通信容量制約のあるサンプル値制御系の最適設計†

藤岡 久也*・伊藤 健作**

An Optimal Design of Sampled-Data Systems with Communication Constraints†

Hisaya FUJIOKA* and Kensaku ITO**

This paper proposes a design method for NCSs (networked control systems), where plant and controller are linked through a serial communication network. The network has limited capacity and control inputs and measured outputs are updated/sampled partially at each step. Assuming that the controller-plant communication is periodic, the design problem is formulated as one for sampled-data feedback systems with periodic discrete-time components. A necessary and sufficient condition for existence of discrete-time periodic controller is given in terms of LMIs, and a controller construction algorithm is derived. The proposed controller (if exists) is stabilizing and sub-optimizes the L_2 -induced norm of the resultant NCS.

Key Words: networked control systems, sampled-data control, H_∞ control

1. はじめに

シリアル通信路を介して構成される制御系を NCS (Networked Control System) という¹⁾。NCS は、通常採用される point-to-point 接続による制御系と比較して、配線の少なさ、それにともなう配線やメンテナンスの容易さ、価格、信頼性などに優れており、自動車、プラント、航空機などにおいて用いられている。

NCS における情報伝達はシリアル通信により行なわれるため、補償器が同時にアクセスすることができるアクチュエータおよびセンサの数は制限される²⁾。この通信容量制約は point-to-point 接続では存在せず、NCS 設計に独特な困難の 1 つである^(注1)。

通信路の容量制約に対処する自然な方法は、使用するセンサ/アクチュエータを周期的に切替える²⁾ ことであろう。この考えに基づき文献 2)~4) ではセンサ/アクチュエータが周期的に切り替わる系の内部安定化問題を考察している。特に文献 3), 4) では安定化問題の必要十分条件と安定化補償器の構成法が与えられている。しかし、これらの従来研究で制御性能に関する議論はない。

そこで本稿では、通信容量制約のある制御系に対して系の内部安定性に加えて性能を最適化する設計法を提案する。性能を適切に評価するために系をサンプル値制御系とみなし、

L_2 誘導ノルムを準最適化する周期的な離散時間補償器が存在するための必要十分条件と補償器の構成法を示す。

本稿の構成は以下の通りである：2 節で通信容量制約のあるシステムについて述べ、設計問題を周期的な離散時間系を含んだサンプル値制御系の設計問題として定式化する。3 節で設計問題が可解であるための必要十分条件を LMI で与え、補償器の構成アルゴリズムを与える。4 節で数値例を示す。

記法：行列 A の転置行列を A' で表わす。行列 $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ に対して $XA = 0$, $XX' > 0$ を満たす行列 $X \in \mathbb{R}^{(n-r) \times n}$ を $A^\perp$ と表わす。ただし $r := \text{rank } A$ 。行列 $A \in \mathbb{R}^{np \times nm}$ が $p \times m$ 行列によって構成されるブロック下三角行列：

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & \dots & 0 \\ A_{21} & A_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}, \quad A_{ij} \in \mathbb{R}^{p \times m}$$

であるとき $A \in \text{BLT}(p, m, n)$ とかく。自然数 ν に対するブロッキング⁵⁾を B_ν とかく^(注2)。適切なサイズのもとでシステム G, H のフィードバック結合を $G \star H$ と表わす。因果的な線形離散時間系 G_d の状態空間表現が

(注1) ほかの困難としては伝達遅延、量子化、バッファの飽和などがあるが、本稿では考慮しない。

(注2) 離散時間信号 $\{x[k]\}_{k=0}^\infty$ からそれを ν 個ずつまとめた別の離散時間信号への変換 $B_\nu: \ell_{2e}^n \rightarrow \ell_{2e}^{\nu n}$;

$$(B_\nu x)[k] := \begin{bmatrix} x[\nu k] \\ x[\nu k + 1] \\ \vdots \\ x[\nu(k+1) - 1] \end{bmatrix}$$

を ν に対するブロッキングという。

† 第2回制御部門大会で発表 (2002・5)

* 京都大学大学院情報学研究科 京都市左京区吉田本町

** 新日本製鐵 (株) 君津製鐵所 君津市君津 1

* Graduate School of Informatics, Kyoto University, Kyoto

** Kimitsu Works, Nippon Steel Corporation, Kimitsu

(Received May 7, 2002)

(Revised February 21, 2003)

Fig. 1 Networked control system

Fig. 2 Sampled-data system with periodic discrete-time components

$$\begin{bmatrix} x[k+1] \\ y[k] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A[k] & B[k] \\ C[k] & D[k] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[k] \\ u[k] \end{bmatrix}$$

で与えられるとき

$$G_d^{\text{ssr}} = \begin{bmatrix} A[k] & B[k] \\ C[k] & D[k] \end{bmatrix}$$

とかく、連続時間系に対しても同様に表記する。 L_2 安定な線形連続時間系 G_c に対して L_2 誘導ノルムを $\|G_c\|$ で、 l_2 安定な線形離散時間系 G_d に対して l_2 誘導ノルムを $\|G_d\|$ でそれぞれ表わす。

2. 通信容量制約のあるサンプル値制御系

2.1 NCSと通信容量制約

Fig. 1 に NCS の例を示す。制御対象 (plant) はセンサ (sensor), アクチュエータ (actuator) を介してネットワークに接続されるが、センサ, アクチュエータ, 補償器 (controller) はそれぞれ独立のネットワークノードであるとする。

通常の制御系ではすべてのセンサ・アクチュエータは補償器と point-to-point 接続され、補償器はすべてのセンサ・アクチュエータと同時に情報をやりとりすることができるが、NCS では通信容量制約がある。たとえば制御対象が SISO でネットワークがバス型ならば、補償器はセンサ・アクチュエータの両方と同時に情報をやりとりすることはできない。

通信容量制約のもとで制御系を構築するための自然な方法は、補償器と情報をやりとりするセンサ・アクチュエータを周期的に切り替える²⁾ことであろう。本稿でも通信容量制約への対処は周期的な入出力切り替えにより行なう。

2.2 問題設定

以下、通信容量制約を持つ制御系の設計問題を離散時間周期系を含むサンプル値制御系 (Fig. 2) の設計問題として定式

化する。Fig. 2 において G_c は連続時間有限次元線形時不変系である^(注3)：

$$G_c^{\text{ssr}} = \begin{bmatrix} A_c & B_{c1} & B_{c2} \\ C_{c1} & D_{c11} & D_{c12} \\ C_{c2} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

S, H はそれぞれ周期 h の理想サンプリング、ゼロ次ホールド：

$$S : y_c \mapsto y : y[k] = y_c(kh),$$

$$H : u \mapsto u_c : u_c(kh + \theta) = u[k], \quad \theta \in [0, h).$$

である。 N_d は周期的に切り替わる通信路を表わす離散時間周期系であり、周期を ν とする^(注4)：

$$N_d^{\text{ssr}} = \begin{bmatrix} A_N[k] & B_{N1}[k] & B_{N2}[k] \\ C_{N1}[k] & 0 & D_{N12}[k] \\ C_{N2}[k] & D_{N21}[k] & 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

ただし $k = 0, 1, 2, \dots$ に対して

$$\begin{bmatrix} A_N[k] & B_{N1}[k] & B_{N2}[k] \\ C_{N1}[k] & 0 & D_{N12}[k] \\ C_{N2}[k] & D_{N21}[k] & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_N[k+\nu] & B_{N1}[k+\nu] & B_{N2}[k+\nu] \\ C_{N1}[k+\nu] & 0 & D_{N12}[k+\nu] \\ C_{N2}[k+\nu] & D_{N21}[k+\nu] & 0 \end{bmatrix}$$

が成り立つ。 K_d は設計すべき離散時間補償器であり、 ν -周期系であるとする。

[例 1] 制御対象が SISO でネットワークのバス容量が 1 であり、センサから補償器への信号 y_d と補償器からアクチュエータへの信号 u が交互に更新される場合を考える。このとき $\nu = 2$ であり、 y_d, u はそれぞれ y, u_d をもちいて

$$y_d[k] = \begin{cases} y[k] & k = 0, 2, 4, \dots, \\ y[k-1] & k = 1, 3, 5, \dots \end{cases}$$

$$u[k] = \begin{cases} u_d[k-1] & k = 0, 2, 4, \dots, \\ u_d[k] & k = 1, 3, 5, \dots \end{cases}$$

で与えられる。したがって N_d を

$$N_d^{\text{ssr}} = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} & k = 0, 2, 4, \dots, \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} & k = 1, 3, 5, \dots \end{cases}$$

で定めることで Fig. 2 の枠組に帰着される。

(注意 1) K_d が時刻 k においてやりとりする情報の個数は

(注 3) 閉ループ系の L_2 安定性の必要条件から D_{21}, D_{22} 行列は 0 とした。

(注 4) D_{11} 行列はネットワークにおけるセンサからアクチュエータへの直達項であり、0 以外の値をとることはないとした。 D_{22} 行列も同様。

$$\text{rank} \begin{bmatrix} 0 & D_{N12}[k] \\ D_{N21}[k] & 0 \end{bmatrix}$$

で与えられる。したがってこの値は通信容量より大きくない。

本稿では以下の設計問題を考える:

[問題1] 与えられた G, N_d に対して Fig. 2 の $G \star N_d \star K_d$ を内部安定化し、

$$\|G \star N_d \star K_d\| < 1$$

とする離散時間補償器 K_d を求めよ。ただし

$$G := \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix} G_c \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & H \end{bmatrix}. \quad (2)$$

(注意2) Fig. 2 の系の内部安定性は離散化システムの内部安定性^{2)~4)}と等価であり、内部安定化補償器の解析的な構成法が文献3), 4)で与えられている。問題1は安定性だけでなく制御性能を考慮している。

3. 主要結果

本節では、問題1の解の存在条件と解の構成法を与える。まず問題1が可解となるための必要条件の1つ^(注5)を述べる:

[補題1] $\|D_{11}\| \geq 1$ ならば問題1は解をもたない。ただし $D_{11}: L_2[0, h) \rightarrow L_2[0, h)$ は次式で定義される:

$$(D_{11}w)(\theta) := C_{c1} \int_0^\theta e^{A_c(\theta-\tau)} B_{c1} w(\tau) d\tau + D_{c11} w(\theta).$$

(証明) $G \star N_d \star K_d$ が安定のときを考えればよい。このとき D_{11} は $G \star N_d \star K_d$ の $L_2[0, h)$ への制限であるから

$$\|G \star N_d \star K_d\| \geq \|D_{11}\|$$

が成立する。 ■

したがって以下ではつぎを仮定する:

[仮定1] 与えられた(2)の G に対して次式が成立する:

$$\|D_{11}\| < 1. \quad (3)$$

仮定1のもと、つぎの補題は問題1を離散時間周期系に対する設計問題に帰着する:

[補題2] 仮定1を満たす(2)の G に対して G_∞ を文献6)または7)の H_∞ 等価な離散時間系として定める。このとき以下は等価である:

- (i) $G \star N_d \star K_d$ が安定で $\|G \star N_d \star K_d\| < 1$.
- (ii) $G_d \star K_d$ が安定で $\|G_d \star K_d\| < 1$. ただし

$$G_d := G_\infty \star N_d. \quad (4)$$

(証明) 文献6), 7)はサンプル値 H_∞ 設計問題を離散時間問題に帰着する際、離散時間要素の時不変性、有限次元性を用いていないことから明らか。 ■

(4)の G_d に対して $\tilde{G}_d$ を

$$\tilde{G}_d := B_\nu G_d B_\nu^{-1} \quad (5)$$

(注5) サンプル値 H_∞ 設計問題において仮定される条件と同一の条件である。

で定める。 $\tilde{G}_d$ は時不変系であり(付録C参照)、状態空間表現を

$$\tilde{G}_d^{\text{ssr}} := \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{array} \right] \quad (6)$$

とおく。以下の定理は問題1の可解条件のLMI表現と解の構成法を与える。ただし A, D_{11} のサイズをそれぞれ $n \times n, \bar{p} \times \bar{m}$ とする(証明は付録Bに示す):

《定理1》 仮定1のもと問題1が可解であるための必要十分条件は、行列 $X = X' \in \mathbb{R}^{n \times n}, Y = Y' \in \mathbb{R}^{n \times n}, Z \in \text{BLT}(m, p, \nu)$ が存在して(7)~(10)が成立することである:

$$\tilde{B}^\perp (\tilde{A} \tilde{X}_{\tilde{m}} \tilde{A}' - \tilde{X}_{\tilde{p}}) (\tilde{B}^\perp)' < 0, \quad (7)$$

$$(\tilde{C}')^\perp (\tilde{A}' \tilde{Y}_{\tilde{p}} \tilde{A} - \tilde{Y}_{\tilde{m}}) ((\tilde{C}')^\perp)' < 0, \quad (8)$$

$$\begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} > 0, \quad (9)$$

$$\Delta := \begin{bmatrix} \tilde{X}_{\tilde{p}} & -(\tilde{A} + \tilde{B}Z\tilde{C}) \\ -(\tilde{A} + \tilde{B}Z\tilde{C})' & \tilde{Y}_{\tilde{m}} \end{bmatrix} > 0. \quad (10)$$

ただし

$$\tilde{A} := \begin{bmatrix} A & B_1 \\ C_1 & D_{11} \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} := \begin{bmatrix} B_2 \\ D_{12} \end{bmatrix}, \quad \tilde{C} := \begin{bmatrix} C_2 & D_{21} \end{bmatrix},$$

$$\tilde{X}_q := \begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & I_q \end{bmatrix}, \quad \tilde{Y}_q := \begin{bmatrix} Y & 0 \\ 0 & I_q \end{bmatrix}.$$

《定理2》 問題1が可解ならば解の1つ K_d は以下の手順で構成される:

Step 1: (7)~(10)を解き $X = X' \in \mathbb{R}^{n \times n}, Y = Y' \in \mathbb{R}^{n \times n}, Z \in \text{BLT}(m, p, \nu)$ を定める。

Step 2: $\bar{K}_d$ を

$$\bar{K}_d^{\text{ssr}} := \left[\begin{array}{c|c} A_K & B_K \\ \hline C_K & Z \end{array} \right] \quad (11)$$

で定める。 A_K, B_K, C_K の定義は付録Aで与える。

Step 3: $\tilde{K}_d$ を次式で定める:

$$\tilde{K}_d := (-D_{22}) \star \begin{bmatrix} I \\ I \end{bmatrix} \bar{K}_d \begin{bmatrix} I & I \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\stackrel{\text{ssr}}{=} \left[\begin{array}{c|c} A_K - B_K \tilde{R}^{-1} D_{22} C_K & B_K \tilde{R}^{-1} \\ \hline (I + Z D_{22})^{-1} C_K & Z \tilde{R}^{-1} \end{array} \right].$$

ただし $\tilde{R} := I + D_{22}Z$.

Step 4: K_d を次式で定める:

$$K_d := B_\nu^{-1} \tilde{K}_d B_\nu.$$

定理2の K_d は因果的な ν -周期系である。 K_d の時間領域での表現は付録Cの性質4から得ることができる。

(注意3) マルチレート問題(たとえば文献8))と同様に、

Table 1 Performance of resultant system

	L_2 -induced norm
method 0	0.07
method 1-1	unstable
method 1-2	0.70
method 2	0.18

$\tilde{G}_d$ に対する H_∞ 設計問題が可解, すなわち安定化補償器 $\hat{K}_d$ が存在して

$$\|\tilde{G}_d \star \hat{K}_d\| < 1$$

が成立したとしても $B_v^{-1} \hat{K}_d B_v$ は因果的とは限らないため, 問題 1 の因果的な解の存在は保証されない.

(注意 4) 変数変換法 (たとえば文献 9)) に基づいて定理 1, 2 と等価な結果を導出することも可能である.

4. 数 値 例

G_c が以下で与えられる NCS を考える ($p = m = 2$):

$$G_c := \begin{bmatrix} W_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix} P_c + \begin{bmatrix} 0 & W_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad P_c := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

W_1, W_2 はそれぞれ伝達関数

$$\hat{W}_1(s) = \frac{s}{s+1}, \quad \hat{W}_2(s) = \frac{0.1s}{s+1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

で定められる. サンプル間隔は $h = 0.1$, 通信容量は 3 とする.

ここでは K_d は 2 つのアクチュエータに同時にアクセスできるとする. すなわち N_d は

$$N_d = \begin{bmatrix} 0 & I_2 \\ N_y & 0 \end{bmatrix}$$

と表わされる. このとき N_y を以下のとおり定め, それぞれの設計法を比較する:

設計法 0 比較対象として通信容量に制約がない場合を考える. すなわち

$$N_y = I_2$$

とし, サンプル値 H_∞ 設計により K_d を求める.

設計法 1 2 つの観測出力の一方だけを常に用い, サンプル値 H_∞ 設計により K_d を求める.

設計法 1-1 N_y を以下で定める:

$$N_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

設計法 1-2 N_y を以下で定める:

$$N_y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

設計法 2 観測出力を切り替えて提案法により K_d を求める. $N_y: y \mapsto y_d$ を以下で定める:

Fig. 3 Sinusoid response

$$y_d[k] = \begin{cases} \begin{bmatrix} y_1[k] \\ y_2[k-1] \end{bmatrix}; & (k: \text{偶数}), \\ \begin{bmatrix} y_1[k-1] \\ y_2[k] \end{bmatrix}; & (k: \text{奇数}). \end{cases}$$

設計結果を Table 1 にまとめる. 設計法 0 の結果は, 通信容量制約がない場合に達成可能な性能限界である. センサの一方のみを用いた設計法 1-1, 設計法 1-2 と比較して, 設計法 2 (提案法) は性能限界に近い性能を得ている.

設計法 1-2 と設計法 2 により得られた K_d を用いて w_c を 5 [rad/sec] の正弦波信号としたときの $G \star N_d \star K_d$ の時間応答を Fig. 3 に示す. 設計法 2 (proposed) により得た K_d の方がよい外乱抑制性能を示している.

5. おわりに

本稿では NCS において現れる通信容量制約のもとで内部安定性に加えて性能を最適化する制御系の設計法を提案した. 得られる補償器は離散時間周期系であり, 閉ループ系を内部安定化し L_2 誘導ノルムを準最適化する.

本稿で考慮していない NCS における問題にセンサ・アクチュエータのスケジューリング¹⁰⁾がある. すなわち本稿では N_d は与えられるとしたが, 本来 N_d は設計者が決定するものである. N_d を含めた設計の重要性を 4 節の例題を用いて示す: $N_y: y \mapsto y_d$ を

$$y_d[k] = \begin{cases} \begin{bmatrix} y_1[k] + 1.5y_2[k] \\ y_1[k-1] + y_2[k-1] \end{bmatrix}; & (k: \text{偶数}) \\ \begin{bmatrix} y_1[k-1] + 1.5y_2[k-1] \\ y_1[k] + y_2[k] \end{bmatrix}; & (k: \text{奇数}) \end{cases}$$

で定めるときノルムの上界は 0.09 であり, 性能限界に非常に近い. すなわち K_d に加えて N_d を設計変数とすることで NCS の性能の向上が期待できる. しかし上の N_y は試行錯誤により定めたものであり, 効率のよい N_d および K_d の設計法は今後の課題である.

謝辞: 変数変換法により LMI への帰着が可能であること (注意 4) は増淵助教 (広島大) のご指摘によるものです.

《付 録》

A. A_K, B_K, C_K の定義

定理2の A_K, B_K, C_K は以下で定義される:

$$A_K := -R^{-1} (YB_2\Theta_C + \Theta'_B C_2 X + Y(A - B_2 Z C_2)X \\ + [-I'_p \ I'_p \check{Y}_p \ \check{A} + \Theta'_B \check{C}] \Delta^{-1} \\ \times \begin{bmatrix} \check{A} \check{X}_m \mathcal{I}_m + \check{B} \Theta_C \\ -\mathcal{I}_m \end{bmatrix}) (Q')^{-1},$$

$$B_K := R^{-1} (-YB_2 Z + \Theta'_B),$$

$$C_K := (-ZC_2 X + \Theta_C) (Q')^{-1}.$$

Δ は (10) で定義され, Q, R は

$$I - XY = QR'$$

を満たす正則行列である. $\Theta_B \in \mathbb{R}^{\nu p \times n}$, $\Theta_C \in \mathbb{R}^{\nu m \times n}$ はそれぞれ次式で定義される:

$$\Theta_B := \begin{bmatrix} I_{\nu p} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0_{\nu p} & \begin{bmatrix} 0 & \check{C} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ \check{C}' \end{bmatrix} & -\Delta \end{bmatrix}^\dagger \begin{bmatrix} 0_{\nu p, n} \\ \mathcal{I}_m \\ -\check{A}' \check{Y}_p \mathcal{I}_p \end{bmatrix},$$

$$\Theta_C := \begin{bmatrix} I_{\nu m} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0_{\nu m} & \begin{bmatrix} \check{B}' & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \check{B} \\ 0 \end{bmatrix} & -\Delta \end{bmatrix}^\dagger \begin{bmatrix} 0_{\nu m, n} \\ -\check{A} \check{X}_m \mathcal{I}_m \\ \mathcal{I}_p \end{bmatrix}.$$

ただし $(\cdot)^\dagger$ は Moore-Penrose の疑似逆行列を表わし, $\mathcal{I}_q$ は以下で定義される:

$$\mathcal{I}_q := \begin{bmatrix} I_n & 0_{n, q} \end{bmatrix}'.$$

B. 定理1, 2 の証明

有限次元線形時不変系 P に対して, 状態空間表現したときの 'D'-行列を $D(P)$ であらわす.

補題2および付録Cの性質3より仮定1のもとで問題1が可解であるための必要十分条件は, (5)の $\tilde{G}_d$ に対して以下の性質を満たす安定化補償器 $\tilde{K}_d$ が存在することである:

- (a) $\|\tilde{G}_d \star \tilde{K}_d\| < 1$.
- (b) $D(\tilde{K}_d) \in \text{BLT}(m, p, \nu)$.

ここで N_d の 'D₂₂'-行列が0であることと付録Cの性質2より (6) の D_{22} は

$$D_{22} \in \text{BLT}(p, m, \nu)$$

であり対角ブロックは0であることに注意するとつぎの補題を得る:

[補題3] 仮定1のもとで問題1が可解であるための必要十分条件は

$$\bar{G}_d := \tilde{G}_d - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D_{22} \end{bmatrix}$$

に対して (i), (ii) を満たす安定化補償器 $\bar{K}_d$ が存在することである:

$$(i) \quad \|\bar{G}_d \star \bar{K}_d\| < 1.$$

$$(ii) \quad D(\bar{K}_d) \in \text{BLT}(m, p, \nu).$$

さらに可解ならば $\bar{K}_d$ は $\bar{K}_d$ を用いて (12) で与えられる.

(補題3の証明) D_{22} の性質より $I + D(\bar{K}_d)D_{22}$ は可逆で

$$(I + D(\bar{K}_d)D_{22})^{-1} \in \text{BLT}(m, m, \nu)$$

であることから明らか. ■

したがって $\bar{G}_d$ に対して (i), (ii) を満たす安定化補償器 $\bar{K}_d$ の設計問題を考察すればよい.

$\bar{G}_d$ に対して (i) を満たす安定化補償器が存在するための必要十分条件は $X = X' \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Y = Y' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ が存在して (7)~(9) が成立することである^{11), 12)}(注6). つぎの補題は (i) を満たす安定化補償器の構成法である¹³⁾:

[補題4] $\bar{G}_d$ に対して (i) を満たす安定化補償器 $\bar{K}_d$ が存在するならば, 以下の手順で構成される:

Step 1: (7)~(9) を解き X, Y を求める.

Step 2: (10) を解き $Z \in \mathbb{R}^{\nu m \times \nu p}$ を求める.

Step 3: $\bar{K}_d$ を (11) で定める.

ここで Step 2 と Step 3 は独立である (Z が Step 3 で変更されることはない) ことと

$$D(\bar{K}_d) = Z$$

に着目すると (ii) を達成する $\bar{K}_d$ は Step 2 において

$$Z \in \text{BLT}(m, p, \nu) \quad (B.1)$$

を課せば達成される. 逆に Step 2 において (B.1) を達成する Z が存在しないならば (ii) を満たす $\bar{K}_d$ が存在しないことも明らか.

以上より定理1, 2 は証明された.

C. ブロッキング

本節ではブロッキングの性質を述べる (証明は省略する):

[性質1] $x \in \ell_2$ ならば

$$\|x\|_2 = \|B_\nu x\|_2.$$

[性質2] 離散時間 ν 周期系 P_d :

$$P_d := \text{ssr} \begin{bmatrix} A[k] & B[k] \\ C[k] & D[k] \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} A[k+\nu] & B[k+\nu] \\ C[k+\nu] & D[k+\nu] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A[k] & B[k] \\ C[k] & D[k] \end{bmatrix}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

に対して $B_\nu P_d B_\nu^{-1}$ は時不変系であり以下が成立する:

$$B_\nu P_d B_\nu^{-1} \text{ssr} \begin{bmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \tilde{C} & \tilde{D} \end{bmatrix},$$

$$\tilde{A} := \prod_{i=0}^{\nu-1} A[i],$$

(注6) 厳密には文献11), 12)では(9)の代わりに(9)の左辺を半正定とした条件が示されている.(7), (8)が成立し,(9)の左辺が半正定となる X, Y が存在するならば,(7), (8)が成立する範囲の X, Y の摂動によって(9)が成立する.

$$\tilde{B} := \begin{bmatrix} \prod_{i=0}^{\nu-2} A[i]B[0] & \cdots & A[\nu-2]B[\nu-2] & B[\nu-1] \end{bmatrix},$$

$$\tilde{C} := \begin{bmatrix} (C[0])' & (C[1]A[0])' & \cdots & \left(C[\nu-1] \prod_{i=0}^{\nu-2} A[i] \right)' \end{bmatrix}',$$

$$\tilde{D} := \begin{bmatrix} D[0] & 0 & \cdots & 0 \\ C[1]B[0] & D[1] & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ C[\nu-1] \prod_{i=1}^{\nu-2} A[i]B[0] & \cdots & \cdots & D[\nu-1] \end{bmatrix}.$$

[性質3] νm 入力 νp 出力有限次元離散時間時不変系 $\tilde{P}_d$ に対して $P_d := B_\nu^{-1} \tilde{P}_d B_\nu$ は ν -周期的である. さらに P_d が因果的であるための必要十分条件は

$$D(\tilde{P}_d) \in \text{BLT}(p, m, \nu)$$

である. ただし $D(\cdot)$ は状態空間表現の D 行列である.

[性質4] 有限次元離散時間時不変系 $\tilde{P}_d$:

$$\tilde{P}_d := \begin{bmatrix} A & B_0 & B_1 & \cdots & B_\nu \\ C_0 & D_{0,0} & 0 & \cdots & 0 \\ C_1 & D_{1,0} & D_{1,1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ C_\nu & D_{\nu-1,0} & \cdots & \cdots & D_{\nu-1,\nu-1} \end{bmatrix}$$

に対して $P_d := B_\nu^{-1} \tilde{P}_d B_\nu$ を定めるとき, P_d の入力 u に対する出力 y は

$$\begin{cases} x[k+1] = Ax[k] + \sum_{i=0}^{\nu-1} B_i u[\nu k + i], \\ y[\nu k + j] = C_j x[k] + \sum_{i=0}^{\nu-1} D_{j,i} u[\nu k + i] \end{cases}$$

で与えられる. ただし $j = 0, 1, \dots, \nu-1, k = 0, 1, 2, \dots$

参考文献

- 1) Special Section on Networks and Control, IEEE Control Systems Magazine, **21** (2001)
- 2) D. Hristu: Stabilization of LTI systems with communication constraints, in Proc. of 35th Amer. Contr. Conf., 2342/2346 (2000)
- 3) 山本, 河越, 潮: 入出力通信に周期時変制約を有する制御系のオブザーバースドコントローラによる安定化, 第1回制御部門大会予稿集, 9/12 (2001)
- 4) 山本, 河越, 潮: 入出力通信に周期時変制約を有する制御系設計問題におけるモノドロミー行列の安定化, 第30回制御理論シンポジウム予稿集, 273/278 (2001)
- 5) J. P. Keller and B. D. O. Anderson: A new approach to the discretization of continuous-time controllers, IEEE Trans. Automat. Contr., **37-2**, 214/223 (1992)
- 6) B. A. Bamieh and J. B. Pearson: A general framework for linear periodic systems with applications to $\mathcal{H}^\infty$ sampled-data control, IEEE Trans. Automat. Contr., **37-4**, 418/435 (1992)
- 7) Y. Hayakawa, S. Hara and Y. Yamamoto: H_∞ type problem for sampled-data control systems — A solution via minimum energy characterization, IEEE Trans. Automat.

Contr., **39-4**, 2278/2284 (1994)

- 8) T. Chen and L. Qiu: $\mathcal{H}_\infty$ design of general multi-rate sampled-data control systems, Automatica, **30-7**, 1139/1152 (1994)
- 9) 増淵, 小原, 須田: LMI 条件を満たすコントローラの統一的構成法, 計測自動制御学会論文集, **31-10**, 1586/1594 (1995)
- 10) G. C. Walsh and H. Ye: Scheduling of networked control systems, IEEE Control Systems Magazine, **21**, 57/65 (2001)
- 11) P. Gahinet and P. Apkarian: A linear matrix inequality approach to H_∞ control, Int. J. Robust Nonlinear Control, **4**, 421/448 (1994)
- 12) T. Iwasaki and R. Skelton: All controllers for the general H_∞ control problem: LMI existence conditions and state-space formulas, Automatica, **30**, 1307/1317 (1994)
- 13) P. Gahinet: Explicit controller formulas for LMI-based $\mathcal{H}_\infty$ synthesis, Automatica, **32-7**, 1007/1014 (1996)

[著者紹介]

藤岡 久也 (正会員)

1967年5月3日生. 95年3月東京工業大学大学院博士後期課程修了(理工学研究科制御工学専攻). 同年大阪大学工学部助手. 98年京都大学大学院情報学研究科助教授. サンプル値制御, ロバスト制御, 制御系CADに関する研究に従事. 博士(工学). IEEE, システム制御情報学会などの会員.

伊藤 健作 (正会員)

1976年5月6日生. 2000年京都大学工学部情報学科卒業. 2002年同大学院情報学研究科複雑系科学専攻修士課程修了. 同年新日本製鐵(株)入社. 在学中はサンプル値制御に関する研究に従事.