M 変換を用いるインパルス状雑音除去†

原 田 博 之*・柏 木 潤*

安 藤 俊 之**・梶 一 喜***

Impulsive Noise Reduction by Use of M-Transform†

Hiroshi HARADA*, Hiroshi KASHIWAGI*,
Toshiyuki ANDOH** and Kazuki KABA***

The authors have recently proposed a new signal processing technique called M-transform. In this paper, the authors propose a new method for impulsive noise reduction by use of M-transform.

Key Words: signal processing, M-sequence, M-transform, noise reduction, correlation function

1. ま え が き

筆者等は M 系列信号をもとにした新たな信号の変換である M 変換を提案し、その性質および線形系の同定への応用について述べた²⁾。本論文は、M 変換の性質を利用して、信号に含まれるインパルス状雑音および白色雑音を除去する方法を提案するものである。

信号中に含まれる雑音の除去に関しては、さまざまなフィルタが提案されているが、インパルス状雑音および白色雑音の両方を良好に除去するものは数少ない¹⁾。本論文ではまず、文献 2) で提案された M 変換について簡単にふれる。つぎに、新たに提案する M 変換による雑音除去方法について述べる。最後に、提案する方法が有効であることをシミュレーションにより確認する。

2. M 変換とその性質

文献 2) で提案した M 変換は以下のようなものである。ガロア体 GF(2) 上で定義された n 次原始多項式 $f(x)$ より発生した M 系列信号を $\{a_i\}$ ($a_i = 0$ または 1) とし、系列 $\{m_i\}$ を (1) 式のように定義すると、その自己相関関数 $\phi_{mm}(k)$ は (2) 式となる³⁾。

$$m_i = (-1)^{a_i} \quad (1)$$

$$\phi_{mm}(k) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} m_{i-k} m_i$$

$$= \begin{cases} 1 & (k = 0, N, 2N, \dots) \\ -\frac{1}{N} & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (2)$$

ここで、 $N = 2^n - 1$ は n 次 M 系列の周期である。また、(2) 式は M 系列の擬似直交性²⁾と呼ばれる性質である。

M 変換は、この 2 値系列 $\{m_i\}$ を用いて以下のように定義できる。まず、 $N \times N$ の行列 M_i を (3) 式のように構成する。

$$M_i = \begin{bmatrix} m_i & m_{i-1} & \dots & m_{i-N+1} \\ m_{i+1} & m_i & \dots & m_{i-N+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{i+N-1} & m_{i+N-2} & \dots & m_i \end{bmatrix} \quad (3)$$

つぎに、時間信号 $x(t)$ を一定のサンプリング間隔 Δt おきにサンプルした時系列信号を $x(i\Delta t)$ とし、これを $x(i)$ と略記して時間信号 X_i を (4) 式のように定義する。

$$X_i = (x(i), x(i+1), \dots, x(i+N-1))^T \quad (4)$$

このとき、時系列信号 $\{x_i\}$ の M 変換 A は (5) 式により定義され、(6) 式により一意に決定される²⁾。

$$X_i = M_i A \quad (5)$$

$$A = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{N-1})^T \\ = (M_i^T M_i)^{-1} M_i^T X_i \quad (6)$$

また、M 系列信号 $\{m_i\}$ と $\{x_i\}$ の相互相関関数 $\phi_{mx}(k)$ は M 変換 A を用いて (7) 式のように表わされる²⁾。

$$\phi_{mx}(k) = \frac{N+1}{N} \alpha_k - \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \alpha_l \quad (7)$$

3. M 変換を用いる雑音除去法

本論文では、前述の M 変換を用いてインパルス状雑音と白色雑音の両方を除去する方法を提案する。まず、単一インパルスからなるインパルス状雑音 P_j を (8) 式のように表わす。

$$P_j = (0, 0, \dots, p_j, 0, \dots, 0)^T \quad (8)$$

† 第 40 回 SICE 学術講演会で一部発表 (2001・7)

* 熊本大学工学部 熊本市黒髪 2-39-1

** 熊本大学大学院自然科学研究科 熊本市黒髪 2-39-1

*** (財) くまもとテクノ産業財団 熊本県上益城郡益城町

* Faculty of Engineering, Kumamoto University, Kurokami, Kumamoto

** Graduate School of Science and Technology, Kumamoto University, Kurokami, Kumamoto

*** Kumamoto Technology and Industry Foundation, Mashiki-machi, Kamimashiki-gun, Kumamoto

(Received February 10, 2003)

(Revised April 24, 2003)

ここで, p_j はインパルス状雑音の大きさ, j はインパルスの位置を表す. インパルス状雑音 P_j の M 変換 A_p の要素 α_i は (6), (8) 式より, 次式のように表わされる.

$$\alpha_i = \frac{1}{N+1}(m_{i+j} - 1)p_j \quad (9)$$

(9) 式より, インパルス状雑音に M 変換をほどこすことにより, これを小振幅の M 系列信号に変換することができる. 一方, M 変換は, (7) 式より明らかなように, 時系列信号と M 系列信号との相互相関関数を求めることと等価であるから, M 系列信号と無相関である白色雑音 $\sigma(i)$ の M 変換はやはり小振幅の不規則信号となる. 上記の結果より, M 変換を行なうことにより, インパルス雑音と白色雑音は小振幅の不規則信号に変換することができる. この不規則信号は小振幅雑音の除去に有効な非線形フィルタ, たとえば, ϵ -分離非線形フィルタ⁴⁾などを用いることにより除去できる.

本論文で提案する雑音除去方法をまとめると以下のようになる. まず, 雑音を含む信号に対して M 変換を行なう. 得られた M 変換 A を次式のようにおく.

$$A = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{N-1})^T \quad (10)$$

つぎに, この M 変換 A を非線形フィルタに通す. このとき, フィルタを通した後の M 変換を A_f とすると, その要素 β_i はもとの M 変換 A の要素を用いて

$$A_f = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{N-1})^T \quad (11)$$

$$\beta_i = g(\alpha_{i-L}, \alpha_{i-L+1}, \dots, \alpha_i) \quad (12)$$

と表わすことができる. ここで, $g(\alpha_{i-L}, \alpha_{i-L+1}, \dots, \alpha_i)$ は非線形関数であり, L は非線形フィルタのフィルタ長である. たとえば, 小振幅雑音の除去に有効な非線形フィルタである ϵ -分離フィルタ⁴⁾の場合,

$$\beta_i = \alpha_i - \sum_{l=0}^{L-1} a_l \cdot h(\alpha_i - \alpha_{i-l}) \quad (13)$$

となる. (13) 式において, a_l は定数, 関数 $h(\cdot)$ は

$$|h(x)| \leq \epsilon \quad (\epsilon: \text{正の定数}) \quad (14)$$

を満足する非線形関数である. 非線形フィルタを通した M 変換 A_f を逆 M 変換し, もとの時間信号に変換することにより, 雑音が除去された信号が得られる.

4. シミュレーション結果

前節で述べた方法により, インパルス状雑音と白色雑音の除去が可能であることを示すために, シミュレーションを行なった. まず, 元の信号にインパルス状雑音と白色雑音を加えた長さ $N = 511$ の時間信号 $x(t)$ を Fig. 1 に示す. つぎに, この信号の M 変換 A を Fig. 2 に示す. ここで, 用いた M 系列の特性多項式 $f(x)$ は

$$f(x) = x^9 + x^4 + 1 \quad (15)$$

である. 図より, M 変換によりインパルス状雑音および白

Fig. 1 Original signal $x(i)$ which includes impulsive noise and white noise

Fig. 2 M-transform of the original signal $x(i)$

Fig. 3 Filtered M-transform

色雑音が小振幅の不規則信号に変換されていることがわかる. つぎに, 得られた M 変換 A を ϵ -分離フィルタに通し, 小振幅雑音を除去した信号が Fig. 3 である. 雑音を除去した後の信号に逆 M 変換をほどこして得られた信号を Fig. 4 に示す. Fig. 1 と Fig. 4 を比較すると, 提案する方法により

Fig. 4 Reconstructed signal

インパルス状雑音および白色雑音が除去されていることは明らかである。

つぎに、本論文で提案した雑音除去方法と通常の線形低域通過フィルタを用いた場合について、雑音の低減効果を以下の方法により比較した。まず、フィルタを通した信号 $x_f(n)$ ともとの信号 $x(n)$ との 2 乗平均誤差とフィルタ長 L の関係を示したものが Fig. 5 である。ここで、線形低域通過フィルタとしては、出力が次式のように表わされるフィルタ長 L 、フィルタ係数 a_l のものを使用している。

$$x_f(n) = \sum_{l=0}^{L-1} a_l \cdot x(n-l) \quad (16)$$

また、もとの信号としては長さ $N = 1023$ で 5 周期となる正弦波を用いている。この信号に発生位置を不規則に変えた 2 個の単一パルスと白色雑音を加えた信号に対して、提案する方法および同じ長さの低域通過フィルタを用いた場合について、次式で表わされる 2 乗平均誤差 MSE を求めている。

$$\text{MSE} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (x_f(n) - x(n))^2 \quad (17)$$

このとき、M 変換した信号に対して使用する非線形フィルタとしては、Double Window Modified Trimmed Mean フィルタ (DW-MTM フィルタ)¹⁾を用いている。図より、使用するフィルタ長が短いとき提案する方法は通常の低域通過フィルタによりも雑音低減に有効であることがわかる。

つぎに、同じ信号に対して提案する方法および同じフィルタ長の低域通過フィルタを用いた場合に改善された SN 比を求めた結果を示したものが Fig. 6 である。ここで、改善された SN 比とは、Fig. 5 で用いたインパルス状雑音および白色雑音を有する信号中の雑音のパワースペクトルから提案する方法および低域通過フィルタにより雑音を除去した後の信号中に含まれる雑音のパワースペクトルとの差を dB で表わしたものである。このとき、フィルタ長 $L = 11$ としている。図より、線形フィルタよりも提案した方法の方が、SN 比が改善されていることがわかる。

Fig. 5 Relation between mean-square error and filter length L

Fig. 6 Improved SN-ratio

5. あとがき

本論文では、M 変換と非線形フィルタを組み合わせることで、インパルス状雑音および白色雑音を同時に除去する新たな方法を提案した。本論文では、M 変換後の信号から小振幅の雑音を除去するために ϵ -分離フィルタおよび DW-MTM フィルタを用いたが、雑音の種類に応じて M 変換と種々の非線形フィルタと組み合わせることにより、通常の線形フィルタでは困難な雑音除去が可能であると考えられる。

参考文献

- 1) 棟安, 田口: 非線形デジタル信号処理, 朝倉書店 (1999)
- 2) 柏木, 劉, 原田, 山口: M 変換の性質と同定への応用, 計測自動制御学会論文集, 34-12, 1785/1790 (1998)
- 3) 柏木 潤: M 系列とその応用, 昭晃堂 (1996)
- 4) 原島, 小田島, 鹿喰, 宮川: ϵ -分離非線形デジタルフィルタとその応用, 電子通信学会論文誌, J65-A-4, 297/304 (1982)