相互干渉のある 2 チャネル線形制御系の動向解析

伊 藤 正 雄

三菱重工業株式会社 東京都千代田区丸ノ内 2-10

(昭和 42 年 9 月 14 日受付)

Analysis of Two-Channel Linear Control System with Mutual Interaction

Masao Itoh

(Mitsubishi Heavy Industries, Ltd., Chiyoda-ku, Tokyo)

(Received September 14, 1967)

In a feed-back control system, which is composed of two servo controllers and a controlled system of two inputs and two outputs with mutual interaction, it is necessary to investigate gains and parameters for compensating elements of each controller considering mutual relationship of two channels.

In this paper, when the open-loop forward gains of each channel are large for an ordinary servo control system, modifying and re-arranging the characteristic equations of the system, it shows that the system with mutual interaction could be treated approximately as separate equivalent circuits and the characteristics of the system could be easily obtained by the sample of calculation and diagrams of their root loci. In addition, the relationship in multi-channel system is discussed.

1. ま え が き

相互干渉のある制御対象を有するフィードバック制御系の具体的な設計に当たっては、ディジタル計算機・アナログ計算機などを用いて、制御装置（フィードバック部・操作部などを総称）に含まれている諸変数を、パラメトリックに変化させて、シンセシスを行うことが行なわれるが、ここではそれにさきだつての制御系特性の概略検討の一方法について述べる。すなわち、2 チャネル線形制御系について、その特性方程式

を整理変形することにより、両チャネル間の関連を定性的にはあくする方法について述べ、さらに多チャネルの場合について論及する。

2. 制御系と伝達関数

相互干渉のある 2 チャネル線形制御系の代表的な構成要素のブロック図を Fig. 1-(1) に示す。図中 F_{11} , F_{12} , F_{21} , F_{22} は相互干渉を有する制御対象, H_{11} , H_{22} はフィードバック部, G_{11} , G_{22} は操作部のそれぞれの伝達関数 (ラプラス変換記号 $F_{11}(S)$ などは F_{11} と略

(1) typical block diagram of two channels interacting linear control system

(2) equivalent block diagram of (1) indicated as unity feed back system

Fig. 1

記)を示し、 r_1', r_2' および C_1, C_2 はそれぞれ入力信号および出力信号を示す。Fig. 1-(2) は Fig. 1-(1) を単一フィードバックの形として示したもので、 $E_{11} = G_{11}H_{11}$, $E_{22} = G_{22}H_{22}$ で、 r_1, r_2 は鎖線部のブロックに対する入力信号を示す。Fig. 1-(2) の鎖線部のブロックの制御系に対しては次式の関係がある。

$$\left. \begin{aligned} E_{11}F_{11}(r_1 - C_1) + E_{22}F_{12}(r_2 - C_2) &= C_1 \\ E_{11}F_{21}(r_1 - C_1) + E_{22}F_{22}(r_2 - C_2) &= C_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots (1)$$

(1) 式から、

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \frac{\delta_{11}}{A} r_1 + \frac{\delta_{12}}{A} r_2 \\ C_2 &= \frac{\delta_{22}}{A} r_2 + \frac{\delta_{21}}{A} r_1 \end{aligned} \right\} \dots\dots (2)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} A &= 1 + E_{11}F_{11} + E_{22}F_{22} + E_{11}F_{22}(F_{11}F_{22} - F_{12}F_{21}) \\ \delta_{11} &= E_{11}F_{11}(1 + E_{22}F_{22}) - E_{11}E_{22}F_{12}F_{21} \\ \delta_{12} &= E_{22}F_{12} \\ \delta_{21} &= E_{11}F_{21} \\ \delta_{22} &= E_{22}F_{22}(1 + E_{11}F_{11}) - E_{11}E_{22}F_{12}F_{21} \end{aligned} \right\} \dots\dots (3)$$

このような制御系に対して、E. Kinnen and D. S. Liu¹⁾ は根軌跡の手法を反復用いて、各チャンネルの特性をはあくする方法について報告しているが、ここでは、(3) 式を整理変形し、さらに通常のフィードバック制御系においては、各チャンネルのメインループの前向き開ループゲインである $E_{11}F_{11}, E_{22}F_{22}$ のゲインが1より大きいことに着目して、特性方程式を变形することにより、両チャンネルの概略の特性がおのおのの独立にはあくできることについて述べる。

3. 関係式の整理変形

いま特性方程式 A をつぎのように書き変える。

$$\begin{aligned} A &= 1 + E_{11}F_{11} + E_{22}F_{22} + E_{11}E_{22}(F_{11}F_{22} - F_{12}F_{21}) \\ &= 1 + E_{22}F_{22} \left[1 + \frac{E_{11}F_{11}}{E_{22}F_{22}} \left\{ 1 + \frac{E_{22}}{F_{11}} (F_{11}F_{22} - F_{12}F_{21}) \right\} \right] \\ &= 1 + E_{22}F_{22} + \delta_{11} \end{aligned} \dots\dots (4)$$

または、

$$\begin{aligned} A &= 1 + E_{11}F_{11} \left[1 + \frac{E_{22}F_{22}}{E_{11}F_{11}} \left\{ 1 + \frac{E_{11}}{F_{22}} (F_{11}F_{22} - F_{12}F_{21}) \right\} \right] \\ &= 1 + E_{11}F_{11} + \delta_{22} \end{aligned} \dots\dots (5)$$

いっぽう、

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= E_{11}F_{11}(1 + E_{22}F_{22}) - E_{11}E_{22}F_{12}F_{21} \\ &= E_{11}F_{11} \left\{ 1 + \frac{E_{22}}{F_{11}} (F_{11}F_{22} - F_{12}F_{21}) \right\} \end{aligned} \dots\dots (6)$$

$$\begin{aligned} \delta_{22} &= E_{22}F_{22}(1 + E_{11}F_{11}) - E_{11}E_{22}F_{12}F_{21} \\ &= E_{22}F_{22} \left\{ 1 + \frac{E_{11}}{F_{22}} (F_{11}F_{22} - F_{12}F_{21}) \right\} \end{aligned} \dots\dots (7)$$

しかるときは、入力 r_1 と出力 C_1 の関係はつぎのよ

うに表わされる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_1}{\partial r_1} &= \frac{\delta_{11}}{A} = \frac{\delta_{11}}{1 + E_{22}F_{22} + \delta_{11}} \\ &= \frac{W_{11}}{1 + W_{11}}, \text{ ただし } W_{11} = \frac{\delta_{11}}{1 + E_{22}F_{22}} \end{aligned} \dots\dots (8)$$

さらに W_{11} は、

$$\begin{aligned} W_{11} &= \frac{E_{11}F_{11}(1 + E_{22}F_{22}) - E_{11}E_{22}F_{12}F_{21}}{1 + E_{22}F_{22}} \\ &= E_{11}F_{11} \left[1 - \frac{F_{12}F_{21}}{F_{11}F_{22}} \left\{ \frac{1}{1 + \frac{1}{E_{22}F_{22}}} \right\} \right] \end{aligned}$$

第2チャンネルの $E_{22}F_{22}$ のゲインが1に比し大きい場合には、

$$W_{11} = E_{11}F_{11} \left[1 - \frac{F_{12}F_{21}}{F_{11}F_{22}} \right] = \frac{E_{11}(F_{11}F_{22} - F_{12}F_{21})}{F_{22}} \dots\dots (9)$$

と考えられ、 $\partial C_1 / \partial r_1$ は (9) 式のような W_{11} なる伝達関数を持った制御系が単一帰還された閉ループ制御系の伝達関数と等価とみなすことができるようになる。すなわち第1チャンネルの特性を E_{22} に無関係な系として考えることができるようになる。さらにとうぜんではあるが、 E_{22} のゲインが小さいとき、または制御対象の干渉の度合いの少ないときには、 $W_{11} \div E_{11}F_{11}$ となり、 $E_{11}F_{11}$ が単一帰還された閉ループ制御系の伝達関数と等価となる。すなわち、Fig. 1-(2) に示した相互干渉のある制御系の $r_1 \rightarrow C_1$ に関する概略の特性をはあくするためには、Fig. 2-(1) および Fig. 2-(2) のブロック図に対する特性を検討すればよいことがわかる。

第2チャンネルの入力 r_2 、出力 C_2 に対しても、上述の第1チャンネルとまったく表裏の関係にあり、つぎのように表わされる。すなわち、

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_2}{\partial r_2} &= \frac{\delta_{22}}{A} = \frac{\delta_{22}}{1 + E_{11}F_{11} + \delta_{22}} \\ &= \frac{W_{22}}{1 + W_{22}}, \text{ ただし } W_{22} = \frac{\delta_{22}}{1 + E_{11}F_{11}} \end{aligned} \dots\dots (10)$$

さらに、

$$\begin{aligned} W_{22} &= \frac{E_{22}F_{22}(1 + E_{11}F_{11}) - E_{11}E_{22}F_{12}F_{21}}{1 + E_{11}F_{11}} \\ &= E_{22}F_{22} \left\{ 1 - \frac{F_{12}F_{21}}{F_{11}F_{22}} \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{E_{11}F_{11}}} \right) \right\} \\ &\div E_{22}F_{22} \left[1 - \frac{F_{12}F_{21}}{F_{11}F_{22}} \right], \quad (\text{ただし } E_{11}F_{11} > 1) \\ &= \frac{E_{22}(F_{11}F_{22} - F_{12}F_{21})}{F_{11}} \end{aligned} \dots\dots (11)$$

このように、 W_{11} および W_{22} はそれぞれ相手側チャンネルの E_{22} および E_{11} の特性には無関係になるので、自身のチャンネルに対してのみ特性解析 (ゲインの

(1) simplified equivalent block diagrams of Fig. 1-(2), when the gains of $E_{11}F_{11}$ or $E_{22}F_{22}$ are larger than 1

(2) simplified equivalent block diagrams of Fig. 1-(2), when the gains of E_{22} and E_{11} are very small or the interaction between No. 1 and No. 2 channels is very small

Fig. 2

厳密解:

$$\frac{\partial C_1}{\partial r_1} = \frac{\frac{K_1(S+4) \{ (S+0.8)(S+2)(S+20)^2 + 37K_2(S+8)(S+10.75) \}}{(S+0.4)(S+1)(S+20)^2 \{ (S+0.8)(S+2) + K_2(S+8) \}}}{1 + \frac{K_1(S+4) \{ (S+0.8)(S+2)(S+20)^2 + 37K_2(S+8)(S+10.75) \}}{(S+0.4)(S+1)(S+20)^2 \{ (S+0.8)(S+2) + K_2(S+8) \}}} \quad \dots (12)$$

$$\frac{\partial C_2}{\partial r_2} = \frac{\frac{K_2(S+8) \{ (S+0.4)(S+1)(S+20)^2 + 37K_1(S+4)(S+10.75) \}}{(S+0.8)(S+2)(S+20)^2 \{ (S+0.4)(S+1) + K_1(S+4) \}}}{1 + \frac{K_2(S+8) \{ (S+0.4)(S+1)(S+20)^2 + 37K_1(S+4)(S+10.75) \}}{(S+0.8)(S+2)(S+20)^2 \{ (S+0.4)(S+1) + K_1(S+4) \}}} \quad \dots (13)$$

近似解:

$$\frac{\partial C_1}{\partial r_1} \approx \frac{\frac{37K_1(S+4)(S+10.75)}{(S+0.4)(S+1)(S+20)^2}}{1 + \frac{37K_1(S+4)(S+10.75)}{(S+0.4)(S+1)(S+20)^2}} \quad \dots (12')$$

$$\frac{\partial C_2}{\partial r_2} \approx \frac{\frac{37K_2(S+8)(S+10.75)}{(S+0.8)(S+2)(S+20)^2}}{1 + \frac{37K_2(S+8)(S+10.75)}{(S+0.8)(S+2)(S+20)^2}} \quad \dots (13')$$

いま, $K_1=0.07, 0.7, 7, 20, 70, 700$ および $K_2=0.025, 0.25, 2.5, 6, 25, 250$ として, (12), (13) 式および (12'), (13') 式に対する根軌跡図を求めると, Fig. 4-(1)~(6), Fig. 5-(1)~(6) および Fig. 6, Fig. 7

Fig. 3 Block diagram as an example of analysis

変化, 補償要素の伝達関数の特性変化などに対する解析)を行なえば, 干渉のある制御対象を含んだ制御系の各チャネルの概略の特性がはあくできることになる..

4. 解 析 例

E. Kinnen and D. S. Liu の論文に報告されている例 (Fig. 3 に示す) を例にとって, K_1, K_2 の値をパラメトリックに変えて, (2), (3) 式による厳密解と, (8), (9) および (10), (11) 式による近似解の対比を行なった. すなわち,

$$F_{11} = \frac{1}{(S+1)}, F_{12} = \frac{1}{(S+20)}, E_{11} = \frac{K_1(S+4)}{(S+0.4)}$$

$$F_{22} = \frac{1}{(S+2)}, F_{21} = \frac{1}{(S+20)}, E_{22} = \frac{K_2(S+8)}{(S+0.8)}$$

これらを (8), (9) および (10), (11) 式に代入すると $\partial C_1/\partial r_1, \partial C_2/\partial r_2$ について, つぎの厳密解と近似解が得られる.

Fig. 4 Root loci of $\partial C_1/\partial r_1$, when K_2 is fixed at a constant value and K_1 is creased from zero to infinity

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= E_{11}F_{11} + E_{12}F_{21} \\ P_2 &= E_{22}F_{22} + E_{21}F_{12} \\ S_1 &= E_{11}F_{12} + E_{12}F_{22} \\ S_2 &= E_{22}F_{21} + E_{21}F_{11} \end{aligned} \right\} \quad \dots (14)$$

のようになる。図中×印は根軌跡の始点を表わし、○印は根軌跡の終点（これは $\partial C_1/\partial r_1$ や $\partial C_2/\partial r_2$ の零点と一致するが）を表わす。また⊗印は根軌跡の始点と終点がひじょうに接近していることを意味する。

Fig. 4 と Fig. 6 を対比すると、Fig. 4-(1)~(6) に示されるように、 K_2 を順次大きくすると、零点の位置と根軌跡のパターンが Fig. 6 にしだいに似かよってくるのがわかる。すなわち、 K_2 がしだいに大きくなるにつれて、系は干渉 (E_{22}) のないものにだんだん近づくことがわかる。Fig. 5 と Fig. 7 に対しても、 K_1 に関して同様のことがいえる。

5. 多チャンネルへの拡張

D.S. Mitchell and C.R. Webb²⁾ は Fig. 8 に示すような2チャンネルの制御系において、

なる4つの順路を考え、両チャンネルが干渉のないおのの独立なチャンネルであるための条件として、 $S_1=0$ 、 $S_2=0$ の条件より、

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= \frac{E_{11}}{F_{22}} (F_{11}F_{22} - F_{12}F_{21}) \\ P_2 &= \frac{E_{22}}{F_{11}} (F_{11}F_{22} - F_{12}F_{21}) \end{aligned} \right\} \quad \dots (15)$$

を導いている。この (15) 式は前述の (9)、(11) 式の $W_{11}W_{22}$ とまったく同じ関係式である。(15) 式はつぎのようにマトリックスの関係を用いて、

$$\begin{bmatrix} F_{11}F_{12} \\ F_{21}F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{11}E_{12} \\ E_{21}E_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11}F_{11} + E_{21}F_{12} & E_{12}F_{11} + E_{22}F_{12} \\ E_{11}F_{21} + E_{21}F_{22} & E_{12}F_{21} + E_{22}F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1S_1 \\ S_2P_2 \end{bmatrix} \quad \dots (16)$$

より $S_1=0$ 、 $S_2=0$ の条件よりも求められる。

上記のことから以下のことが推論される。すなわち

Fig. 9 に示すような相互干渉のある多チャネル線形制御系 (図には 3 チャネルの場合を示した) において, $E_{11}F_{11}, E_{22}F_{22}, \dots, E_{nn}F_{nn}$ のゲインが大きい場合には, 各チャネルを近似的に独立した伝達関数 $W_{11}, W_{22}, \dots, W_{nn}$ として考えることができ, その場合の $W_{11}, W_{22}, \dots, W_{nn}$ は,

$$\begin{bmatrix} F_{11}F_{12}\cdots F_{1n} \\ F_{21}F_{22}\cdots F_{2n} \\ \vdots \\ F_{n1}F_{n2}\cdots F_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{11}E_{12}\cdots E_{1n} \\ E_{21}E_{22}\cdots E_{2n} \\ \vdots \\ E_{n1}E_{n2}\cdots E_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1S_{12}\cdots S_{1n} \\ S_{21}P_2\cdots S_{2n} \\ \vdots \\ S_{n1}S_{n2}\cdots P_n \end{bmatrix} \quad \dots\dots (17)$$

の関係式において, $S_{12}, S_{22}, \dots, S_{nn-1}$ をそれぞれ 0 と置いた条件から求められる $P_1, P_2, \dots, P_n$ に等しいことが推論される. 例として 3 チャネルの系に対する W_{11}, W_{22}, W_{33} を求めればつぎのようになる.

$$\left. \begin{aligned} W_{11} &= \frac{E_{11} \cdot F_{123}}{F_{22}F_{33} - F_{23}F_{32}} \\ W_{22} &= \frac{E_{22} \cdot F_{123}}{F_{11}F_{33} - F_{13}F_{31}} \\ W_{33} &= \frac{E_{33} \cdot F_{123}}{F_{11}F_{22} - F_{12}F_{21}} \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} \text{ただし } F_{123} &= F_{11}F_{22}F_{33} - F_{11}F_{23}F_{32} - F_{22}F_{13}F_{31} \\ &\quad - F_{33}F_{12}F_{21} + F_{12}F_{23}F_{31} + F_{13}F_{21}F_{32} \end{aligned} \quad \dots\dots (18)$$

一般に多チャネル系においては, チャネル数が増すに従って, $E_{11}, E_{22}, \dots$ などの操作部に適した特性を求めることに手数を要するが, 以上に述べたような手法を用いて, 各チャネルごとに独立した伝達関数 $W_{11}, W_{22}, \dots$ を考えて適当な $E_{11}, E_{22}, \dots$ を定め, 各チャネルべつべつに根軌跡の手法などにより, 安定域内における適当な $K_1, K_2, \dots$ の値を見通し良くまず知り, しかる後に厳密な数学モデルに対し, デジタルまたはアナログ計算機によってパラメトリックスタディを行えば, 多チャネル制御系のシンセシスまたはアナ

(1) $K_1 = 0.07, \text{ const.}$

(2) $K_1 = 0.7, \text{ const.}$

(3) $K_1 = 7, \text{ const.}$

(4) $K_1 = 20, \text{ const.}$

(5) $K_1 = 70, \text{ const.}$

(6) $K_1 = 700, \text{ const.}$

Fig. 5 Root loci of $\partial C_2 / \partial r_2$, when K_1 is fixed at a constant value and K_2 is increased from zero to infinity

Fig. 6 Root loci of approximated $\partial C_1/\partial r_1$ (eq. 12') Fig. 7 Root loci of approximated $\partial C_2/\partial r_2$ (eq. 13')

Fig. 8 General multi-loop control system

リンスが能率良く行なえる。

6. む す び

相互干渉のある2チャンネル線形制御系を単純化して

Fig. 9 Typical block diagram of three channels interacting linear control system

示した Fig. 1 の制御系において、各チャンネルのメインループ制御装置 $E_{11}F_{11}$, $E_{22}F_{22}$ のゲインがともに1に比して大きい場合（通常の制御系においては、ほとんどの場合がこれに該当する）には、各チャンネルに対し、Fig. 2-(1) に示すような独立した系として取り扱えることを示した。なおこのような考え方の、多チャンネルにおける関係式についても言及した。

終わりに、本論文発表に当たり種々御高配を賜わった、当社技術管理部岡村健二部長ならびに藤野勉部長付に感謝申し上げるとともに、種々御鞭撻いただいた当社下関造船所大津義徳顧問にお礼申し上げる。

参 考 文 献

- 1) E. Kinnen, D. S. Liu : Linear Multivariable Control System Design with Root Loci. AIEE Transaction, Applications and Industry, 41/44 (1962-5)
- 2) D. S. Mitchell and C. R. Webb : A Study of Interaction in a Multi-loop Control System, IFAC, Vol. 1, 142/152 (1960)