakozaki, Higashi-ku, Fukuoka

(Received May 17, 2002)

(Revised September 26, 2002)

2. 最適制御問題の定式化

ここでは、本論文で考える最適制御問題を定式化する。制御対象は、次式のような状態方程式で表わされるとする。

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad x(0) = x_0 \quad (1)$$

ここで、 $x \in R^n$ は状態ベクトル、 $u \in R^m$ は操作量ベクトル、 $x_0 \in R^n$ は初期状態ベクトル、 $f(x, u)$ は R^n の値をとるベクトル値関数である。ただし、操作量はつぎのような拘束を受けるとする。

$$|u_i(t)| \leq u_{i\max} \quad (i = 1, \dots, m) \quad \forall t \in [0, t_f] \quad (2)$$

ここで、 $u_{i\max}$ は i 番目の操作量の上限值である。終端状態に関しては次式のような拘束が課せられるものとする。

$$r_1 = x(t_f) - x_d = 0 \in R^n \quad (3)$$

ここで、 $x_d \in R^n$ は目標状態ベクトルである。また、状態変数はつぎのような拘束を受けるとする。

$$g_j(x(t)) \geq 0 \quad (j = 1, \dots, l) \quad \forall t \in [0, t_f] \quad (4)$$

上式は、つぎのような拘束条件に変換することができる³⁾。

$$r_2 = \int_0^{t_f} c(x(t)) dt = 0 \in R^l \quad (5)$$

ただし、 $c = (c_1, \dots, c_l)^T \in R^l$ であり、 c_j は (4) 式が満たされない場合に正の値をとるつぎのような関数である。

$$c_j(x) = \begin{cases} d_j(x) (> 0) & \text{if } g_j(x) < 0 \\ 0 & \text{if } g_j(x) \geq 0 \end{cases}$$

評価汎関数は次式のように与えられるとする。

$$J = \int_0^{t_f} f_0(x(t), u(t)) dt \quad (6)$$

ここで、 $f_0(x, u)$ はスカラー関数である。

本論文では、(1) 式で表わされる制御対象に対して、(2),(3),(5) 式の拘束条件を満足し、(6) 式の評価汎関数を最小にする操作量 $u(t)$ を見出す問題について検討する。ただし、問題に対して以下の仮定をおく。

(仮定 1) f, f_0, c は各変数に関して連続微分可能である。

(仮定 2) f, f_x, f_{0x} は $(x, u) \in R^n \times R^m$ に関して、 c_x は $x \in R^n$ に関してリプシッツ連続である。

(仮定 3) 任意のコンパクト集合 $D \subset R^n$ に対して、次式を満たす正数 M_1, M_2, M_3, M_4 が存在する。

$$\|f_u\| \leq M_1, \|f_{0u}\| \leq M_2, \|f_{0u}\| \leq M_3 \quad \forall (x, u) \in D \times R^m$$

$$\|c_x\| \leq M_4 \quad \forall x \in D$$

(仮定 4) (4) 式の l 個の拘束条件はすべて測度が零でない時間区間で活性化しているものとする。(もし、いくつかの拘束が全区間 $[0, t_f]$ で無条件に満足される場合はそれらを除いて (5) 式を構成するものとする。)

ここで、 f_x は f の x に関する偏導関数であり、 f_u, f_{0x}, f_{0u}, c_x などと同様である。また、許容操作量のクラスとして、(2) 式の拘束条件を満足する 2 乗可積分な m 次元ベクトル値関数を考える。

3. 階層勾配法

3.1 概要

階層勾配法は勾配法的一种である。勾配法とは、「はじめに適当な操作量 $u^0(t)$ を仮定し、それを次式

$$u^{k+1}(t) = u^k(t) + \delta u^k(t) \quad (7)$$

のように繰り返し修正していき、設定した収束条件を満足した場合に解とする手法」である。上式における修正量 $\delta u(t)$ の計算方法の違いによって、最急降下法や共役勾配法など各種のアルゴリズムが存在する。階層勾配法ではこの修正量 $\delta u(t)$ をつぎのように計算する。すなわち、まず、終端拘束 r_1 を零に収束させることのみを考慮して修正量 $\delta u(t)$ を計算する。つぎに、 r_1 の収束に影響を与えないように状態拘束 r_2 を零に収束させるための項を追加する。さらに、 r_1 と r_2 の収束に影響を与えないように評価汎関数 J の値を減少させるための項を追加する。このように、修正量 $\delta u(t)$ を階層的に構成していくことからこの手法を階層勾配法と呼んでいる。この手法は、理論的に収束性を保証するものではないが、 r_1, r_2, J の間の干渉の影響を考慮して修正量を決定するため比較的良好な収束が得られるという特徴がある。また、ほかの手法と比較した場合、ペナルティ法のようにパラメータの微妙な調整が不要である、双対準ニュートン法のように修正量を求めるために繰り返し計算を必要としない、などの利点がある。次節では、その具体的な修正量 $\delta u(t)$ の構成法を示す。

3.2 修正量の階層的構成法

2章の問題設定下では、任意に与えた $u(t)$ に対して (1) 式は連続な唯一解 $x(t)$ を持つ。以下、これを $x(t; u), t \in [0, t_f]$ と書く。このとき、(3),(5),(6) 式は、次式のように表わせる。

$$r_1(u) = x(t_f; u) - x_d \quad (8)$$

$$r_2(u) = \int_0^{t_f} c(x(t; u)) dt \quad (9)$$

$$J(u) = \int_0^{t_f} f_0(x(t; u), u(t)) dt \quad (10)$$

仮定を満たす場合、汎関数 $r_i(u)$ ($i = 1, 2$) は連続フレッシュ微分可能であり、つぎのように展開することができる³⁾。

$$r_i(u + \delta u) = r_i(u) + r_i^*(u) \delta u + o(\|\delta u\|) \quad (11)$$

ここで、 $r_i^*(u)$ は r_i の u におけるフレッシュ導関数である。上式より、 $\|\delta u\|$ が十分小さいと仮定するとつぎの関係を得る。

$$\delta r_i = r_i^*(u) \delta u = \int_0^{t_f} L_i \delta u(t) dt \quad (i = 1, 2) \quad (12)$$

ただし、 $\delta r_i \equiv r_i(u + \delta u) - r_i(u)$ であり、 L_i は時刻 t における増分 δu が δr_i に与える影響を表わす行列である。上式の導出および L_i の具体的な計算法は文献 13) を参照されたい。

(12) 式に基づいて、まず r_1 を零に収束させる δu を求め

Fig. 1 Structure of the equation (14)

る. α を負定数として, $\delta r_1 = \alpha r_1$ とすれば r_1 は指数関数的に零に収束することが保証される. このような δu は一般に無数に存在するのでつぎの誤差ユークリッドノルム

$$\|\delta r_1 - \alpha r_1\| = \left\| \int_0^{t_f} L_1 \delta u dt - \alpha r_1 \right\| \quad (13)$$

を零にする δu の一般解を求めると次式のようにになる¹³⁾.

$$\delta u = \alpha L_1^T I_{11}^{-1} r_1 + \delta y - L_1^T I_{11}^{-1} \int_0^{t_f} L_1 \delta y dt \quad (14)$$

$$I_{11} \equiv \int_0^{t_f} L_1 L_1^T dt, \quad \delta y \in R^m : \text{arbitrary vector}$$

(14) 式の構造について考察するために, つぎのように右辺第1項を δu_1 , 第2項と第3項を δu_2 と置く.

$$\delta u_1 \equiv \alpha L_1^T I_{11}^{-1} r_1, \quad \delta u_2 \equiv \delta y - L_1^T I_{11}^{-1} \int_0^{t_f} L_1 \delta y dt$$

このとき, I_{11} が対称行列であることに注意して δu_1 と δu_2 の関数空間における内積を計算すると次式のようにになる.

$$\begin{aligned} \langle \delta u_1, \delta u_2 \rangle &\equiv \int_0^{t_f} \delta u_1^T \delta u_2 dt \\ &= \alpha \int_0^{t_f} r_1^T I_{11}^{-1} L_1 \left[\delta y - L_1^T I_{11}^{-1} \int_0^{t_f} L_1 \delta y dt \right] dt \\ &= \alpha r_1^T I_{11}^{-1} \left[\int_0^{t_f} L_1 \delta y dt - I_{11} I_{11}^{-1} \int_0^{t_f} L_1 \delta y dt \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

これより, δu_1 と δu_2 は関数空間において直交していることがわかる. また, δu_1 と δu_2 を (12) 式の $i = 1$ の式に代入するとそれぞれ次式のようにになる.

$$\begin{aligned} \delta r_1 &= \int_0^{t_f} L_1 \delta u_1 dt \\ &= \int_0^{t_f} L_1 (\alpha L_1^T I_{11}^{-1} r_1) dt = \alpha I_{11} I_{11}^{-1} r_1 = \alpha r_1 \quad (15) \\ \delta r_1 &= \int_0^{t_f} L_1 \delta u_2 dt \\ &= \int_0^{t_f} L_1 \left[\delta y - L_1^T I_{11}^{-1} \int_0^{t_f} L_1 \delta y dt \right] dt \\ &= \int_0^{t_f} L_1 \delta y dt - I_{11} I_{11}^{-1} \int_0^{t_f} L_1 \delta y dt = 0 \quad (16) \end{aligned}$$

(15) 式より δu_1 は実際に r_1 を変化させる成分であること, (16) 式より δu_2 は r_1 の変化に全く影響を与えない成分である

ことがわかる. r_1 の変化に影響を与える δu の部分空間を N , その直交補空間を $N^\perp$ として δu_1 と δu_2 の関係を図示すると Fig. 1 のようになる. また, (16) 式より任意ベクトル δy はどのように選んでも, それに対応する δu_2 は r_1 の変化に影響を与えないので, δu_2 は δy を $N^\perp$ に射影した成分であると解釈することができる.

そこで, つぎに r_1 の収束を妨げないように任意ベクトル δy を用いて状態拘束 r_2 を零に収束させることを考える. (14) 式を (12) 式の $i = 2$ の式に代入すると次式のようになる.

$$\begin{aligned} \delta r_2 &= \int_0^{t_f} L_2 \left[\alpha L_1^T I_{11}^{-1} r_1 + \delta y - L_1^T I_{11}^{-1} \int_0^{t_f} L_1 \delta y dt \right] dt \\ &= \alpha I_{21} I_{11}^{-1} r_1 + \int_0^{t_f} L_2 \delta y dt - I_{21} I_{11}^{-1} \int_0^{t_f} L_1 \delta y dt \\ &= \alpha I_{21} I_{11}^{-1} r_1 + \int_0^{t_f} \hat{L}_2 \delta y dt \quad (17) \end{aligned}$$

$$I_{21} \equiv \int_0^{t_f} L_2 L_1^T dt, \quad \hat{L}_2 \equiv L_2 - I_{21} I_{11}^{-1} L_1$$

先程と同様に $\delta r_2 = \alpha r_2$ とすれば r_2 が指数関数的に零に収束することが保証されるので, つぎの誤差ユークリッドノルム

$$\|\delta r_2 - \alpha r_2\| = \left\| \int_0^{t_f} \hat{L}_2 \delta y dt - \alpha (r_2 - I_{21} I_{11}^{-1} r_1) \right\|$$

を零にする δy の一般解を求めると次式のようになる.

$$\begin{aligned} \delta y &= \alpha \hat{L}_2^T I_{22}^{-1} (r_2 - I_{21} I_{11}^{-1} r_1) + \delta z \\ &\quad - \hat{L}_2^T I_{22}^{-1} \int_0^{t_f} \hat{L}_2 \delta z dt \quad (18) \end{aligned}$$

$$I_{22} \equiv \int_0^{t_f} \hat{L}_2 \hat{L}_2^T dt, \quad \delta z \in R^m : \text{arbitrary vector}$$

(18) 式を (17) 式に代入すると $\delta r_2 = \alpha r_2$ の関係が実現されることが確認できる. したがって, 修正量 δu は (18) 式を (14) 式に代入することにより次式のようになる.

$$\begin{aligned} \delta u &= \alpha L_1^T I_{11}^{-1} r_1 + \alpha K (r_2 - I_{21} I_{11}^{-1} r_1) + \delta z \\ &\quad - L_1^T I_{11}^{-1} \int_0^{t_f} L_1 \delta z dt - K \int_0^{t_f} \hat{L}_2 \delta z dt \quad (19) \end{aligned}$$

$$I_{12} \equiv \int_0^{t_f} L_1 \hat{L}_2^T dt, \quad K \equiv \hat{L}_2^T I_{22}^{-1} - L_1^T I_{11}^{-1} I_{12} I_{22}^{-1}$$

上式において, 任意ベクトル δz はどのように選んでも r_1 と r_2 の収束に影響を与えないことが同様に示せる.

そこで, 最後に r_1 と r_2 の収束を妨げないように任意ベクトル δz を用いて評価汎関数 J の値をできる限り減少させることを考える. ハミルトン関数を H とすると, 評価汎関数 J の微小変動の関係は次式のように表わせる^{1)~4)}.

$$\delta J = \int_0^{t_f} H_u \delta u dt \quad (20)$$

上式より $\delta u = \alpha H_u^T$ とおけば次式の関係が成り立ち, J が極小値に収束することが保証される.

$$\delta J = \alpha \int_0^{t_f} H_u H_u^T dt \leq 0 \quad (21)$$

そこで、ここでは r_1 と r_2 の収束を妨げない範囲で J の最急降下方向をとることを考え (19) 式の任意ベクトルを $\delta z = \alpha H_u^T$ と選ぶことにする。このように選んだ場合、常に J が減少することは保証されないが、 r_1 と r_2 が十分に零に近づいた後は $\delta u \cong \delta z = \alpha H_u$ となって (21) 式の不等式がほぼ実現され J が極小値に収束することが期待できる。以上より、修正量 δu は次式のようになる。

$$\delta u = \alpha \left[L_1^T I_{11}^{-1} r_1 + K(r_2 - I_{21} I_{11}^{-1} r_1) + H_u^T - L_1^T I_{11}^{-1} \int_0^{t_f} L_1 H_u^T dt - K \int_0^{t_f} \hat{L}_2 H_u^T dt \right] \quad (22)$$

上式が計算できるための条件は $\det I_{11} \neq 0, \det I_{22} \neq 0$ となることである。また、以上の議論は微小変動の関係に基づいて行なっているため、この手法が妥当あるためには $\|\delta u\|$ を十分に小さく保つ必要がある。以上の手法は、理論的に収束性は保証されていないが、実用上は有効であることが文献 (13) で確認されている。しかし、ここで示した手法は、終端時刻自由問題、操作量に拘束がある問題に対しては直接には適用することができない。そこで、次章では階層勾配法をそれらの問題に対しても適用できるように拡張することを考える。

4. 階層勾配法の拡張

4.1 終端時刻が自由な場合

まず、終端時刻自由問題にも適用できるようにするために、実際の時間 $t \in [0, t_f]$ と擬似時間 $\tilde{t} \in [0, 1]$ をつぎのように結び付ける時間スケールファクタ⁽¹⁴⁾ κ を導入する。

$$dt = \kappa(\tilde{t}) d\tilde{t} \quad (23)$$

ただし、 κ は次式の拘束条件を満足する 2 乗可積分なスカラー関数とする^(注1)。

$$\kappa(\tilde{t}) \geq 0 \quad \forall \tilde{t} \in [0, 1] \quad (24)$$

このとき、終端時刻 t_f は次式のように表わされる。

$$t_f = \int_0^1 \kappa(\tilde{t}) d\tilde{t} \quad (25)$$

上式より、 κ を変えることによって t_f を変化させられることがわかる。そこで、この時間スケールファクタ κ を用いて第 1 章の最適制御問題を定式化し直すことにする。

時間軸を t から $\tilde{t}$ に変換すると、(1) 式の状態方程式および (2) 式の操作量拘束は次式のようになる。

$$x'(\tilde{t}) = f(x(\tilde{t}), u(\tilde{t}))\kappa(\tilde{t}), \quad x(0) = x_0 \quad (26)$$

$$|u_i(\tilde{t})| \leq u_{i \max} \quad \forall \tilde{t} \in [0, 1] \quad (27)$$

(注1) 文献⁽⁴⁾では、時間軸のスケールリングに時不変のパラメータを用いている。しかし、階層勾配法の場合はパラメータを時不変とすると (13) 式を最小にする一般解を求める際に時間関数 δu と時不変パラメータ κ を同時に最適化する問題となり解くことができない。一方、これを時変とすれば (14) 式と同じ形式の一般解が得られ、階層勾配法を自然に拡張することができる。

ただし、 $(\cdot)'$ は $\tilde{t}$ に関する微分であり、つぎの関係を用いた。

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\tilde{t}} \frac{d\tilde{t}}{dt} = \frac{dx}{d\tilde{t}} \frac{1}{\kappa(\tilde{t})}$$

また、(3),(5),(6) 式はそれぞれ次式のようになる。

$$r_1 = x(1) - x_d = 0 \in R^n \quad (28)$$

$$r_2 = \int_0^1 c(x(\tilde{t}))\kappa(\tilde{t}) d\tilde{t} = 0 \in R^l \quad (29)$$

$$J = \int_0^1 f_0(x(\tilde{t}), u(\tilde{t}))\kappa(\tilde{t}) d\tilde{t} \quad (30)$$

したがって、問題は (26) 式で表わされる制御対象に対して、(27)~(29) 式の拘束条件を満足し、(30) 式の評価汎関数を最小にする操作量 $u(\tilde{t})$ および時間スケールファクタ $\kappa(\tilde{t})$ を見出すこととなる。

以上の問題に対して階層勾配法を拡張する。拘束条件を満たす任意の $u(\tilde{t})$ と $\kappa(\tilde{t})$ に対して、(26) 式は連続な唯一解 $x(\tilde{t})$ を持つ。以下、これを $x(\tilde{t}; u, \kappa), \tilde{t} \in [0, 1]$ と書く。このとき、(28)~(30) 式はそれぞれ次式のように表わされる。

$$r_1(u, \kappa) = x(1; u, \kappa) - x_d \quad (31)$$

$$r_2(u, \kappa) = \int_0^1 c(x(\tilde{t}; u, \kappa))\kappa(\tilde{t}) d\tilde{t} \quad (32)$$

$$J(u, \kappa) = \int_0^1 f_0(x(\tilde{t}; u, \kappa), u(\tilde{t}))\kappa(\tilde{t}) d\tilde{t} \quad (33)$$

そこで、前章と同様に $u(\tilde{t}), \kappa(\tilde{t})$ の微小変動と r_i ($i = 1, 2$) の微小変動の関係を求めると次式のようになる。

$$\delta r_i = \int_0^1 (L_i^u \ L_i^\kappa) \begin{pmatrix} \delta u \\ \delta \kappa \end{pmatrix} d\tilde{t} = \int_0^1 \tilde{L}_i \delta \tilde{u} d\tilde{t} \quad (34)$$

ここで、 $\tilde{u} \equiv (u^T \ \kappa)^T \in R^{m+1}$ 、 $\tilde{L}_i \equiv (L_i^u \ L_i^\kappa)$ ($i = 1, 2$) であり、 $L_1^u \in R^{n \times m}$ 、 $L_1^\kappa \in R^{n \times 1}$ 、 $L_2^u \in R^{l \times m}$ 、 $L_2^\kappa \in R^{l \times 1}$ はつぎの微分方程式

$$\Phi_1' = -\Phi_1 f_x \kappa, \quad \Phi_1(1) = E \quad (35)$$

$$\Phi_2' = -\Phi_2 f_x \kappa - c_x \kappa, \quad \Phi_2(1) = O \quad (36)$$

を逆時間で解いて得られる行列値関数 $\Phi_1 \in R^{n \times n}$ 、 $\Phi_2 \in R^{l \times n}$ を用いて次式のように計算することができる。

$$L_1^u = \Phi_1 f_u \kappa, \quad L_1^\kappa = \Phi_1 f \quad (37)$$

$$L_2^u = \Phi_2 f_u \kappa, \quad L_2^\kappa = \Phi_2 f + c \quad (38)$$

ただし、 $E \in R^{n \times n}$ は単位行列、 $O \in R^{l \times n}$ は零行列である。また、 $u(\tilde{t}), \kappa(\tilde{t})$ の微小変動と評価汎関数 J の微小変動の関係を求めると次式のようになる。

$$\delta J = \int_0^1 (H_u \ H_\kappa) \begin{pmatrix} \delta u \\ \delta \kappa \end{pmatrix} d\tilde{t} = \int_0^1 \tilde{H}_u \delta \tilde{u} d\tilde{t} \quad (39)$$

ここで、 $\tilde{H}_u \equiv (H_u \ H_\kappa) \in R^{m+1}$ であり、 H は次式のように定義されるハミルトン関数である。

$$H(x, u, \kappa, \psi) \equiv f_0(x, u)\kappa + \psi f(x, u)\kappa \quad (40)$$

$\psi \in R^n$ は補助変数行ベクトルであり、つぎの微分方程式

$$\psi' = -H_x, \quad \psi(1) = 0 \quad (41)$$

を逆時間で解くことによって求めることができる。(34)式および(39)式の導出は、文献13)の付録とはほぼ同様なので省略する。

4.2 操作量に拘束がある場合

つぎに操作量に拘束がある場合について考える。ある操作量が制限値に達した場合、その操作量はそれ以上拘束条件や評価関数の収束に寄与することができない。このことを考慮するために、つぎのように定義される $(m+1)$ 次対角行列 $M(\tilde{t})$ を導入する。

$$M(\tilde{t}) = \left(\begin{array}{ccc|c} \eta_1(\tilde{t}) & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \eta_m(\tilde{t}) & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & \eta_{\kappa}(\tilde{t}) \end{array} \right) \quad (42)$$

ここで、 $\eta_j(\tilde{t})$ ($j = 1, \dots, m$) と $\eta_{\kappa}(\tilde{t})$ は次式

$$\eta_j(\tilde{t}) = \begin{cases} 0 & \text{if } |u_j(\tilde{t})| = u_{j \max} \\ 1 & \text{if } |u_j(\tilde{t})| < u_{j \max} \end{cases}$$

$$\eta_{\kappa}(\tilde{t}) = \begin{cases} 0 & \text{if } \kappa(\tilde{t}) = 0 \\ 1 & \text{if } \kappa(\tilde{t}) > 0 \end{cases}$$

のように定義される関数であり、それぞれ $u_j(\tilde{t})$ と $\kappa(\tilde{t})$ が制限値に達した場合にその影響を無効にする役割を持つ。このとき、操作量の制限を考慮した拘束条件および評価関数の微小変動の関係は次式のように表わせる。

$$\delta r_i = \int_0^1 \bar{L}_i M \delta \tilde{u} d\tilde{t} = \int_0^1 \bar{L}_i \delta \tilde{u} d\tilde{t} \quad (i = 1, 2) \quad (43)$$

$$\delta J = \int_0^1 \bar{H}_u M \delta \tilde{u} d\tilde{t} = \int_0^1 \bar{H}_u \delta \tilde{u} d\tilde{t} \quad (44)$$

ただし、 $\bar{L}_i \equiv \bar{L}_i M$ 、 $\bar{H}_u \equiv \bar{H}_u M$ である。したがって、(43)式を(12)式と、(44)式を(20)式とそれぞれ置き換え、前章と同様の手順にしたがって修正量を構成していくことにより次式が得られる。

$$\delta \tilde{u} = \alpha \left[\bar{L}_1^T I_{11}^{-1} r_1 + K(r_2 - I_{21} I_{11}^{-1} r_1) + \bar{H}_u^T \right. \\ \left. - \bar{L}_1^T I_{11}^{-1} \int_0^1 \bar{L}_1 \bar{H}_u^T dt - K \int_0^1 \bar{L}_2 \bar{H}_u^T dt \right] \quad (45)$$

ここで、

$$I_{11} \equiv \int_0^1 \bar{L}_1 \bar{L}_1^T d\tilde{t}, \quad I_{21} \equiv \int_0^1 \bar{L}_2 \bar{L}_1^T d\tilde{t} \\ \bar{L}_2 \equiv \bar{L}_2 - I_{21} I_{11}^{-1} \bar{L}_1 \\ I_{22} \equiv \int_0^1 \bar{L}_2 \bar{L}_2^T d\tilde{t}, \quad I_{12} \equiv \int_0^1 \bar{L}_1 \bar{L}_2^T d\tilde{t} \\ K \equiv \bar{L}_2^T I_{22}^{-1} - \bar{L}_1^T I_{11}^{-1} I_{12} I_{22}^{-1}$$

である。操作量の修正は次式を用いる。

$$\tilde{u}^{k+1}(t) = \text{sat}[\tilde{u}^k(t) + \delta \tilde{u}^k(t)] \quad (46)$$

ただし、 $\text{sat}[w]$ は w がその制限値によって飽和することを意味する。すなわち、

$$u_j^{k+1} = \begin{cases} u_{j \max} & \text{if } u_j^k + \delta u_j^k \geq u_{j \max} \\ u_j^k + \delta u_j^k & \text{if } |u_j^k + \delta u_j^k| < u_{j \max} \\ -u_{j \max} & \text{if } u_j^k + \delta u_j^k \leq -u_{j \max} \end{cases}$$

$$\kappa^{k+1} = \begin{cases} \kappa^k + \delta \kappa^k & \text{if } \kappa^k + \delta \kappa^k > 0 \\ 0 & \text{if } \kappa^k + \delta \kappa^k \leq 0 \end{cases}$$

である。本節の手法は、clipping-off の考え方^{2)~4),9)}を階層勾配法に拡張したものである。

4.3 計算アルゴリズム

ここでは、2章で定式化した問題の解を求めるための具体的な計算手順を整理する。

まず、時間スケールファクタ κ を導入して時間軸を t から $\tilde{t}$ に変換し、2章の問題を4.1節の(26)~(30)式の形式に変換する。そして、以下のアルゴリズムにしたがって変換後の問題の解 $u(\tilde{t}), \kappa(\tilde{t})$ を求める。

Step1 (27)式および(24)式の制限を満足する初期推定操作量 u^0 と時間スケールファクタ κ^0 を与える。負定数 α 、収束判定基準値 ϵ を設定する。 $k=0$ とおく。

Step2 u^k, κ^k に対して状態方程式(26)の解 x^k を求める。(28)~(30)式より r_1^k, r_2^k, J^k を計算する。

Step3 u^k, κ^k に対して微分方程式(35),(36)の解 Φ_1^k, Φ_2^k を求める。得られた Φ_1^k, Φ_2^k を用いて(37),(38)式より、 $L_1^k, L_1^{\kappa k}, L_2^k, L_2^{\kappa k}$ を計算し、 $\bar{L}_1^k = (L_1^k \ L_1^{\kappa k})$ 、 $\bar{L}_2^k = (L_2^k \ L_2^{\kappa k})$ とする。

Step4 u^k, κ^k に対して微分方程式(41)の解 ψ^k を求める。得られた ψ^k を用いて(40)式で定義されるハミルトン関数の u と κ に関する偏導関数 $H_u^k = H_u(x^k, u^k, \kappa^k, \psi^k)$ 、 $H_{\kappa}^k = H_{\kappa}(x^k, u^k, \kappa^k, \psi^k)$ を計算し、 $\bar{H}_u^k = (H_u^k \ H_{\kappa}^k)$ とする。

Step5 u^k, κ^k に対して(42)式より M^k を計算し、 $\bar{L}_1^k = \bar{L}_1^k M^k$ 、 $\bar{L}_2^k = \bar{L}_2^k M^k$ 、 $\bar{H}_u^k = \bar{H}_u^k M^k$ を求める。得られた $\bar{L}_1^k, \bar{L}_2^k, \bar{H}_u^k$ を用いて(45)式より修正量

$$\delta \tilde{u}^k = \begin{pmatrix} \delta u^k \\ \delta \kappa^k \end{pmatrix}$$

を計算する。

Step6 $\tilde{u}^k$ を(46)式

$$\tilde{u}^{k+1} = \begin{pmatrix} u^{k+1} \\ \kappa^{k+1} \end{pmatrix} = \text{sat} \left[\begin{pmatrix} u^k \\ \kappa^k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta u^k \\ \delta \kappa^k \end{pmatrix} \right]$$

にしたがって修正する。修正後の u^{k+1}, κ^{k+1} に対して状態方程式(26)の解 x^{k+1} を求める。(28)~(30)式より $r_1^{k+1}, r_2^{k+1}, J^{k+1}$ を計算する。

Step7 つぎの収束判定条件

$$\|r_1^{k+1}\| < \epsilon, \quad \|r_2^{k+1}\| < \epsilon, \quad |J^{k+1} - J^k| < \epsilon$$

を同時に満足した場合、計算を終了する。収束が不十分な場合 $k = k+1$ として **Step3**に戻る。

Fig. 2 Notation for a car

時間軸変換後の問題の解 $u(\bar{t}), \kappa(\bar{t})$ が得られると、 $\kappa(\bar{t})$ より $\bar{t}$ と t は次式のように対応付けられる。

$$t = \int_0^{\bar{t}} \kappa(\tau) d\tau \quad (47)$$

したがって、この関係を用いて $u(\bar{t})$ の時間軸を元に戻すことにより、元の問題の解 $u(t)$ が得られる。

(注意) 上記の繰り返し計算においては、前述のように $\|\delta\bar{u}\|$ を小さく保つ必要がある。そのためには、たとえば

$$\int_0^1 \|\delta\bar{u}\|^2 d\bar{t} \leq \gamma \quad (48)$$

という制限を設け、これを超えた場合に $\delta\bar{u}$ を比例的に小さくするなどの処理を追加すればよい。ただし、制限を厳しくし過ぎると $\delta\bar{u}$ が微小になり収束に要する繰り返し数が膨大になるため制限値 γ は適切に設定する必要がある。

5. 適用例

本章では、自動車の最短軌道生成問題に対して提案したアルゴリズムを適用し、その有効性を確認する。

5.1 自動車の最短軌道生成問題

ここでは、Fig.2に示すような、前輪操舵、後輪駆動の4輪自動車を対象とする。自動車のタイヤに滑りが生じないものと仮定すると運動学関係式は次式のようになる。

$$\dot{x} = v \cos \theta \quad (49)$$

$$\dot{y} = v \sin \theta \quad (50)$$

$$\dot{\theta} = \frac{v}{D} \tan \phi \quad (51)$$

ここで、 (x, y) は後輪中央の座標、 v はその点での速度、 D は前後輪の車軸間距離、 θ は姿勢角、 ϕ は操舵角である。 $u_1 \equiv v, u_2 \equiv v \tan \phi$ を操作量と考え、 $D = 1, |v| \leq 1, |\phi| \leq \frac{\pi}{4}$ と仮定すると、つぎの状態方程式を得る。

$$\dot{x} = \cos \theta \cdot u_1, \quad x(0) = 0 \quad (52)$$

$$\dot{y} = \sin \theta \cdot u_1, \quad y(0) = 0 \quad (53)$$

$$\dot{\theta} = u_2, \quad \theta(0) = 0 \quad (54)$$

ただし、自動車は初期時刻に原点にあるものとしている。仮定より、操作量は次式のように制限される。

$$|u_2(t)| \leq |u_1(t)| \leq 1 \quad \forall t \in [0, t_f] \quad (55)$$

目標状態を (x_d, y_d, θ_d) とすると終端拘束は次式となる。

$$r_1 = \begin{pmatrix} x(t_f) - x_d \\ y(t_f) - y_d \\ \theta(t_f) - \theta_d \end{pmatrix} \quad (56)$$

また、作業空間に障害物が存在する場合には状態拘束を受ける。ここでは、簡単のために参照点 (x, y) が中心位置 (x_0, y_0) 、半径 d_0 の円形領域に入らないことを障害物と考えることにする。このとき、状態拘束は次式のように表わせる。

$$g(x, y) = d(x, y) - d_0 > 0 \quad \forall t \in [0, t_f] \quad (57)$$

ただし、 $d(x, y) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ は参照点と障害物中心間の距離である。(57)の不等式拘束は、つぎのような等式拘束に変換することができる。

$$r_2 = \int_0^{t_f} c(x(t), y(t)) dt = 0 \quad (58)$$

ここで、 $c(x, y)$ は(57)式の拘束が満たされない場合に正の値をとるつぎのような関数である。

$$c(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2} \beta g(x, y)^2 & \text{if } g(x, y) \leq 0 \\ 0 & \text{if } g(x, y) > 0 \end{cases} \quad (59)$$

ただし、 β は適当な重み係数である。評価汎関数は次式のように設定する。

$$J = t_f = \int_0^{t_f} dt \quad (60)$$

上式は動作時間を最短にする評価汎関数となっているが、ここでは自動車の運動学のみを考慮し動力学については考えていないため、以上の問題設定は移動距離を最短にすることと等価である。障害物がない環境における自動車の最短軌道生成問題については、ReedsとShepp¹⁵⁾によって最適性の条件が導出され、それに基づいて厳密解を効率的に生成するアルゴリズムがDesaulniersら¹⁶⁾によって提案されている。そこで、以下ではまず障害物がない場合の問題に対して提案手法を適用し、得られる数値解と厳密解（以下、ReedsとSheppの軌道と呼ぶ）とを比較することによって解の精度を検証する。つぎに、障害物がある場合について考え、状態拘束が存在する場合にも良好な収束が得られることを確認する。

5.2 障害物がない場合

まず、障害物がない場合について考える。時間スケールファクタ κ を導入し時間軸を t から $\bar{t}$ に変換すると、(52)~(54)の状態方程式は次式のようになる。

$$x'(\bar{t}) = \cos \theta(\bar{t}) \cdot u_1(\bar{t}) \cdot \kappa(\bar{t}), \quad x(0) = 0 \quad (61)$$

$$y'(\bar{t}) = \sin \theta(\bar{t}) \cdot u_1(\bar{t}) \cdot \kappa(\bar{t}), \quad y(0) = 0 \quad (62)$$

$$\theta'(\bar{t}) = u_2(\bar{t}) \cdot \kappa(\bar{t}), \quad \theta(0) = 0 \quad (63)$$

また、(55)式の操作量拘束は次式のようになる。

$$|u_2(\bar{t})| \leq |u_1(\bar{t})| \leq 1 \quad \forall \bar{t} \in [0, 1] \quad (64)$$

(56)式の終端拘束と(60)式の評価汎関数はそれぞれ

Fig. 3 Example1: Optimal trajectory

Fig. 4 Example2: Optimal trajectory

Table 1 Comparison of performance Index

	Reeds and Shepp	Proposed Method
Example1	1.086331	1.086401
Example2	4.075023	4.075342

$$r_1 = \begin{pmatrix} x(1) - x_d \\ y(1) - y_d \\ \theta(1) - \theta_d \end{pmatrix} \quad (65)$$

$$J = \int_0^1 \kappa(\tilde{t}) d\tilde{t} \quad (66)$$

のように変換される。ここでは、以下の二つの目標状態について計算を行なうことにする。

Example1 : $(x_d, y_d, \theta_d) = (0.2, 0.2, 0^\circ)$

Example2 : $(x_d, y_d, \theta_d) = (3.0, 0.0, 135^\circ)$

得られた軌道をそれぞれ Fig.3 と Fig.4 に示す。図において、網掛け線は Reeds と Shepp の軌道、実線は提案手法によって得られた軌道を表わしている。また、それぞれの軌道に対する評価汎関数値の比較を Table 1 に示す。これより、提案手法によって十分に厳密解に近い解が得られていることが確認できる。Fig.5 および Fig.6 は、それぞれ Example1 の場合の最適な操作量と時間スケールファクタの軌道を表わ

Fig. 5 Example1: Optimal control

Fig. 6 Example1: Optimal time scale factor

Fig. 7 Example1: Objective versus iteration number

している。Fig.5 より、操作量の拘束を満足していることが確認できる。Fig.6 では、時間スケールファクタが操作量の切換え点で尖点を持つことが観察できる。Fig.7 は、Example1 の場合の収束の様子を表わしている。これより、安定した収束が得られていることが確認できる。Example1 の計算では、 $\alpha = -0.3$ 、 $\epsilon = 10^{-4}$ 、 $u_1^0 \equiv u_2^0 \equiv 0.5$ 、 $\kappa^0 \equiv 10.0$ 、 $\gamma = 1.0$ と設定した。また、収束に要した繰り返し数は 163 回、計算時間は約 40 秒(時間区間 5000 分割、Intel 733MHz

Fig. 8 Example3: Optimal trajectory

Pentium, Microsoft Visual C++) であった。

5.3 障害物がある場合

つぎに、障害物がある場合について考える。時間軸変換を行なうと (58) 式は次式ようになる。

$$r_2 = \int_0^1 c(x(\tilde{t}), y(\tilde{t})) \kappa(\tilde{t}) d\tilde{t} = 0 \quad (67)$$

ここでは、以下の目標状態および障害物について計算を行なう。

Example3: $(x_d, y_d, \theta_d) = (3.0, 0.0, 135^\circ)$

$(x_0, y_0) = (1.5, 0.0), d_0 = 0.5$

$\alpha = -0.7, \epsilon = 10^{-4}, u_1^0 \equiv u_2^0 \equiv 0.5, \kappa^0 \equiv 10.0, \beta = 10.0, \gamma = 1.0$ と設定して提案した手法を適用した結果、405 回の繰り返しの後、 $J = 4.2391$ に収束した。計算時間は約 12 秒 (時間区間 500 分割, Intel 733MHz Pentium, Microsoft Visual C++) であった。得られた軌道を Fig.8 に示す。図より、障害物と干渉しない軌道が得られていることが確認できる。また、対応する最適操作量と時間スケールファクタの軌道を Fig.9 および Fig.10 に示す。Fig.9 より、操作量の拘束も満たされていることが確認できる。また、Fig.10 より先ほどと同様に時間スケールファクタは操作量の切換え点で尖点をもつことが観察できる。Fig.11 は、終端拘束、状態拘束、および評価汎関数の収束のようすを 100 回目まで表わした図である。これより、強い非線形性を有する問題であるにも関わらず、比較的良好な収束が得られていることが確認できる。 r_1 と r_2 には若干の干渉が見られるが、 $\|\delta \tilde{u}\|$ の制限をより厳しくすることによって干渉の影響を小さくすることができる。以上により、提案手法の有効性が示された。

6. おわりに

本論文では、終端拘束と状態拘束を取り扱うことができる階層勾配法を、さらに操作量拘束がある場合、終端時刻が自由な場合にも適用できるように拡張した。自動車の最短軌道生成問題に対して提案した手法を適用し、その有効性を確認した。

Fig. 9 Example3: Optimal control

Fig. 10 Example3: Optimal time scale factor

Fig. 11 Example3: Objective versus iteration number

参考文献

- 1) A.E. Bryson Jr and Y-C Ho: Applied Optimal Control, Hemisphere Publishing Corporation (1975)
- 2) 嘉納秀明: システムの最適理論と最適化, コロナ社 (1987)
- 3) 志水清孝: 最適制御の理論と計算法, コロナ社 (1994)
- 4) 山浦弘夫: 最適制御入門, コロナ社 (1996)
- 5) L.S. Lasdon, S.K. Mitter and A.W. Waren: The Conjugate Gradient Method for Optimal Control Problems, IEEE Transaction on Automatic Control, 12-2, 132/138 (1967)
- 6) L.S. Lasdon: Conjugate Direction Methods for Optimal

- Control, IEEE Transaction on Automatic Control, 15-2, 267/268 (1970)
- 7) D.H. Jacobson and M.M. Lele: A Transformation Technique for Optimal Control Problems with a State Variable Inequality Constraints, IEEE Transaction on Automatic Control, 14-5, 457/464 (1969)
 - 8) L.S. Lasdon, A.D. Waren and R.K. Rice: An Interior Penalty Method for Inequality Constrained Optimal Control Problems, IEEE Transaction on Automatic Control, 12-4, 388/395 (1967)
 - 9) V.H. Quintana and E.J. Davison: Clipping-off Gradient Algorithms to Compute Optimal Controls with Constrained Magnitude, International J. Control, 20-2, 243/255 (1974)
 - 10) Y. Sakawa and Y. Shindo: On Global Convergence of an Algorithm for Optimal Control, IEEE Transaction on Automatic Control, 25-6, 1149/1153 (1980)
 - 11) 志水, 伊藤: Hilbert 空間における双対準 Newton 法とその状態制約最適制御問題への応用, 計測自動制御学会論文集, 26-9, 1015/1022 (1990)
 - 12) 井前, 井上: 非線形最適制御問題の数値解導出に関する統一的解法, システム制御情報学会論文誌, 14-7, 347/356 (2001)
 - 13) 岩村, 山本, 毛利: 複数の拘束条件が課せられる最適軌道計画問題の数値解法とその非ホロノミック系への適用, 日本ロボット学会誌, 19-2, 260/270 (2001)
 - 14) 尾崎, 秀田, 山本, 毛利: 空間経路が指定されるマニピュレータ動作の時間短縮, 計測自動制御学会論文集, 22-10, 1074/1080 (1986)
 - 15) J.A. Reeds and L.A. Shepp: Optimal paths for a that goes both forward and backward, Pacific Journal of Mathematics, 145-2, 367/393 (1990)
 - 16) G. Desaulniers and F. Soumis: An Efficient Algorithm to Find a Shortest Path for a Car-Like Robot, IEEE Transaction on Robotics and Automation, 11-6, 819/828 (1995)

毛利 彰 (正会員)

1969年九州大学大学院工学研究科博士課程単位取得退学(生産機械工学専攻)。同年九州大学工学部講師, 助教授を経て, 82年同教授, 現在に至る。ロボット工学, 制御工学の研究に従事。日本機械学会, 日本ロボット学会などの会員。(工学博士)。

[著者紹介]

岩村 誠人 (正会員)

2001年九州大学大学院工学研究科博士後期課程修了(知能機械工学専攻)。同年福岡大学工学部講師, 現在に至る。最適制御理論, 非線形制御理論とそのメカニカルシステムへの応用に興味をもつ。日本機械学会, 日本ロボット学会の会員。博士(工学)。

河野 裕介

2002年九州大学大学院工学府修士課程修了(知能機械システム専攻)。同年松下電器産業(株)に入社, 現在に至る。在学中は, 最適制御の数値計算法の研究に従事。

尾崎 弘明 (正会員)

1972年九州大学大学院工学研究科修士課程修了(生産機械工学専攻)。90年より福岡大学工学部教授, 現在に至る。95~96年加サイモンフレーザ大学客員教授。ロボティクス・メカトロニクスシステムの軌道計画と制御に関する研究に従事。日本機械学会, 日本ロボット学会などの会員。(工学博士)。