可変構造マルチレート状態推定器と磁気ディスクのシーク制御への応用[†]

大野 敬太郎*・Roberto HOROWITZ**

A Variable Structure Multi-rate State Estimator and Its Application to Seeking Control of HDDs[†]

Keitaro OHNO* and Roberto HOROWITZ**

In this paper, we propose a new multi-rate state estimator, which has a proportional, integral, and discontinuous error feedback structure to improve robustness. Conventional linear state estimators do not have enough accuracy under the existence of external disturbance and model uncertainty. With our proposed estimator, output tracking performance can have better robustness. We mainly focus its application on a system that has a hardware difficulty of obtaining high enough measurement sampling frequency, e.g., Hard Disk Drives. Integral and discontinuous actions are introduced to alleviate the estimation error caused by the disturbance and model uncertainty, while multi-rate technique is to obtain a smoother control input and higher bandwidth. Integral action and multi-rate technique also work as reducing the chattering motion caused by the discontinuous action. Simulations and experiments have been carried out to validate our proposed multi-rate state estimator. Finally, an experimental example of seeking control for a single stage actuated hard disk drive is demonstrated.

Key Words: estimator, Hard Disk Drives, multi-rate, nonlinear, uncertainty

1. はじめに

磁気ディスク (HDD) のヘッド位置決め制御という分野では、高密度化に対応するため、さまざまな手法が提案されている。その中で、マルチレートと呼ばれる手法を用いるものが多くなりつつある。ここでいうマルチレートとは、利用可能な測定サンプリング周波数に制約がある場合、制御入力をそれより高い周波数で与えることにより、滑らかな制御入力と高い制御帯域を実現させようとするものである。

マルチレート制御自体の研究は、50年代後半頃から行なわれ始めたといわれているが、HDDへの適用に関しては、文献¹⁾に初期の試みを見ることができる。これはノミナルプラントモデルに対して、与えようとする制御入力の更新周波数（通常2~4倍）で状態推定器を設計し、それによりサンプル間の開ループ状態推定を行なうことで滑らかな制御入力を得ようとするものである。きわめてシンプルであり、実際の製品への適用を考える上で現実的な手法であるが、状態推定誤差が測定サンプリングごとにしかフィードバックされないため、モデル誤差や外乱が存在するときには状態推定

が滑らかでなくなるという問題点を含んでいた。そこで、原ら²⁾は、制御入力の更新周期ごとに状態推定誤差がフィードバックされるような状態推定器を提案しており、より滑らかな状態推定が可能なことを示している。

一方、これらの現代制御理論の枠組みでは、プラントのモデル誤差に対するロバスト性が保証できないという観点から、フォロイング制御系について $\mathcal{H}_\infty$ の枠組みでマルチレートコントローラを設計する手法が提案されている。たとえば、文献³⁾では離散時間リフティングと呼ばれる手法により直接マルチレート $\mathcal{H}_\infty$ コントローラを設計する方法、文献⁴⁾では零インターポレータと呼ばれる測定値の補間を行なうことにより近似的にマルチレート $\mathcal{H}_\infty$ コントローラを設計する手法、また文献⁵⁾では連続系 $\mathcal{H}_\infty$ コントローラの適切な等価離散系を導出するためにマルチレートを導入するという立場にたち、具体的には連続系コントローラを2つに周波数分離した上で高周波数域側を単純な零次ホールド補間によりオーバーサンプルドライブさせることが提案されている。

しかしながら、これらの文献で考慮されているロバスト性は、あくまでプラントのパラメータ変動や外乱に対して消極的に安定性を保証しようとするものであり、フォロイング制御系に対しては有効であるが、性能に対するロバスト性が望まれるシーク制御系に対しては効果が薄れる。シーク制御については、今後のHDDの高密度化に対応していくためには、非線形性やパラメータ変動などに対して低感度な、より積極的なロバスト性を有するコントローラが望まれる。この

[†] American Control Conference で一部発表 (2003・6)

* 富士通研究所自律システム研究部 厚木市森の里若宮 10-1

** カリフォルニア大学バークレー校機械工学科 米国

* Fujitsu Laboratories Limited, Atsugi, Kanagawa

** Department of Mechanical Engineering, University of California at Berkeley, USA

(Received October 21, 2002)

(Revised February 27, 2003)

ような設計方法の一つとして、小林ら⁷⁾の提案している適応シーク制御が挙げられる。これは、パラメータ変動や外乱により発生する速度誤差が最小になるように各サンプルごとに加速度フィードフォワード信号を補正する手法であり、同文献では、ゲイン変動に対して安定な整定応答が得られることが実験により示されている。このような適応制御は学習のための一定の時間が必要であり、長距離シークに対しては有効であるが、短距離シークに対しては相対的に効果が薄れる。また、藤本ら⁶⁾は、マルチレート制御に適用し完全追従を実現する手法を提案しており、実験により効果が確認されているが、ロバスト性に関する議論は少ない。

より積極的なロバスト性を持つコントローラの設計手法としては、スライディングモード制御 (SMC) があるが、SMC は良好なロバスト性と交換条件として、チャタリングの発生に細心の注意を要するという問題を抱えている。HDD への適用については、これまでいくつかの試みが見られるが、切替超平面に状態を拘束するという SMC の持つ特徴から容易に想像できるように、ほとんどがシーク制御のオーバシュート回避を目指すものである。本来は、全状態量が測定できることが SMC のロバスト性の条件であるが、HDD の場合、全状態量の測定は困難であり、かつ状態量推定についてもこれまで十分な検討が行われていない。

本論文では、Walcott ら⁸⁾の提案しているスライディングモード状態推定器を持つロバスト性に、原ら²⁾の提案しているマルチレート推定器を持つ平滑なサンプル間状態推定という特徴を組み合わせた状態推定器を提案する。スライディングモード状態推定器は、可変構造フィードバックが状態推定器の中にだけ発生するので、制御対象のアンモデルダイナミクスによるスピルオーバーの問題が少ない。またマルチレート化によりチャタリングの悪影響が低減できる。さらに、本論文では、状態推定誤差のフィードバック項に積分動作^{12), 13)}をマルチレート系に拡張したものを付加することにより可変構造フィードバックの絶対量を下げるなどの対策を施し、チャタリング問題の低減を図る。

なお、提案する制御系は磁気ディスクへの適用を前提としているが、そのほかのアプリケーションにも応用できるよう、式はすべて多入出力系として展開した。また、本論文では以下のプラントモデルを考える、

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + w_c(x, u, t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (1)$$

ただし、 $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^p$, $u \in \mathbb{R}^m$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ とし、 (A, B) 対は可制御、 (A, C) 対は可観測、 B と C はフルランクとする。また簡単のため時間遅れは無視する。上記モデルの等価マルチレートシステムは以下のよう記述できる。

$$\begin{aligned} x(k, i+1) &= \Phi_m x(k, i) + \Gamma_m u(k, i) + w(x, u, k) \\ y(k, i) &= Cx(k, i) \end{aligned} \quad (2)$$

ここで、 $\Phi_m \in \mathbb{R}^{n \times n}$ と $\Gamma_m \in \mathbb{R}^{n \times m}$ は、以下のように表わすことができる。

$$\Phi_m = e^{AT_m}, \Gamma_m = \int_0^{T_m} e^{At} dt B \quad (3)$$

T_m は制御入力¹⁾の更新レートであり、 $T_m = T_s/r$ のように定義する。ただし、 T_s は測定サンプリングレート、 r はマルチレート倍数である。 (k, i) は、離散時間 $t = kT_s + iT_m$ を定義する整数であり、 $i = 0, 1, \dots, r-1$ である。また、 $w \in \mathbb{R}^n$ は、ある既知の行列 $\Theta \in \mathbb{R}^{n \times q}$ のレンジスペースに属するすべての不確かさ、非線形性を表わし、以下のようにそれらは平均的振る舞い $h \in \mathbb{R}^q$ と変動的振る舞い $\delta h \in \mathbb{R}^q$ から構成されるものとする。

$$w(x, u, k) = \Theta \{h + \delta h(x, u, k)\} \quad (4)$$

ただし、 δh は以下のように上界が既知とする。

$$\|\delta h(x, u, k)\| < h^+(x, u, k) \quad (5)$$

ここで $h^+ \in \mathbb{R}$ は既知のスカラー関数である。さらに、 δh の高周波成分は十分小さいものとする。ここでいう高周波成分とは、少なくとも可変構造フィードバック構造の動作レートの4分の1程度を目安とする。

本論文を通して、 $\rho(\cdot)$ はスペクトラム半径、 $\|\cdot\|$ はベクトルに対してはユークリッドノルムを、行列に対してはスペクトラムノルムを、また $\lambda_{\max}(\cdot)$, $\lambda_{\min}(\cdot)$ はそれぞれ最大、最小の固有値を表わすものとする。

2. 積分動作を有するマルチレート状態推定器

本節では、状態推定に対する不確かさ w の内、平均的振る舞い h の悪影響を抑圧するために、従来用いられてきたマルチレート推定器に積分器を導入する。(4) 式より明らかに、積分器により h の悪影響を抑圧できれば、後述する可変構造で抑圧する必要のある不確かさは δh に関する項だけとなり、可変構造フィードバック量の絶対量を最小限に抑えることができ、チャタリング問題の低減に繋がる。なお、ここで述べる状態推定器は線形制御系設計理論の枠を逸しない。従来のマルチレート状態推定器は以下のように表わすことができる。

$$\bar{x}(k, i) = \begin{cases} \Phi_m \bar{x}(k-1, r-1) + \Gamma_m u(k-1, r-1) & \dots (i=0) \\ \Phi_m \bar{x}(k, i-1) + \Gamma_m u(k, i-1) & \dots (i=1, \dots, r-1) \end{cases} \quad (6)$$

$$\hat{x}(k, i) = \bar{x}(k, i) + L_i(y(k, 0) - C\bar{x}(k, 0)) \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \hat{e}(k, i) &= x(k, i) - \hat{x}(k, i) \\ \bar{e}(k, i) &= x(k, i) - \bar{x}(k, i) \end{aligned} \quad (8)$$

ここで、 $\bar{x}$ は x の将来推定値、 $\hat{x}$ は x の現在推定値であり、 $\hat{e}$, $\bar{e}$ はそれぞれ $\hat{x}$, $\bar{x}$ の推定誤差である。また $L_i \in \mathbb{R}^{n \times p}$ は、 i 番目のサンプル間推定における状態推定ゲインである。

以上から、状態推定誤差方程式が以下のように得られるが、よく知られているようにこの式により w が推定精度をいかに悪化させるかがわかる。

$$\bar{e}(k, i+1) = \Phi_m \bar{e}(k, i) - \Phi_m L_i C \bar{e}(k, 0) + w(x, u, k) \quad (9)$$

つぎに、この従来のマルチレート推定器に、以下のような(4)式に示した h 項の悪影響を低減させるための積分動作を付加することを考える。

$$\begin{cases} \bar{x}(k, i+1) = \Phi_m \bar{x}(k, i) + \Gamma_m u(k, i) \\ \bar{z}(k+1, 0) = \hat{z}(k, 0) \\ \hat{x}(k, i) = \bar{x}(k, i) \\ \quad + L_i \{y(k, 0) - C \bar{x}(k, 0)\} + \Theta_I \hat{z}(k, 0) \\ \hat{z}(k, 0) = \bar{z}(k, 0) \\ \quad + K \{y(k, 0) - C \bar{x}(k, 0)\} \end{cases} \quad (10)$$

ここで $z \in \mathbb{R}^g$ は積分状態量、 $K \in \mathbb{R}^{g \times p}$ は対応する積分ゲイン、 $\Theta_I \in \mathbb{R}^{n \times g}$ は積分項を推定値にフィードバックするチャンネルを決定する設計行列である。なお、この行列は、対応する行列やベクトルのサイズ定義として g を用いたことからわかるように、サイズに自由度を持っており、付加する積分状態量の数を決定する。ただし、 $g \leq p$ と仮定する。

この積分項を有するマルチレート推定器の将来推定値に関するダイナミクスは、(2)式と(10)式から以下のように計算できる。

$$\bar{e}_z(k+1) = \Psi \bar{e}_z(k) + \sum_{j=0}^{r-1} \Phi_m^j \begin{bmatrix} w \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \Psi(i) &\triangleq \begin{bmatrix} M(i) & N(i) \\ KC & I \end{bmatrix} \\ M(i) &\triangleq \Phi_m^i - \sum_{j=1}^i \Phi_m^j (L_{i-j} + \Theta_I K) C \\ N(i) &\triangleq - \sum_{j=1}^i \Phi_m^j \Theta_I \\ \bar{e}_z^T(k) &\triangleq \begin{bmatrix} \bar{e}^T(k, 0) & \bar{z}^T(k, 0) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (12)$$

であり、 w を無視すると特性行列は以下のように表わされる。

$$\det(zI - \Psi) \quad (13)$$

ただし、 $\Psi \triangleq \Psi(r)$ 、 $M \triangleq M(r)$ 、 $N \triangleq N(r)$ とする。(11)式を見ると、 $\bar{e}_z$ 中の要素 $\bar{e}$ に関する式に、積分器による項 $N\bar{z}$ が付加されていることがわかる。すなわち、この付加された項により(11)式の不確かさを表わす項 w を抑圧する自由度が与えられていることがわかる。さらに、 $\Theta_I = \Phi_m^{-1} \Theta$ とすれば、(4)式から明らかなように不確かさ w の平均的振る舞い h をキャンセルできることがわかる。この場合、 $z \in \mathbb{R}^g$ 、 $K \in \mathbb{R}^{q \times p}$ 、そして $\Theta_I \in \mathbb{R}^{n \times g}$ であり、 $q \leq p$ である。

つぎに、現在状態推定誤差に関するダイナミクスを確認する。(10)式および $\bar{e} = \hat{e} - \bar{x} + \hat{x}$ から、以下の関係が得られる。

$$\bar{e}(k, 0) = X^{-1} \hat{e}(k, 0) + X^{-1} \Theta_I \hat{z}(k-1, 0) \quad (14)$$

$$\Rightarrow \bar{e}_z(k) = \Omega \hat{e}_z(k) \quad (15)$$

ただし、

$$\begin{aligned} X &\triangleq (I - L_0 C - \Theta_I K C) \\ \hat{e}_z^T(k) &\triangleq \begin{bmatrix} \hat{e}^T(k, 0) & \hat{z}^T(k-1, 0) \end{bmatrix} \\ \Omega &\triangleq \begin{bmatrix} X^{-1} & X^{-1} \Theta_I \\ 0 & I \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} X & -\Theta_I \\ 0 & I \end{bmatrix}^{-1} \end{aligned} \quad (16)$$

(14)式と(15)式を(11)式に代入すると、以下の現在状態推定誤差に関するダイナミクスが得られる。

$$\begin{aligned} \hat{e}_z(k+1) &= \Omega^{-1} \Psi \Omega \hat{e}_z(k) \\ &\quad + \Omega^{-1} \sum_{j=0}^{r-1} \Phi_m^j \begin{bmatrix} w \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (17)$$

簡単のため、以下のように定義する。

$$\begin{aligned} \Phi_{obs}(i) &\triangleq \begin{bmatrix} \Phi_{obs11}(i) & \Phi_{obs21}(i) \\ \Phi_{obs12} & \Phi_{obs22} \end{bmatrix} \\ &\triangleq \Omega^{-1} \Psi(i) \Omega \end{aligned} \quad (18)$$

ただし、 $\Phi_{obs} \triangleq \Phi_{obs}(r)$ 、 $\Phi_{obs11} \triangleq \Phi_{obs11}(r) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 、 $\Phi_{obs21} \triangleq \Phi_{obs21}(r) \in \mathbb{R}^{n \times g}$ とした。

以上より、特性行列は以下ようになる。

$$\begin{aligned} \det(zI - \Phi_{obs}) \\ &= \det\{\Omega^{-1}(zI - \Psi)\Omega\} \\ &= \det(zI - \Psi) \end{aligned} \quad (19)$$

したがって、現在状態推定も将来状態推定誤差と等価なダイナミクスを持つことがわかる。

つぎに、実際の設計について述べる。積分器を推定器に導入する場合でも、以下のように(11)式の設計ゲイン (K, L_i) をうまく分離することができる。

$$\begin{aligned} \bar{e}_z(k+1) &= \begin{bmatrix} \Phi_m^r & N \\ 0 & I \end{bmatrix} \bar{e}_z(k) \\ &\quad - \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^r \Phi_m^j (L_{i-j} + \Theta_I K) \\ -K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \bar{e}_z(k) \end{aligned} \quad (20)$$

したがって、従来の極配置方法が利用できる。なお、文献²⁾に述べられているのと同じようにサンプル間の推定器比例ゲイン L_i はすべて同じとすることができ、またシングルレートとの関係は以下ようになるため、シングルレート時の設計結果を以下の式に当てはめれば、その設計結果がそのまま利用できる。

$$\begin{aligned} L_{mr} (= L_0 = L_1 = \dots = L_{r-1}) &+ \Theta_I K \\ &= \left(\sum_{j=1}^r \Phi_m^j \right)^{-1} \Phi_m^r \cdot L_{sr} \end{aligned} \quad (21)$$

ただし、 L_{mr} はシングルレート時の推定器比例ゲインである。また、この場合は、積分ゲイン K は、マルチレートにしても、シングルレートのとおりとなる。

3. 可変構造マルチレート状態推定器

本節では、状態推定に対する不確かさ w の内、変動的振る舞い δh による悪影響を抑圧するために、前節で述べた積分器を有するマルチレート状態推定器に可変構造を導入する。

ここでは、(10) 式に追加して以下の可変構造を有するマルチレート状態推定器を提案する。

$$\begin{cases} \hat{x}(k, i) = \bar{x}(k, i) \\ \quad + L_i \{y(k, 0) - C\bar{x}(k, 0)\} \\ \quad + \Theta_i \hat{z}(k, 0) + \Theta_D \nu(k, 0) \\ \hat{z}(k, 0) = \bar{z}(k, 0) + K \{y(k, 0) - C\bar{x}(k, 0)\} \end{cases} \quad (22)$$

$$\nu(k, 0) = \begin{cases} -\kappa(k, x, u) \frac{DC_z \bar{e}_z(k, 0)}{\|DC_z \bar{e}_z(k, 0)\|} \\ \quad \dots \text{if } DC_z \bar{e}_z \neq 0 \\ 0 \quad \dots \text{otherwise} \end{cases} \quad (23)$$

ただし、 $\Theta_D \in \mathbb{R}^{n \times d}$ はフィードバックチャンネルを決定する設計行列であり、先に述べた積分動作のものと同じ議論が成立する。ここでは $d \leq p$ と仮定する。 $\kappa \in \mathbb{R}$ は $\kappa > h^+$ を満たす正の設計関数、 $C_z \triangleq \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{p \times (n+d)}$ であり、 $D \in \mathbb{R}^{d \times p}$ は、以下の構造的拘束条件を満たす定数行列である。

$$C_z^T D^T = \Phi_{obs}^T P_z \Theta_z \quad (24)$$

ここで、 $\Theta_z^T \triangleq [(Y\Theta_D)^T \quad 0]$ 、 $Y \triangleq \Omega^{-1} \sum_{j=0}^{r-1} \Phi_m^j$ 、 P_z は以下のリアプノフ方程式の唯一解である。

$$\Phi_{obs}^T P_z \Phi_{obs} - P_z = -Q_z \quad (25)$$

ただし、 $Q_z \in \mathbb{R}^{n+d \times (n+d)}$ は正定対称行列であり設計行列である。

以上の可変構造を用いると、(17) 式に示した誤差のダイナミクスは以下のように書き換えることができる。

$$\begin{aligned} \hat{e}_z(k+1) &= \Omega^{-1} \Psi \Omega \hat{e}_z(k) \\ &+ Y \left\{ \begin{bmatrix} w \\ 0 \end{bmatrix} - \Phi_m \Theta_D \begin{bmatrix} \nu \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \end{aligned} \quad (26)$$

この式の中括弧内の構造から、 w のうちの δh を ν により操作できる自由度が制御系に与えられており、特に $\Theta_D = \Phi_m^{-1} \Theta$ とすれば、キャンセルできることがわかる。

つぎに、(24) 式の構造的拘束条件について述べる。SISO 系以外で、特に次数の高いシステムの場合、この拘束条件を通常の行列操作で簡単に解くことはできない。この拘束条件は離散系のものであるが、連続系の拘束条件も非常に似た構造となり、いくつかの文献でその解法について議論されている。たとえば Luenberger 型の推定器に直接可変構造を適用することを提案した Walcott らは、文献⁹⁾でこの拘束条件をシンボリックに解く方法を提案している。しかしながら文献¹⁰⁾が指摘しているとおり、この方法はシステム次数が 4 以上になると現実的でなくなる。一方、同文献ではシ

ステムを座標変換により推定器設計に適した正準系に変換することにより、このような拘束条件の問題を回避できることを示しているが、この手法をとると線形推定器のダイナミクスのすべてのモードを設計者が任意に指定できなくなるという問題がある。一方で、Haskara ら¹¹⁾は、Luenberger 型を前提としない別種の離散系可変構造推定器を提案しているが、状態変数の推定誤差の一部が既知であることが前提となり、その実現には推定誤差の推定器が必要となり、推定器自体が若干複雑になる。

しかしながら、(24) 式の拘束条件は線形行列不等式 (LMI) を用いて近似解を得ることができ、工学的に問題ない場合が多い。(24) 式は以下の LMI と等価である。

Find minimum γ that satisfies :

$$\begin{aligned} \|F\| < \gamma &\Leftrightarrow \gamma I - F^T F > 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \gamma I & F^T \\ F & I \end{bmatrix} > 0 \quad \gamma > 0 \end{aligned} \quad (27)$$

ただし、 $F \triangleq C_z^T D^T - \Phi_{obs}^T P_z \Theta_z$ とした。上記とリアプノフ方程式を連立させることにより、解が得られる。

一方、HDD の場合については、最近高密度化に対応するために盛んに研究されている 2 段アクチュエーション型の HDD も含め、観測出力の数 p は 1 となるのが普通である。この場合、 $d \leq p$ と仮定しているため、 $d = p = 1$ となる。したがって、行列 D の次元は $\mathbb{R}$ となり、(23) 式の構造から明らかなように D の項が分母分子でキャンセルされ、陽に取り扱う必要がなくなることがわかる。

定理 1: (22) 式で提案した推定器において、 $\rho(\Phi_{obs}) < 1$ を満たす L_i 、 K が存在する場合、究極的上界を有するスライディングモードが存在し、同システムは安定となる。

証明: (26) 式を評価する。積分状態量 $\bar{z}$ を原点で評価するため座標変換 $\hat{e}_z \rightarrow e_{zw}^T \triangleq \begin{bmatrix} \hat{e}^T & (\hat{z} - Y\Theta h)^T \end{bmatrix}$ を行なうと、以下のシステムが得られる。

$$e_{zw}(k+1) = \Phi_{obs} e_{zw}(k) + \Theta_z \delta h(k) + \Theta_z \nu(k) \quad (28)$$

つぎに、リアプノフ関数の候補を以下のように定義する。

$$V_{obs}(k) = e_{zw}^T P_z e_{zw} \quad (29)$$

(28) 式を軌道に沿って評価すると以下の条件が得られる。

$$\begin{aligned} &V_{obs}(k+1) - V_{obs}(k) \\ &< -e_{zw}^T Q_z e_{zw} + \|\Theta_z^T P_z \Theta_z\| (\|\delta h\|^2 + \kappa^2) \\ &\quad + 2e_{zw}^T C_z^T D^T \delta h - 2e_{zw}^T C_z^T D^T \kappa \frac{DC_z e_{zw}}{\|DC_z e_{zw}\|} \\ &\quad + 2\|\Theta_z^T P_z \Theta_z\| \|\delta h^T\| \kappa \\ &< -\lambda_{\min}(Q_z) \|e_{zw}\|^2 + \|\Theta_z^T P_z \Theta_z\| (\|\delta h\| + \kappa)^2 \\ &\quad + 2\|DC_z e_{zw}\| (\|\delta h\| - \kappa) \\ &< -\lambda_{\min}(Q_z) \|e_{zw}\|^2 + \|\Theta_z^T P_z \Theta_z\| (h^+ + \kappa)^2 \end{aligned} \quad (30)$$

Q_z は正定であり、したがって上記の関数は e_{zw} に関して上に凸である。したがって、究極的に上界を有するスライディングモードが存在する。 ■

さらに、上の式を $\|e_{zw}\|$ について解けば、その上界が以下のように得られる。

$$\|e_{zw}\| = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(\Theta_z^T P_z \Theta_z)}{\lambda_{\min}(Q_z)}} (h^+ + \kappa) \quad (31)$$

これが示す物理的意味は、もし切替関数の入力を実際の不確かさの方向と同じ場合、可変構造はあたかも不確かさが増加したかのように働くということである。これが離散系のスライディングモードの難しさである。たとえば、不確かさの持つ周波数がナイキスト周波数に等しい場合、サンプリングごとに切替関数の極性が逆になるため、結果的にロバスト性を悪化させてしまうことになる。すなわち、不確かさ w がどのような周波数成分を持つかによってロバスト性が大きく変わるため、設計上十分に考慮する必要がある。

そこで実際の設計においては、対象とする不確かさをモデル化するのに使う変数 κ に帯域遮蔽フィルタを挿入するのが望ましい。また、通常スライディングモードでチャタリング防止に用いられる境界層の概念も重要であり、制御対象に適した切替関数を用いるべきである。

4. レギュレータの設計について

閉ループに存在する不確かさを理論上完全に除去するためには、レギュレータ設計においても不確かさを考慮する必要があるが、HDD の場合、機構振動特性が複雑なため制御入力のチャタリングは避けるべきであり、可変構造の導入は困難である。そこで本節では、線形レギュレータでも実用上十分にロバストな応答が得られる場合があることに鑑み、スライディングモードの考え方に基づくマルチレート制御系に適した線形レギュレータを新たに考えることにする。

始めに、離散系の切替関数 $S(k, i) \in \mathbb{R}^m$ を、目標値入力 $x_r \in \mathbb{R}^n$ を用いて以下のように定義する。

$$S(k, i) = G\{x(k, i) + x_r(k, i)\} \quad (32)$$

ここで、 $G \in \mathbb{R}^{m \times n}$ はスライディング超平面行列であり、通常は静的行列として設計される。つまり、この意味するところは制御帯域が十分に考慮されずに設計されるということであり、スピルオーバーの問題が発生する可能性を含んでいる。このため、超平面にダイナミクスを持たせるような設計方法がいくつか提案されている¹⁴⁾。これらの手法は、状態空間を拡大し、その中に超平面のダイナミクスを入れるものであり、必然的にコントローラの次数が高くなる。本論文では、この方法の代替手段として、より簡単な構造を持った手法を提案する。そこで、以下の条件を考える。

$$S(k+1) = \alpha S(k) \quad (33)$$

ここで、パラメータ $\alpha \in \mathbb{R}^{m \times m}$ は、帯域を考慮するために導入した設計パラメータであり、 $\alpha = \text{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ 、 $0 \leq \alpha < 1$ である。この場合、スライディング超平面行列自体はダイナミクスを持たないが、切替関数は 1 次のダイナミクスを持つため、結果的には状態空間を拡大すること

く新しく 1 次のダイナミクスを持つ超平面（以降単に超平面と称す）を作ったと考えることができる。したがって、 α は以下のように設計できる。

$$\alpha_j = \exp(-2\pi f_j T_m) \quad (34)$$

ここで、 f_j は切替関数の j 番目の要素のカットオフ周波数である。

一方、等価制御入力は、超平面に状態を拘束するように与えるものとすれば、(33) 式から以下ようになる。

$$u_{eq}(k, i) = -(G\Gamma_m)^{-1}(G\Phi_m - \alpha G)\hat{x}(k, i) - (G\Gamma_m)^{-1}\{Gx_r(k, i+1) - \alpha Gx_r(k, i)\} \quad (35)$$

なお、上記では状態量として現在推定値を用いた。

このマルチレート系のダイナミクスは、(35) 式の u を (2) 式に代入し、さらに不確かさの項および目標値入力の項を零とおくことにより、以下ようになる。

$$x(k, i+1) = \Phi_m x(k, i) + \Gamma_m K_{eq} \hat{x}(k, i) \quad (36)$$

$$K_{eq} \triangleq -(G\Gamma_m)^{-1}(G\Phi_m - \alpha G), K_{eq} \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad (37)$$

つぎに、(36) 式および (37) 式から、

$$x(k+1, 0) = \Phi_{eq}^r x(k, 0) - \sum_{j=0}^{r-1} \Phi_{eq}^{r-1-j} \Gamma_m K_{eq} \hat{e}(k, j) \quad (38)$$

$$\Phi_{eq} \triangleq (\Phi_m + \Gamma_m K_{eq}), \Phi_{eq} \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (39)$$

(17) 式を (38) 式に代入すると、

$$x(k+1, 0) = \Phi_{eq}^r x(k, 0) - \sum_{j=0}^{r-1} \Phi_{eq}^{r-1-j} \Gamma_m K_{eq} \Phi_{obs11}(j) \hat{e}(k, 0) - \sum_{j=0}^{r-1} \Phi_{eq}^{r-1-j} \Gamma_m K_{eq} \Phi_{obs12}(j) z(k-1, 0) \quad (40)$$

が得られ、結局 (17) 式および (40) 式の全体のダイナミクスは以下のように表わすことができる。

$$\begin{bmatrix} \hat{e}_z(k+1) \\ x(k+1, 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{obs} & 0 \\ E & \Phi_{eq}^r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{e}_z(k) \\ x(k, 0) \end{bmatrix} \quad (41)$$

$$E \triangleq - \sum_{j=0}^{r-1} \Phi_{eq}^{r-1-j} \Gamma_m K_{eq} \begin{bmatrix} \Phi_{obs11}^T(j) \\ \Phi_{obs12}^T(j) \end{bmatrix}^T$$

この固有値構造から明らかのように G および L は独立に設計することができる。なお、 B はフルランクと仮定しているため、 G によって $G\Gamma_m$ が非特異行列になるように設計することが可能である。また、 G と α も独立に設計することが可能である。

定理 2: (41) 式に示したシステムにおいて、 G は $\rho(\Phi_m - \Gamma_m(G\Gamma_m)^{-1}G\Phi_m) < 1$ となるように設計されているものとする。この場合、 $0 \leq \alpha_j < 1$ に対して、 $\rho(\Phi_{eq}) < 1$ となるような漸近安定なシステムが必ず存在し、さらに G と α は独立に設計することができる。

証明: 制御対象はあらかじめ可制御正準系に変換されているものとする. そこで以下の座標変換行列を考える.

$$T = \begin{bmatrix} I_{n-m} & O_{(n-m) \times m} \\ G_1 & G_2 \end{bmatrix} \quad (42)$$

ここで I は単位行列であり, $G = [G_1 \ G_2]$ とする. この正準系変換により, Φ_{eq} を三角行列に変換することができ, さらにその固有値構造として α が分離でき, Φ_{eq} の固有値は m 個の α とそのほかから成り立つことが示せるが, 詳細な式展開は省略する. したがって, $0 \leq \alpha_j < 1$ に対してシステムは漸近安定であり, G と α は独立に設計可能である.

■

よく知られているように, この超平面行列 G によるレギュレータの極配置が可能であり, たとえば, 以下の離散代数リカッチ方程式を解けば $\mathcal{H}_2$ 最適化を行なうことができる¹⁵⁾.

$$\begin{aligned} \Phi_\varepsilon^T P \Phi_\varepsilon - P \\ - \Phi_\varepsilon^T P \Gamma_m (\Gamma_m^T P \Gamma_m)^{-1} \Gamma_m^T P \Phi_\varepsilon + W &= 0 \quad (43) \\ G &= \Gamma_m^T P \end{aligned}$$

ここで P は (43) 式に対する唯一解であり, W は重み行列である. Φ_ε は, システム行列であるが, 安定余裕を指定するために¹⁶⁾ 以下の操作が行なわれているものとする.

$$\Phi_\varepsilon \triangleq \Phi_m + \varepsilon I, \quad 0 \leq \varepsilon < 1 \quad (44)$$

この ε を用いて, 閉ループシステムのスペクトラム半径 (α 以外) が $1 - \varepsilon$ 以下となるように設計できる. したがって, ε は以下のように目標帯域 f_{co} を用いて設計することができる.

$$f_{co} \geq -\frac{\log_e(1 - \varepsilon)}{2\pi T_m} \quad (45)$$

なお, 閉ループの固有値の内, レギュレータに相当する部分は, この f_{co} と, (34) 式の f により決定される. f_{co} はレギュレータの目標帯域, f は α の導入の趣旨から, スピルオーバーの問題が生じない限りなるべく高い周波数に設定するのが望ましい.

5. 設計例とシミュレーション

ここではこの可変構造を有するマルチレート推定器の効果を確認するため, HDD を対象としたシミュレーションを行なった. Fig.1 にアクチュエータのシミュレーションモデルを実験測定結果と共に示した. 推定器設計用のノミナルモデルは単純な二重積分型とした. Table 1 に, ドライブの基本データを示す.

このプラントの等価離散系は以下ようになる.

$$\begin{aligned} \Phi &= \begin{bmatrix} 1 & T_m \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Gamma = K_f \begin{bmatrix} T_m^2/2 \\ T_m \end{bmatrix}, \quad (46) \\ C &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

推定器の特性は, 比例ゲインについては 3kHz の Butterworth, 積分ゲインは 100Hz とした. 対応する極位置は

Fig. 1 Frequency characteristic of VCM

Table 1 Drive specifications

Sampling freq	$1/T_s$	15kHz
Control updating frequency	$1/T_m$	45kHz
Multi-rate ratio	r	3
VCM gain	K_f	1e4
Time delay	T_d	20μs
Track pitch	TP	0.33μm

$[0.2593 + 0.3192i, 0.2593 - 0.3192i, 0.9590]$ となり, Ackerman¹⁷⁾ の式を用いると, (20) 式から以下のように推定器ゲインが得られる.

$$\begin{aligned} L_{mr} &= \begin{bmatrix} 3.5386e-1 & 3.3564e3 \end{bmatrix}^T \quad (47) \\ K &= 6.0045e3 \end{aligned}$$

レギュレータについては, (34) 式の f , (45) 式の f_{co} , (43) 式の W をそれぞれ 1kHz, 1kHz, $\text{diag}(1, 1)$ とし, 以下のスライディング超平面を得た.

$$G = \begin{bmatrix} 2.7920e4 & 3.4652 \end{bmatrix} \quad (48)$$

この線形部分の閉ループ特性を確認するために (41) 式の固有値を計算すると, $[0.959, 0.658, 0.584, 0.259 + 0.319i, 0.259 - 0.319i]$ となり, 所望の特性が得られていることがわかる. Fig.2 に開ループ特性 (左側) と閉ループ特性 (右側) を示す.

プラントの不確かさについては摩擦を考え, 以下のような制御入力にギャップをもつ簡単なモデルを用いることにする.

$$u_r = \text{sign}(u) \{K_g |u| + K_o\} \quad (49)$$

ここで, u はコントローラの出力 (指示電流), u_r は等価出力電流である. また, K_g は比例ゲイン, K_o はオフセットであり, それぞれ 0.7, 30mA とした. この場合, (23) 式に示した可変構造は不確かさの上界を考慮し以下のようにモデル化した.

$$\nu(k, 0) = -\{0.03 + 0.3|u|\} \frac{C_z \bar{e}_z(k, 0)}{|C_z \bar{e}_z(k, 0)| + \delta} \quad (50)$$

ただし δ は飽和関数の設計変数で, 試行錯誤で決定した. なお, この不確かさは入力端の不確かさであるため, $\Theta_D = \Theta_I = \Phi_m^{-1} \Gamma_m$ とした.

さらに、時間遅れは Padé 近似で実装し、共振モードは 2 次のノッチフィルタを 2 つ用いて補償した。また実機で測定した位置誤差を FFT 解析し、そのデータから外乱の時間波形を求め、位置の外乱として挿入するなど、より実機に近いシミュレーション環境となるよう配慮した。制御系の開ループゼロクロス周波数は約 1kHz であった。

以上の設計結果を用いて、1Track, 500Hz のサイン波を目標値信号として入力し応答をシミュレートした。Fig.3 に線形推定器と提案する推定器のそれぞれを用いた場合の目標値 x_r 、測定値 y 、推定値 $\hat{x}$ (左側) と指示電流波形 u 、等価出力電流 u_r (右側) を比較した。なお、これらの結果はフィードバックのみの応答である。

ノミナルケース (摩擦なし) の場合は、目標値入力が十分帯域内であるため線形設計の結果がそのまま反映された結果となっているが、摩擦がある場合は推定誤差が大きくなり、目標に対して十分トラッキングできていないことがわかる。一方、提案するコントローラの場合は推定誤差がノミナルの場合とほぼ同じであり、十分なトラッキング性能を持っていることがわかる。なお、電流波形を見ても大きなチャタリングは発生していないことがわかる。

6. 実験結果

前節の設計結果を用いて実際の実験を行なった。ドライブは 3.5 インチ、7200rpm のローエンドドライブであり、浮動小数点演算の DSP (TMS320C6711) にコントローラを実装した。ADC および DAC はそれぞれ 14bit, 12bit である。実験の場合、摩擦などの非線形性の同定は困難であるため、ここでは単なるゲイン変動をプラントの不確かさとして評価した。Fig.4 に先ほどと同様、線形推定器と提案している推定器の比較を示した。また、Fig.5 には、対応するそれぞれの推定誤差 (Fig.4 の太線と細線の差) を示した。シミュレーションで得られた結果と同様、提案しているコントローラの場合、ゲイン変動が 30% あっても推定誤差がノミナルケースとほぼ同様であり、目標の性能が得られていることがわかる。

つぎにシークの実験を行なった。目標軌道は SMART¹⁸⁾ と呼ばれる加加速度を最小にするような制振軌道を用いた。応答はすべてフィードバックのみの結果であり、フィードフォワード補償を含め特に特殊な補償は行なわなかった。Fig.6 にその結果を示す。図中左側の 2 つの図は線形推定器を用いた場合の結果であり、右側は提案しているコントローラによる結果である。いずれも VCM ゲインが 30% 変動した場合の 8 トラックシーク時の位置の応答を実測したものであり、左側と右側の違いは、推定器中の可変構造の有無のみである。上側は媒体中心方向へのシーク、下側は媒体外縁方向へのシークの結果である。この図から、線形推定器を用いた場合、プラントの不確かさがあるとシーク後の残留振動が発生し、シーク完了におよそ 3ms ほどかかっているが、提案する推定器を用いると 1ms で整定が完了していること

Fig. 2 Openloop characteristic (sim.)

Fig. 3 Comparison of position/current signal (sim.)

Fig. 4 Comparison of position signal (exp.)

Fig. 5 Comparison of estimation error (exp.)

がわかる。これより、提案するコントローラがプラントの不確かさに対して積極的なロバスト性を有することがわかる。

Fig. 6 Comparison of 8-Pos Seek responses

なお、線形推定器を用いた場合の最大推定誤差は0.4トラックであり、提案する方法を用いた場合は0.1トラックであった（いずれもサンプル点上で評価）。また、Fig. 6右側に示している応答は、提案している方法によるノミナルケースに対する応答とほぼ同じであった。

7. おわりに

可変構造を持つ推定器にマルチレート概念を組み合わせた制御系の設計方法を提案した。この種の可変構造を有する制御系は、優れたロバスト性をもつ反面、チャタリングの発生が問題となる。そこで本稿では、推定器ループの中だけに可変構造を導入することにより、可変構造導入によるスビルオーバーの問題の低減を図った。また、可変構造を有していても状態推定と制御入力が滑らかになるようマルチレート推定器を導入し、さらには積分器の導入により可変構造フィードバックの絶対量を小さくし、チャタリングの問題を低減した。本手法を、磁気ディスクのシーク制御系に適用し、シミュレーションおよび実験で、本手法の有効性を確認した。

本研究にあたり、カリフォルニア大学バークレー校客員研究員平田光男氏（千葉大学）に多大のご助言を頂いた。ここに謝意を表する。

参考文献

- 1) W.-W. Chiang: Multirate State-Space Digital Controller for Sector Servo Systems, Proc. of the 29th IEEE Conference on Decision and Control, 1902/1907 (1990)
- 2) T. Hara and M. Tomizuka: Multi-rate Controller for Hard Disc Drive with Redesign of State Estimator, Proc. of the American Control Conference, 898/903 (1998)
- 3) M. Takiguchi, M. Hirata and K. Nonami: Following Control of Hard Disk Drives Using Multi-rate H_∞ Control, Proc. of SICE Annual Conference (2002)
- 4) T. Semba: An H_∞ Design Method for a Multi-Rate Servo Controller and Applications to a High Density Hard Disk Drive, Proc. of the 40th IEEE Conference on Decision and Control, 4693/4698 (2001)
- 5) K. Ohno, Y. Abe and T. Maruyama: Robust Following Control Design for Hard Disk Drives, Proc. of the IEEE Conference on Control Applications, 930/935 (2001)
- 6) H. Fujimoto, et al: Proposal of Seeking Control of Hard Disk Drives Based on Perfect Tracking Control using Mul-

- tirate Feedforward Control, IEEE AMC2000, 74/79 (2000)
- 7) M. Kobayashi, et al: Adaptive Seeking Control for Magnetic Disk Drives, JSME Int'l. J., C-43-2, 300/305 (2000)
- 8) B.L. Walcott and S.H. Zak: State observation of nonlinear uncertain dynamical systems, IEEE Trans. on Automatic Control, 32, 166/170 (1987)
- 9) B.L. Walcott and S.H. Zak: Combined observer-controller synthesis for uncertain dynamical systems with applications, IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics, 18, 88/104 (1988)
- 10) C. Edwards and S.K. Spurgeon: Sliding Mode Control: Theory and Applications, Taylor Francis, 131/145 (1998)
- 11) I. Haskara, U. Ozguner and V. Utkin: On Variable Structure Observers, IEEE Workshop on Variable Structure Systems, 193/198 (1996)
- 12) S. Beale and B. Shafai: Robust control design with a proportional integral observer, Int'l. J. of Control, 50 (1989)
- 13) B. Shafai and R.L. Carroll: Design of proportional integral observer for linear time-varying multivariable systems, Proc. of IEEE Conference on Decision and Control, 597/599 (1985)
- 14) K.D. Young and U. Ozguner: Frequency shaped variable structure control, Proc. of American Control Conference, 23/25 (1990)
- 15) V.I. Utkin and K.D. Young: Methods for constructing discontinuous planes in multidimensional variable structure systems, Automation and Remote Control, 31, 1466/1470 (1977)
- 16) Y.F. Chen, H. Ikeda, T. Mita and S. Wakui: Trajectory Control of Robot Arm Using Sliding Mode Control and Experimented Results, J. of the Robotics Society of Japan, 7-6, 62/67 (1989)
- 17) G.F. Franklin, J.D. Powell and M. Workman: Digital Control of Dynamic Systems -Third Edition, Addison Wesley, 286/287 (1998)
- 18) Y. Mizoshita, S. Hasegawa and K. Takaishi: Vibration Minimized Access Control for Hard Disk Drives, IEEE Trans. on Mag., 32-3, 1793/1798 (1996)

[著者紹介]

大野 敬太郎（正会員）

1968年生。93年東京工業大学機械工学専攻修士課程修了。同年富士通（株）入社。宇宙開発推進室を経て、99年富士通研究所に入所。01年よりカリフォルニア大学バークレー校客員研究員、現在に至る。二足歩行ロボット制御、磁気ディスクのヘッド位置決め制御などの研究開発に従事。ASMEの会員。

Roberto HOROWITZ

Roberto Horowitz was born in Caracas, Venezuela in 1955. He received a B.S. degree with highest honors in 1978 and a Ph.D. degree in 1983 in mechanical engineering from the University of California at Berkeley. In 1982 he joined the Department of Mechanical Engineering at the University of California at Berkeley, where he is currently a Professor. He is a member of IEEE and ASME.