時間遅れのある 線形サンプル値系の最短時間整定†

長 田 朗・植 田 司・西 村 卓 也

近畿大学理工学部 東大阪市小若江 321

(昭和42年3月27日受付)

Minimum Time Settling of the Linear Sampled-Data System with Time Delay

Akira NAGATA, Tsukasa UEDA and Takuya NISHIMURA

(Faculty of Science and Technology, Kinki University, Higashiosaka)

(Received March 27, 1967)

This paper is concerned with fundamental problems arising in the control of a linear sampled-data system with time-delay. An important and unsolved problem of such a system is the problem of finite time settling; namely, the problem of transferring the state of the system from an arbitrary initial state to an equilibrium state in a finite number of steps.

In this paper, the problem is solved by transforming the given system into a higher order sampled-data system without time-delay. The state transition matrix of the derived sampled-data system may be nonsingular or singular, depending on the structure of the original system.

In both cases, the problems of controllability and minimum time control are considered in detail. Finally, a numerical example is given.

1. 緒 言

実際の制御系では時間遅れ要素を含む場合が少なくないが、現在その制御問題についての理論的な取り扱いには十分な成果を得るにいたっていない。一般に時間遅れのある系の制御問題は、終端条件の形により到達問題および整定問題に分類して考えることができるが¹⁾、ことに工学的に重要な意義をもつ整定問題には未解決な点が多い。

本論文は時間遅れのある線形サンプル値系の有限整定問題、すなわち系の状態を、任意に与えられた初期状態から平衡状態へ有限個のステップで移行させる問題を考察する。一般に時間遅れのあるサンプル値系は、その特性が高階差分方程式の形で記述されるが、系における遅れ要素の作用により、この方程式の階数は、ある場合無限に大きくとらなければならない²⁾。系の状態の次元は差分方程式の階数とともに増大し、このことが整定問題を取り扱う場合の1つの大きな障害となっており、ことに無限次元状態をもつ系をそのままの形で取り扱うことはきわめて困難である。しかし無限次元状態をもつ系も、適当な近似法によって有限次

元の状態をもつ系で近似することができ、本論文では、このような近似的な場合を含めて、一般に有限階差分方程式で記述される線形サンプル値系を取り扱う。

ここでは、有限階線形差分方程式で記述される系を、まず系の状態ベクトルの導入により遅れのない通常の線形サンプル値系に等価変換し、状態の次元を小さくして取り扱うためにこれをさらに整定問題に関して等価な形に変換して、系の可制御性の条件ならびに最短時間整定問題を考察している。最後に簡単な数値例について、最短時間整定問題の解を例示している。

2. 可制御性および最短時間 整定問題の定義

時間遅れのある線形サンプル値系として、近似的な場合を含め(1)式の形の差分方程式で記述される系を考える。

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} = & \Phi_1 \mathbf{x}_k + \Phi_2 \mathbf{x}_{k-1} + \cdots + \Phi_m \mathbf{x}_{k+m-1} \\ & + \mathbf{b}_1 u_k + \mathbf{b}_2 u_{k-1} + \cdots + \mathbf{b}_r u_{k-r+1} \quad \cdots (1) \end{aligned}$$

ここで、 $\mathbf{x}_k$ は遅れがない場合の時刻 $t=kT$ (T = サンプルング周期) における状態ベクトルに相当する n 次元ベクトルであり、 $\Phi_j, j=1, 2, \dots, m$ は $(n \times n)$ 定数マトリクス、 $\mathbf{b}_i, i=1, 2, \dots, r$ は n 次元定数ベクトル

† 第5回計測自動制御学会学術講演会で発表(昭41・9・6)

ル, u_k は時刻 $t=kT$ における操作量で, 拘束条件 $|u_k| \leq 1$ を満足するものを許容操作と呼ぶ.

$(n \cdot m + r - 1)$ 次元ベクトル $\mathbf{Z}_k$ を,

$$\mathbf{Z}_k \triangleq \text{col}(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k-1}, \dots, \mathbf{x}_{k-m+1}, u_{k-1}, \dots, u_{k-\gamma+1}) \quad \dots\dots(2)$$

で定義すれば, $\mathbf{Z}_k$ は $t=kT$ における系 (1) の状態ベクトルと呼ぶことができる. (2) 式の定義にしたがって系 (1) を表わせば,

$$\mathbf{Z}_{k+1} = \phi \mathbf{Z}_k + \Gamma u_k \quad \dots\dots(3)$$

ただし,

$$\phi \triangleq \begin{bmatrix} \overbrace{\mathbf{G} \quad \mathbf{h}_2 \quad \mathbf{h}_3 \quad \dots \quad \mathbf{h}_\gamma}^{n \cdot m} & \overbrace{\mathbf{h}_1}^1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \dots \quad \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{(\gamma-2)} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{matrix} n \cdot m \\ 1 \\ r-2 \end{matrix} \quad \Gamma \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1 \\ 1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ n \cdot m \\ r-2 \end{matrix}$$

$$\mathbf{G} \triangleq \begin{bmatrix} \overbrace{\Phi_1 \quad \Phi_2 \quad \dots \quad \Phi_m}^{n \cdot m - n} & \overbrace{\Phi_0}^n \\ \mathbf{I}_{(n \cdot m - n)} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{matrix} n \\ n \cdot m - n \end{matrix} \quad \mathbf{h}_i \triangleq \begin{bmatrix} \overbrace{\mathbf{b}_i}^1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ n \cdot m - n \end{matrix}$$

$$i=1, 2, \dots, \gamma \quad \dots\dots(4)$$

$\mathbf{I}_{(j)} = (j \times j)$ 単位マトリクス

なる状態転移方程式を得ることができる. (3) 式は $(n \cdot m + r - 1)$ 次元状態空間において, 遅れのない通常の線形サンプル値系を表わしており, 系 (3) は系 (1) に等価である. 系 (3) についての平衡状態 $\mathbf{Z} = \mathbf{0}$ (原点) を目標状態とする制御問題が, 系 (1) に対する整定問題を形成する.

可制御性の定義 「系 (3) の状態を, 任意の初期状態 $\mathbf{Z}_0$ から平衡状態 $\mathbf{Z} = \mathbf{0}$ に有限個のステップで移行させる許容操作列 $\{u_k\}$ が少なくとも 1 つは存在するとき, 系 (3) は完全可制御であるといい, 系 (3) が完全可制御であるとき, 系 (1) は整定問題に関して完全可制御 (以下, 単に可制御) であるという」

可制御性の条件が満足されているものとするとき, 系 (1) に対する最短時間整定問題をつぎのように与える.

最短時間整定問題 「系 (1) の状態を, 任意に与えられた初期状態

$$\mathbf{Z}_0 = \text{col}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_{-1}, \dots, \mathbf{x}_{-m+1}, u_{-1}, \dots, u_{-\gamma+1})$$

から, 最小のステップ数 N をもって

$$\mathbf{Z}_N = \text{col}(\mathbf{x}_N, \mathbf{x}_{N-1}, \dots, \mathbf{x}_{N-m+1}, u_{N-1}, \dots, u_{N-\gamma+1}) = \mathbf{0}$$

へ移行させるための許容操作列 $\{u_k\}$ を見い出せ」

この問題の解を最適操作列と呼び $\{u_k^0\}$ で表わす.

可制御性の条件ならびに最適操作列は系 (3) を考察することによっても得ることができるが, 以下では, 直接 $(n \cdot m + r - 1)$ 次元状態空間で系 (3) を取り扱う代わりに整定問題に関して系 (1) に等価な $(n \cdot m)$ 次元空間での系を構成してこれを考察する.

3. 可制御性

$(n \cdot m)$ 次元空間 S を考え, S におけるベクトル

$$\mathbf{X}_k \triangleq \text{col}(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k-1}, \dots, \mathbf{x}_{k-m+1})$$

を定義すれば, 系 (1) はつぎのように表わすことができる.

$$\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{G}\mathbf{X}_k + \mathbf{h}_1 u_k + \mathbf{h}_2 u_{k-1} + \dots + \mathbf{h}_\gamma u_{k-\gamma+1} \quad \dots\dots(5)$$

ここで, $\mathbf{G}$ および $\mathbf{h}_i$ はそれぞれ (4) 式で定義される $(n \cdot m \times n \cdot m)$ 定数マトリクスおよび $(n \cdot m)$ 次元定数ベクトルである.

初期状態 $\mathbf{Z}_0 = \text{col}(\mathbf{x}_0, u_{-1}, \dots, u_{-\gamma+1})$ から出発して系 (3) を操作し, $\mathbf{Z}_N = \text{col}(\mathbf{x}_N, u_{N-1}, \dots, u_{N-\gamma+1}) = \mathbf{0}$ が実現されたと仮定すれば, (5) 式によってつぎの関係が満足されなければならない.

$$\mathbf{0} = \mathbf{G}^{N-\gamma+1} \mathbf{X}_0^* + \mathbf{G}^{N-\gamma} \eta u_0 + \mathbf{G}^{N-\gamma-1} \eta u_1 + \dots + \eta u_{N-\gamma} \quad \dots\dots(6)$$

ただし $\eta \triangleq \mathbf{G}^{\gamma-1} \mathbf{h}_1 + \mathbf{G}^{\gamma-2} \mathbf{h}_2 + \dots + \mathbf{h}_\gamma \quad \dots\dots(7)$

$$\mathbf{X}_0^* \triangleq \mathbf{G}^{\gamma-1} \mathbf{X}_0 + (\mathbf{G}^{\gamma-2} \mathbf{h}_2 + \mathbf{G}^{\gamma-3} \mathbf{h}_3 + \dots + \mathbf{h}_\gamma) u_{-1} + \mathbf{G}(\mathbf{G}^{\gamma-3} \mathbf{h}_3 + \dots + \mathbf{h}_\gamma) u_{-2} + \dots + \mathbf{G}^{\gamma-2} \mathbf{h}_\gamma u_{-\gamma+1} \quad \dots\dots(8)$$

(6) 式の関係は, $\mathbf{Z}_0$ で定まる $\mathbf{X}_0^* \in S$ を初期状態とし, S において

$$\mathbf{X}_{k+1}^* = \mathbf{G}\mathbf{X}_k^* + \eta u_k \quad \dots\dots(9)$$

で与えられる系を $(N - \gamma + 1)$ ステップの操作により $\mathbf{X}_{N-\gamma+1}^* = \mathbf{0}$ とした形である. したがって系 (1) は整定問題に関して系 (9) に等価であり, 整定問題に関する限り $(n \cdot m + r - 1)$ 次元状態をもつ系 (3) を取り扱うよりも $(n \cdot m)$ 次元状態をもつ系 (9) を取り扱う方が有利であると考えられる. (4) 式の形で構成される系 (9) の状態転移マトリクス $\mathbf{G}$ の正則性は, 系 (1) のマトリクス $\Phi_i, i=1, 2, \dots, m$ の構造に依存する. ここでは $\mathbf{G}$ が正則, および非正則である場合について考察する.

可制御性の定義における系 (3) を系 (9) でおきかえれば, 以下の結論を得る.

(i) $\det \mathbf{G} \neq 0$ のとき——定理 1 「系 (1) が $|u_k| \leq 1, k=0, 1, 2, \dots$ の拘束のもとに可制御であるためには,

$$(a) \text{ rank } [\mathbf{G}^{n \cdot m-1} \eta, \mathbf{G}^{n \cdot m-2} \eta, \dots, \eta] = n \cdot m$$

(b) $\mathbf{G}$ のすべての固有値が単位円内に存在する.

すなわち, $|\lambda_i(\mathbf{G})| \leq 1, i=1, 2, \dots, n \cdot m$

が満足されることが必要十分である. ただし, $\mathbf{G}, \eta$ はそれぞれ (4), (7) 式で定義されるものである」

この結論は系 (9) に Desoer-Wing の定理³⁾ を適用して得られたものであるが, とくに (a) の条件は操作量に拘束がない場合に系 (1) が可制御であるため

の必要十分条件を与えている。

(ii) $\det \mathbf{G} = 0$ のとき 一般に有限次元ベクトル空間のすべての線形変換は、正則変換およびべき零変換の直和の形に分解できるから、 $(n \cdot m)$ 次元状態空間 S を、 $\mathbf{G}^l$ の値域 $R(\mathbf{G}^l)$ および零空間 $N(\mathbf{G}^l)$ を用いて、

$$S = R(\mathbf{G}^l) \oplus N(\mathbf{G}^l) \quad \dots\dots (10)$$

と表わすことができる。ここで $\oplus$ は直和を表わし、 l は $\mathbf{G}$ の零固有値の幾何学的重複度数、あるいは等価的に $N(\mathbf{G}^l) = N(\mathbf{G}^{l+1})$ を満足する最小の非負の整数とする。 $\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ を、 $R(\mathbf{G}^l)$ をはる基底ベクトルのうちの任意の 1 組とし、 $\{v_{p+1}, v_{p+2}, \dots, v_{n \cdot m}\}$ を、 $N(\mathbf{G}^l)$ をはる基底ベクトルの 1 組とすれば、(10) 式の意味するところから、 $\{v_1, v_2, \dots, v_{n \cdot m}\}$ は状態空間 S をはる 1 組の基底ベクトルであることが明らかである。もとの基底においてマトリクス $\mathbf{G}$ により表現された線形変換を、上に導入された新しい基底 $\{v_1, v_2, \dots, v_{n \cdot m}\}$ について表わせば、 $R(\mathbf{G}^l)$ および $N(\mathbf{G}^l)$ が $\mathbf{G}$ の不変部分空間であるところから、つぎのように準対角化されたマトリクス $\mathbf{C}$ として表わすことができる。

$$\mathbf{C} = \mathbf{V}^{-1} \mathbf{G} \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{C}} \end{bmatrix} \quad \dots\dots (11)$$

ここで、 $\mathbf{V} \triangleq [v_1, v_2, \dots, v_{n \cdot m}]$,

$\mathbf{C}^* = (p \times p)$ 正則マトリクス、

$\tilde{\mathbf{C}} = (n \cdot m - p) \times (n \cdot m - p)$ べき零マトリクス

$\mathbf{C}^*$ は $R(\mathbf{G}^l)$ 上の線形変換を表わし、 $\det \mathbf{C}^* \neq 0$, $\tilde{\mathbf{C}}$ は $N(\mathbf{G}^l)$ 上の変換を表わし、 $\tilde{\mathbf{C}}^l = \mathbf{0}$ である。

系 (9) において $\mathbf{X}^*$ から $\mathbf{Y}$, ($\mathbf{Y} \triangleq \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X}^*$) への変数変換を行なえば、新しい状態ベクトル $\mathbf{Y}$ についての転移方程式は、

$$\mathbf{Y}_{k+1} = \mathbf{C} \mathbf{Y}_k + \mathbf{d} u_k \quad \dots\dots (12)$$

$$\text{または、} \quad \mathbf{Y}_{k+1}^* = \mathbf{C}^* \mathbf{Y}_k^* + \mathbf{d}^* u_k \quad \dots\dots (13)$$

$$\tilde{\mathbf{Y}}_{k+1} = \tilde{\mathbf{C}} \tilde{\mathbf{Y}}_k + \tilde{\mathbf{d}} u_k \quad \dots\dots (14)$$

と表わすことができる。ここで

$$\mathbf{d} \triangleq \text{col}(\mathbf{d}^*, \tilde{\mathbf{d}}) = \mathbf{V}^{-1} \mathbf{q} \quad \dots\dots (15)$$

であり、 $\mathbf{Y}^*$ は $R(\mathbf{G}^l)$ 上の p 次元ベクトル、 $\tilde{\mathbf{Y}}$ は $N(\mathbf{G}^l)$ 上の $(n \cdot m - p)$ 次元ベクトルである。

目標状態を S の原点 $\mathbf{0}$ とする系 (9) の最短時間制御問題は、系 (12) で $\mathbf{0}$ を目標状態とする最短時間制御問題と等価であり、系 (1) の可制御性は系 (12), したがって系 (13) および (14) を考察して調べることができる。

系 (14) は零操作 (したがって許容操作) によって完全可制御であることは、任意の初期状態 $\tilde{\mathbf{Y}}_0$ が与えられるとき、 $u_k = 0$, $k = 0, 1, 2, \dots, l-1$ とおけば、

$\tilde{\mathbf{Y}}_l = \tilde{\mathbf{C}}^l \tilde{\mathbf{Y}}_0 = \mathbf{0}$ となることから知ることができ、系 (13) においては $\det \mathbf{C}^* \neq 0$ であるから、上述の結果とあわせて考えればつぎの結論を得る⁴⁾。

定理 2 「系 (1) が $|u_k| \leq 1$, $k = 0, 1, 2, \dots$, の拘束のもとに可制御であるためには、

$$(a) \quad \text{rank}[\tilde{\mathbf{C}}^{*p-1} \mathbf{d}^*, \mathbf{C}^{*p-2} \mathbf{d}^*, \dots, \mathbf{d}^*] = p$$

$$(b) \quad \mathbf{C}^* \text{ のすべての固有値が単位円内に存在する,}$$

$$\text{すなわち、} |\lambda_i(\mathbf{C}^*)| \leq 1, i = 1, 2, \dots, p$$

が満足されることが必要十分である。ただし、 $\mathbf{C}^*, \mathbf{d}^*$ はそれぞれ (11), (15) 式で定義されるものである」

定理 2 において、条件 (b) は、 $\mathbf{G}$ の 0 でないすべての固有値は $\mathbf{C}^*$ の固有値として含まれているから、 $|\lambda_i(\mathbf{G})| \leq 1$, $i = 1, 2, \dots, n \cdot m$ なる条件におきかえることができる。

4. 最短時間整定問題

系 (1) に対する最短時間整定問題は系 (3) または系 (9) において、目標状態を零状態としたときの最短時間制御問題の解を求めることによりとくことができる。ここでは、系 (9) の最短時間制御問題の解を考察する。

(i) $\det \mathbf{G} \neq 0$ のとき 状態転移マトリクス $\mathbf{G}$ が正則な場合、系 (9) の形の線形サンプル値系の最短時間制御問題の解法としては種々の方法が考えられているが、その 1 つとして状態空間技法⁵⁾ を適用すれば、つぎのようにして解が得られる。

空間 S において、

$$\mathbf{S}_i \triangleq \mathbf{G}^{-i} \boldsymbol{\eta}, i = 1, 2, \dots \quad \dots\dots (16)$$

で定義される $(n \cdot m)$ 次元ベクトル $\mathbf{S}_i$ を導入すれば、(8) 式で与えられる初期状態 $\mathbf{X}_0^*$ は、 $f_i(0)$ を実数係数として次式のように表わすことができる。

$$\mathbf{X}_0^* = \sum_{i=1}^N f_i(0) \mathbf{S}_i, |f_i(0)| \leq 1 \quad \dots\dots (17)$$

(17) 式の最後の項 $f_N(0) \mathbf{S}_N$ に対し、 $f_N(0) \neq 0$ とするような最小の N が見い出されるとき、最適操作列 $\{u_k^0\}$ は、

$$u_k^0 = -f_{k+1}(0), k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad \dots\dots (18)$$

によって与えられる。初期状態 $\mathbf{X}_0^*$ が与えられたとき、(17) 式を満足する最小のステップ数 N および係数 $f_i(0)$ は、空間 S において $\mathbf{S}_i$ により構成される適当な集合と $\mathbf{X}_0^*$ の幾何学的な関係から求めることができる。

また最適性の原理から最適操作列 $\{u_k^0\}$ はつぎのようにフィード・バック形式で得ることができる。

$$u_k^0 = -f_1(k), k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad \dots\dots (19)$$

ここで $f_1(k)$ は最適操作された状態 $\mathbf{X}_k^*$ に対し

(17)式と同様な関係を作るときの第1項の係数である。

(ii) $\det \mathbf{G} = 0$ のとき 状態転移マトリクスが非正則である場合、上述の方法をそのまま適用することはできない。ここでは系(9)の代わりにこれと等価な系(12)、したがって系(13)および(14)を用いて系(1)の最短時間整定問題の解を考察する。系(9)の初期状態 $\mathbf{X}_0^*$ に対応する系(12)、(13)および(14)の初期状態をそれぞれ $\mathbf{Y}_0, \mathbf{Y}_0^*$ および $\tilde{\mathbf{Y}}_0$ とする。

また、系(14)において、

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{C}}^g \tilde{\mathbf{Y}}_0 = 0, & \tilde{\mathbf{C}}^{g-1} \tilde{\mathbf{Y}}_0 \neq 0, & 0 < g \leq l \\ \tilde{\mathbf{C}}^j \tilde{\mathbf{d}} = 0, & \tilde{\mathbf{C}}^{j-1} \tilde{\mathbf{d}} \neq 0, & 0 < j \leq l \end{cases} \quad \dots\dots (20)$$

であるとし、系(13)に対し系の状態を初期状態 $\mathbf{Y}_0^*$ から平衡状態 $\mathbf{0}$ に許容操作で移行させるための最小ステップ数が $q > 0$ であると仮定する。このとき系(1)の最短時間整定問題の解に対し、つぎの結論が得られる。

定理3 「 $q > (g-j)$ ならば、最適操作列 $\{u_k^0\}$ は、系(13)の最短時間制御問題の解 $\{v_k^0\}_{k=0}^{q-1}$ と零操作列 $\{0\}$ により、

$$\{u_k^0\} = \{v_0^0, v_1^0, \dots, v_{q-1}^0, \overbrace{0, 0, \dots, 0}^j\} \quad \dots\dots (21)$$

で与えられる」(証明は付録参照)

系(14)において(20)式を満足する g および j の値は容易に知ることができ、系(13)は正則な状態転移マトリクスをもつ線形サンプル値系であるから(i)に述べた方法を適用して、最小ステップ数 q および最短時間制御問題の解 $\{v_k^0\}_{k=0}^{q-1}$ を求めることができる。

$q > (g-j)$ ならば最適操作列 $\{u_k^0\}$ は(21)式によって決定される。 $q \leq (g-j)$ のときについての詳細な議論は別の機会にゆずるが、このときでも多くの場合(21)式によって最適操作列が決定され、初期状態 $\mathbf{Y}_0^*$ および $\tilde{\mathbf{Y}}_0$ が特別な関係を満足するとき、(21)式は1つの近似解を与える。この特別な場合、近似解を用いたために増加するステップ数はたかだか $(j-1)$ である。計算手順の簡単さに主眼をおき、すべての場合についての最適操作列を(21)式で与えるものとすれば、系(13)に対し(i)で述べた方法を適用することにより、系(1)の最短時間整定問題の解を得ることができる。

5. 例 題

数値モデルとして次式で記述されるサンプル値系を考え、前節までの理論を適用する。

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \Phi_1 \mathbf{x}_k + \Phi_2 \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{b} u_k \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0.85 \\ 0.6 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.25 \end{bmatrix} \mathbf{x}_{k-1} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_k \\ |u_k| &\leq 1, \quad k=0, 1, 2, \dots \quad \dots\dots (22) \end{aligned}$$

(i) 可制御性 系(1)との対応から、 $n=2$, $m=2$, および $r=1$ となり、系(22)を系(9)の形に変換すれば、

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{k+1}^* &= \mathbf{G} \mathbf{X}_k^* + \boldsymbol{\eta} u_k \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0.85 & 0 & 0 \\ 0.6 & 0 & 0 & 0.25 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{X}_k^* + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_k \quad \dots\dots (23) \end{aligned}$$

系(23)の状態転移マトリクス $\mathbf{G}$ は非正則であり、その固有値は $\lambda_1(\mathbf{G}), \lambda_2(\mathbf{G}) = \pm \sqrt{0.76}$, $\lambda_3(\mathbf{G}) = \lambda_4(\mathbf{G}) = 0$ となる。また $\lambda(\mathbf{G}) = 0$ の幾何学的重複度数は $l=2$ である。系(23)を系(13),(14)の形に変換すれば、

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_{k+1}^* &= \mathbf{C}^* \mathbf{Y}_k^* + \mathbf{d}^* u_k \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0.85 \\ 0.8941 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{Y}_k^* + \begin{bmatrix} 2.7969 \\ -2.5007 \end{bmatrix} u_k \quad \dots\dots (24) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{Y}}_{k+1} &= \tilde{\mathbf{C}} \tilde{\mathbf{Y}}_k + \tilde{\mathbf{d}} u_k \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -0.4167 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{Y}}_k + \begin{bmatrix} 0 \\ -0.7890 \end{bmatrix} u_k \quad \dots\dots (25) \end{aligned}$$

が得られる。系(24)において $p=2$ となり、定理2を適用すれば、

(a) $\text{rank} [\mathbf{C}^* \mathbf{d}^*, \mathbf{d}^*] = 2$

(b) $|\lambda_i(\mathbf{C}^*)| = \sqrt{0.76} < 1, \quad i=1, 2$

が満足されており、系(22)は、 $|u_k| \leq 1, \quad k=0, 1, 2, \dots$ の拘束のもとに可制御である。

(ii) 最適操作 系(25)において、(20)式を満足する j の値は、 $l=j=2$ であり、任意の $\tilde{\mathbf{Y}}_0$ に対し $g-j \leq 0$ となる。したがって定理3は任意の $q > 0$ に対して成立する。

与えられた初期状態を、

$$\mathbf{X}_0^* = \text{col}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_{-1}) = \text{col}(-2, 3, 5, 10)$$

とすれば、系(24)の初期状態は $\mathbf{Y}_0^* = \text{col}(-4.5762, 7.0899)$ となる。これらの条件のもとに系(24)に対

Fig. 1 The optimal trajectory of $\mathbf{x}_k$ of the system (22) for the initial data $\text{col}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_{-1}) = \text{col}(-2, 3, 5, 10)$

して状態空間技法を適用すれば、 $q=5$ および最適操作列が

$$\{u_k^0\} = \{-1, -1, -1, -0.4876, -0.8555, 0, 0\} \dots (26)$$

として得られる。Fig. 1 に (26) 式で得られる最適操作列に対する x_k , $k=0, 1, 2, \dots$, の最適軌跡を示す。

これらの結果は、前節までの理論に対して満足できるものである。

6. 結 言

時間遅れのある線形サンプル値系の整定問題について考察し、系が近似的な場合を含めて高階差分方程式で記述される場合の可制御性の条件ならびに最短時間整定問題の解法を示した。このような系を通常の線形サンプル値系に等価変換して取り扱う場合に 1 つの難点となる状態の次元の増大は、整定問題に関しての等価性を利用することにより、若干の軽減が可能である。

最適操作の計算方法として、本論文に示したものは解をフィード・バック形式で求め得るという利点があり、定理 3 の結果が利用できる場合にもこの性質は保存される。線形サンプル値系で、その状態転移マトリクスの正則性が保証されない場合としては、ここで述べられたように取り扱いの便宜上から適当な変換により構成される場合、または制御対象が本質的にサンプル値動作をする要素を含んでいる場合などが考えられるが、定理 3 の結果は、一般にこのような非正則な状態転移マトリクスをもつ線形サンプル値系の最短時間制御問題に対し、解の計算の簡単化の点からも、1 つの有効な指針を与えるものと考えられる。

最後に、日ごろからご指導いただいている大阪大学熊谷三郎教授、ならびに有益なご討論をいただいた大阪大学児玉慎三講師および早稲田大学示村悦二郎助教授に感謝いたします。

文 献

- 1) 示村悦二郎：むだ時間を含む線形系の可制御性について、計測自動制御学会論文集，1-4，291/295 (1965)
- 2) R. W. Koepcke : On the Control of Linear Systems with Pure Time Delay, Trans. of the ASME, 74/80, March (1965)
- 3) C. A. Desoer, J. Wing : The Minimal Time Discrete System (General Theory), J. Franklin Inst., Vol. 272, 208/228 (1961)
- 4) 熊谷三郎，児玉慎三，長田朗：束縛条件のある線形系の制御可能性について，電気通信学会非直線理論研究会資料，於関西，12 月 (1964)
- 5) 熊谷三郎，長田朗：飽和のあるサンプル値制御系の最適制御，制御工学，7-4，193/200 (1963)
- 6) P. R. Halmos : Finite Dimensional Vector Spaces, 109, 2nd Ed., D. Van Nostrand, Inc., Princeton, N. J., (1958)

付 録——定理 3 の証明

系 (12) において、系の状態を初期状態 $\bar{Y}_0$ から平衡状態 0 に許容操作で移行させ得る最小のステップ数を N であると仮定する。このとき系 (13), (14) に対して、

$$0 = Y_N^* = C^* N Y_0^* + C^* N^{-1} d^* u_0 + C^* N^{-2} d^* u_1 + \dots \dots \dots (A.1)$$

$$0 = \tilde{Y}_N = \tilde{C}^N \tilde{Y}_0 + \tilde{C}^{N-1} \tilde{d} u_0 + \tilde{C}^{N-2} \tilde{d} u_1 + \dots + \tilde{d} u_{N-1} \dots (A.2)$$

を満足する許容操作列 $\{u_k\}$ が存在する。

(a) $N \geq g$ とする。(A.2), (20) 式から、

$$0 = \tilde{C}^{j-1} \tilde{d} u_{N-j} + \tilde{C}^{j-2} \tilde{d} u_{N-j+1} + \dots + \tilde{d} u_{N-1} \dots (A.3)$$

しかるに、 $\tilde{C}^j \tilde{d} = 0$, $\tilde{C}^{j-1} \tilde{d} \neq 0$ のとき、 j 個のベクトル $\tilde{C}^{j-1} \tilde{d}, \tilde{C}^{j-2} \tilde{d}, \dots, \tilde{d}$ は一次独立であり⁶⁾、(A.3) 式が成立するのは、

$$u_{N-j} = u_{N-j+1} = \dots = u_{N-1} = 0 \dots (A.4)$$

のとき、かつそのときに限られる。(A.4) 式を (A.1) 式に代入すれば、 $\det C^* \neq 0$ を考慮して、

$$\begin{aligned} 0 &= C^* N Y_0^* + C^* N^{-1} d^* u_0 + C^* N^{-2} d^* u_1 + \dots \\ &\dots + C^* j d^* u_{N-j-1} \\ &= C^* N^{-j} Y_0^* + C^* N^{-j-1} d^* u_0 + C^* N^{-j-2} d^* u_1 + \dots \\ &\dots + d^* u_{N-j-1} \end{aligned}$$

となり、 $q \leq N-j$, すなわち $N \geq q+j$ が知られる。

他方、(21) 式で構成される許容操作列を用いれば系 (12) の状態は多くとも $(q+j)$ ステップで Y_0 から 0 への移行が可能であり、結局 $N = q+j$ を得る。

$N = q+j$ ならば、(21) 式で与えられる操作列は最適操作列の 1 つであることが明らかであり、さらに (A.4) 式から最適操作列の最後の j 個の要素は 0 でなければならぬことから、定理 3 の結論を得る。

(b) $N < g$ とする。まず $g \geq j$ ならば (A.2) 式の両辺に左から $C^{g-N} \neq 0$ をかけると、(20) 式を考慮して、

$$\begin{aligned} 0 &= \tilde{C}^g \tilde{Y}_0 + \tilde{C}^{g-1} \tilde{d} u_0 + \tilde{C}^{g-2} \tilde{d} u_1 + \dots + \tilde{C}^{g-N} \tilde{d} u_{N-1} \\ &= \tilde{C}^{j-1} \tilde{d} u_{g-j} + \tilde{C}^{j-2} \tilde{d} u_{g-j+1} + \dots + \tilde{C}^{g-N} \tilde{d} u_{N-1} \dots (A.5) \end{aligned}$$

が満足されなければならない。(A.5) 式が成立するのは (A.3) 式の場合と同様にして、

$$u_{g-j} = u_{g-j+1} = \dots = u_{N-1} = 0 \dots (A.6)$$

のとき、かつそのときに限られる。(A.6) 式を (A.1) 式に代入すれば、 $q \leq g-j$ となり、これは $q > g-j$ なる仮定に反する。

また、 $g < j$ のとき、まったく同様にして $q \leq 0$ でなければならないことが知られ、これは $q > 0$ なる仮定に反する。このようにしていずれの場合に対しても $N < g$ は満足されず、 $N \geq g$ でなければならない。