最適制御における特殊な評価関数

須 賀 一 郎

東京工業大学大学院 東京都目黒区大岡山 2-12-1

(昭和 43 年 3 月 21 日受付)

Some Particular Classes of Performance Indices in Optimal Control

Ichiro SUGA

(Tokyo Institute of Technology, Meguro-ku, Tokyo)

(Received March 21, 1968)

There exist some particular classes of integral type performance indices in optimal control, which have been very little discussed. They, however, would be considerably important and helpful to design optimal control systems.

This paper deals with two classes of such performance indices. One is the “uncontrollable performance index” whose value becomes constant regardless of the control function. A sufficient condition of the functional form of its integrand for various terminal conditions is discussed with some examples.

The other is the “degenerate performance index” whose value becomes minimal for some initial conditions when the control function is always zero during the control interval. A sufficient condition for this case and some examples are also presented.

Furthermore, an illustrative example shows that these two concepts are effective for analyzing the singular problems in optimal control by the use of quite different manner from ordinary methods.

1. ま え が き

通常の最適制御問題とは、プラント（制御対象）と評価関数が前もって与えられて、いかに最適制御関数（最適操作量）を求めるかという“解法”問題を意味し、現在まで非常に多くの成果が見られるが同時に批判もまた多く聞かれる。

これら批判の対象のひとつに評価関数の選び方がある。たとえば、Oldenburger¹⁾は、近代制御理論が基本的に仮定している single index of performance に対して、infinitely many indexes of performance の必要性を強調している。たしかに、このことは工学的には望ましいことではあるが、とうぜんその解法は極端にむづかしくなる。さらにまた、単一の評価関数の場合においてもその評価関数に多少人工的な項を付加することによって最適解を求めやすくなる例もある。

そこで、従来からの“解法”問題が計算機などの発達によって解決あるいは整理されるにつれて、どんな評価関数を選ぶべきか、換言すれば（解法の難易を考

慮に入れつつ）、いかなる意味での最適制御系を計画あるいは設計すべきかという“提起”問題の重要性が増してこよう。こうした問題のもっとも基礎的な段階として考えられるものが、ある種の評価関数の持つ特殊な性質に関する考察である。

本稿では、評価関数の形としてもっとも一般的と思われる積分形式 (Lagrange 問題) をとりあげ、種々の制御終端条件を想定して、いわゆる非可制御評価関数²⁾の満たすべきひとつの十分条件を与える。つぎに、制御関数を恒等的にゼロとしたときに最小となるような“degenerate 評価関数”を紹介し、これに対する十分条件を述べさらに状態の可観測性との関連、あるいは singular 問題との関連などについて考察する。なお、本文に関係する補足的なことがらを本稿の最後に“付記”としてまとめておく。

2. 準 備

通常の最適制御問題は、微分方程式表示のプラント $(P)'$ と積分形評価関数 (I) が以下のように与えられて、 (I) を最小にするように制御関数 $u(t)$ （前もっ

て工学的制限の課せられている場合もある) を決定することである。

$$(P)' \quad \dot{x} = f(x, u, t)$$

ただし, x は n 次元状態ベクトル, u は $r (\leq n)$ 次元制御関数ベクトル, t は時間, $f(\cdot)$ は n 次元ベクトル値関数。

$$(I) \quad J(x(t_0), t_0, u) = \int_{t_0}^{t_f} L(x, u, t) dt$$

ただし, $L(\cdot)$ はスカラー値関数 (以下, 損失関数と呼ぶ), t_0 は制御開始時刻, t_f は制御終端時刻。

なお, 制御過程の終端条件としては, 通常つぎのような場合が考えられる。

(T1) t_f が指定され $x(t_f)$ は自由。

(T2) $x(t_f)$ が, あるスカラー値関数 $\Omega(\cdot)$ を用いて $\Omega(x(t_f)) = 0$ の形で指定され t_f は自由。

(たとえば $x_1(t) = \dots = x_n(t_f) = 0^{*1}$ なる条件は $\Omega(x(t_f)) \equiv \sum_{i=1}^n x_i^2(t_f) = 0$ と表わせる)

(T3) t_f が指定され $x(t_f)$ もまた $\Omega(x(t_f)) = 0$ で指定される。

さて, 損失関数 $L(\cdot)$ の関数形は最適制御系の設計段階において決められるべきものであるが, 関数形の選び方によっては最適制御関数の決定ということが無意味になる場合が生じる。これがつぎに述べる非可制御評価 (損失) 関数の概念である。

3. 非可制御評価関数

最初に, つぎの定義をおく。

【定義 1】まず, 任意に与えられる初期値 $x(t_0)$ に対するプラント (P)' の軌道を $x_u(t)$ とする。適当な終端条件のもとに, 連続なスカラー値関数 $\Psi(x, u, t)$ を被積分関数とする評価関数,

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \Psi(x_u(t), u(t), t) dt$$

の値が, 制御関数 $u(t)$ の選択に依存しないで一定値をとるとき, この J を非可制御評価関数, $\Psi(\cdot)$ を非可制御損失関数と呼ぶ ($t_f = \infty$ のときは $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_u(t)\| = 0$ なる条件を満たす $u(t)$ のみ考えることにする) [1]*2。

(注) 以下では, 非可制御評価関数を u.p.i. (uncontrollable performance index), 非可制御損失関数を u.l.f. (uncontrollable loss function) と略記する。

これ以降, われわれはつぎのような線形のプラント (P) のみ考えることにする。[2]

$$(P) \quad \dot{x} = A(t)x + B(t)u$$

*1 ベクトル x の成分を x_i で表わす。

*2 { } 内の番号は “付記” の順番を表わす。

ただし, $A(t)$ は $n \times n$ の実行列, $B(t)$ は $n \times r$ の実行列。なお, u になんらかの制限があっても以下の定理に影響しないので, これについてはくわしく規定しない。[3]

さて, プラント (P) と制御過程の終端条件が与えられると, u.l.f. あるいは u.p.i. に関するつぎのような十分条件が求まる。

【定理 1】変数 x, t に関して連続な第 1 階導関数を持ち, さらにつぎの (i), (ii) の条件を満たすようなスカラー値関数 $\Gamma(x, t)$ を考えよう。

$$(i) \quad B'(t) \frac{\partial \Gamma}{\partial x} \equiv 0^{*3} \quad (1)$$

(ii-1) 終端条件が (T1) で, かつ $t_f < \infty$ の場合は任意の $x(t_f)$ に対して,

$$\Gamma(x(t_f), t_f) = C^{*4} \quad (2)$$

終端条件が (T1) で, かつ $t_f = \infty$ の場合は,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Gamma(x(t), t) = C \quad (3)$$

(ii-2) 終端条件が (T2) の場合は, 任意の t_f , および $\Omega(x(t_f)) = 0$ を満たす $x(t_f)$ に対して

$$\Gamma(x(t_f), t_f) = C \quad (4)$$

(ii-3) 終端条件が (T3) の場合には, (ii-1) か (ii-2) の少なくとも一方が成立する。

このとき, 関数形,

$$\Psi(x, t) = \left\langle \frac{\partial \Gamma}{\partial x}, A(t)x \right\rangle + \frac{\partial \Gamma}{\partial t} \quad (5)$$

は u.l.f. である。[4]

(注) 終端条件 (T1) かつ $t_f = \infty$ の場合には, $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0$ の成立をあらかじめ仮定している。すなわち, まったく安定にプラントが制御されることを前提としている (付記 [1] 参照)。

【証明】条件 (i) に注意して $\Psi(\cdot)$ を積分する。

$$\begin{aligned} J &= \int_{t_0}^{t_f} \Psi(x, t) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \left\langle \frac{\partial \Gamma}{\partial x}, A(t)x \right\rangle + \frac{\partial \Gamma}{\partial t} \right\} dt \\ &= \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \left\langle \frac{\partial \Gamma}{\partial x}, A(t)x + B(t)u \right\rangle + \frac{\partial \Gamma}{\partial t} \right\} dt \\ &= \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \left\langle \frac{\partial \Gamma}{\partial x}, \frac{dx}{dt} \right\rangle + \frac{\partial \Gamma}{\partial t} \right\} dt = \int_{t_0}^{t_f} \frac{d\Gamma}{dt} dt \\ &= \Gamma(x(t_f), t_f) - \Gamma(x(t_0), t_0) \end{aligned}$$

この第 2 項 $\Gamma(x(t_0), t_0)$ は前もって決まる一定値である。また第 1 項は, (T1), (T2), (T3) のすべの場合を通じて, 条件 (ii-1), (ii-2), (ii-3) から

*3 (') は転置, $\partial \Gamma / \partial x$ は x に関する Γ のこう配 (縦) ベクトル, $\equiv$ は変数 x, t などに依存しない恒等的等号を表わす。

*4 大文字 C は “定数” を表わす。

$u(t)$ の選び方に依存しない一定値となる。したがって J は定数であり、(5) 式は u.l.f. となる。(証明終)

実際の最適制御問題では、このような u.l.f. がそのまま単独で損失関数として採用されていることは滅多にない。これがいままで u.l.f. の考慮されてこなかった理由である。しかしながら、こうした u.l.f. が、そうでない損失関数（すなわち、最適制御関数の決定ということが十分意味を持つような損失関数）に加法的に付随することによって、見かけ上さまざまな異なった損失関数が出現する。したがって、実際に損失関数を与えられて最適制御問題をとく立場の人は、あらかじめその中から u.l.f. である項を（もしあれば）除いておき、そのあとで最適解の計算を行なうことが賢明であろう（以下では、同一の最適解を与えるのに、見かけ上は異なるような損失関数群を、それぞれ等価であるということにする）。

つぎに例を示す。ただし、終端条件が (T1) の場合は文献²⁾ でいくつかあげておいたので、ここではそれ以外、とくに (T2) の場合について考える。

【例 1】次式で表わされるプラントを考えよう。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, |u| \leq 1 \quad (6)$$

さらに制御終端条件は (T2) を想定し、 $\Omega(x(t_f)) = 0$ としてつぎの 3 つの場合を考える。

$$x_1(t_f) = 0 \quad (7_1)$$

$$x_2(t_f) = 0 \quad (7_2)$$

$$x_1^2(t_f) + x_2^2(t_f) = 0 \quad (7_3)$$

$$(x_1(t_f) = x_2(t_f) = 0)$$

いま、関数 $\Gamma(\alpha, \beta)$ (α, β はスカラ) が連続な第 1 階導関数を持ち、かつ $\Gamma(0, \beta) = C$ (β は任意) の条件を満たすものとする。このとき関数 $\Gamma(x_1, t)$ を用いて作られる、

$$\Psi(x_1, x_2, t) = x_2 \frac{\partial \Gamma}{\partial x_1} + \frac{\partial \Gamma}{\partial t} \quad (8)$$

は、終端条件 (7₁), (7₃) の場合に対して u.l.f. である。実際、 $\Gamma(x_1, t)$ は x_2 を変数として含まないので定理 1 の条件 (i) を満たす。また、 $x_1(t_f) = 0$ が与えられており、さらに $\Gamma(0, t) = C$ (t は任意) であるから条件 (ii-2) を満たす。そこで、いま、

$$J_1 = \int_{t_0}^{t_f} x_1^2 dt \quad (9)$$

を最小にする最適制御問題を考え、この解を $u_1^*(t)$ とすると、これはつぎのような損失関数に対してもやはり最適解となっている。すなわち、以下の損失関数はすべて等価である。

$$L_1 = x_1^2 + \alpha x_1^m x_2$$

(α は任意数, m は任意非負整数)

$$L_2 = x_1^2 + x_1 + t x_2$$

$$L_3 = x_1^2 + x_1 e^{t x_1} + t x_2 e^{t x_1}$$

$$L_4 = -t x_1 x_2$$

以上は、 $\Gamma(\cdot)$ としてそれぞれ、 $\alpha x_1^{m+1}/(m+1)$, $t x_1$, $e^{t x_1}$, $-t x_1^2$ を選んだもので、そのほかにも $\Gamma(\cdot)$ の選び方によってさまざまな形の等価な損失関数が出現する。ところで、終端条件 (7₂) の場合には、この $\Gamma(x_1, t)$ は定理 1 の条件 (i) と条件 (ii-2) を両立させない。したがってこの場合には、(8) 式の関数形は u.l.f. にはならないのである。

さて、この定理 1 は十分条件であるから、一般の評価関数の中に存在しうる u.l.f. が (5) 式ですべて表わされるわけではない。そこで u.l.f. に関する必要条件が望まれるが、いまのところ、実用的な結果は得られていない。{5}

4. degenerate 評価関数

3. の u.p.i. の概念は初期値の選択に無関係であったが、本章では初期値に関連して生じる特殊な評価関数について考察する。

実際、ある特定の初期値が与えられると、対応する最適制御関数が恒等的にゼロとなるような、すなわち、プラントを unforced 系として放置したときに最小になるような評価関数の存在することが Kalman³⁾ によって最初に指摘された。また、W. M. Wonham と C. D. Johnson⁴⁾ が singular 問題を議論したさいにこの事実が implicit に用いられている。ここでは、これらの結果を統一して、一般化された形の定理を与える。最初につぎの定義をおく。

【定義 2】まず、ある初期値 $x^0 (= x(t_0))$ に対するプラント (P)' の軌道を $x_u(t; x^0)$ として、連続なスカラ値関数 $A(x, u, t)$ を被積分関数とする評価関数

$$J = \int_{t_0}^{t_f} A(x_u(t; x^0), u(t), t) dt$$

を最小にする解 $u(t)$ が恒等的にゼロとして求まるとき、この J を初期値 x^0 に対する degenerate 評価関数、 $A(\cdot)$ を初期値 x^0 に対する degenerate 損失関数と呼ぶ。

(注 1) 以下では、degenerate 評価関数を d.p.i. (degenerate performance index), degenerate 損失関数を d.l.f. (degenerate loss function) と略記する。

(注 2) “degenerate” という語の由来は、文献³⁾ の p. 55 にある語句 “nondegeneracy of the statement of the optimal control problem” による。

とくにプラントとして線形系 (P) を考えるとき、つぎの十分条件をうる。なお、必要条件に関しては現在

のところまったく未解決である。

【定理 2】 変数 x, t に関して連続な第 1 階導関数を持ち、さらにつぎの (i), (ii) の条件を満たすようなスカラー値関数 $A(x, t)$ を考えよう。

(i) 任意の x, t に対して

$$A(x, t) \geq 0 \quad (10)$$

$$(ii) \quad \left\langle \frac{\partial A}{\partial x}, A(t)x \right\rangle + \frac{\partial A}{\partial t} \equiv \mu A \quad (11)$$

ただし、 μ : 適当な実数

このとき、条件 $A(x(t_0), t_0) = 0$ を満たすような初期値 $x(t_0)$ に対して関数 $A(x, t)$ は d.l.f. である。

【証明】 $A(\cdot)$ を時間で微分する。

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= \left\langle \frac{\partial A}{\partial x}, \frac{dx}{dt} \right\rangle + \frac{\partial A}{\partial t} \\ &= \left\langle \frac{\partial A}{\partial x}, A(t)x + B(t)u \right\rangle + \frac{\partial A}{\partial t} \end{aligned}$$

ここで $u(t) \equiv 0$ とすると、条件(ii)より

$$\dot{A} = \mu A$$

なる関係が求まる。すなわち、

$$A(x_0(t), t) = e^{\mu(t-t_0)} A(x(t_0), t_0)$$

ただし、 $x_0(t)$ は $\dot{x} = A(t)x$ の初期値 $x(t_0)$ に対する解軌道を表わす。

ところが $A(x(t_0), t_0) = 0$ だから、任意の $t \geq t_0$ に対して $A(x_0(t), t) \equiv 0$ となる。したがって

$$J = \int_{t_0}^{t_f} A(x_0(t), t) dt = 0$$

いっぽう、条件(i)より $A(\cdot)$ は非負定であるから、けっきょく $u(t) \equiv 0$ が評価関数 J を最小にする。すなわち、 $A(x, t)$ は d.l.f. である。 (証明終)

したがってつぎのことがいえる。

【系】 定理 2 のような $A(x, t)$ を損失関数として、さらに適当な終端条件の課せられた最適制御問題を考える。このときもし、 $u(t) \equiv 0$ が admissible control であり、さらに初期値 $x(t_0)$ が条件 $A(x(t_0), t_0) = 0$ を満たしており、かつこの $x(t_0)$ に対する $\dot{x} = A(t)x$ の解軌道が与えられた終端条件を満足すれば、 $u(t) \equiv 0$ は最適制御関数となる。

実際の最適制御問題においては、このような d.p.i. は、3. の u.p.i. に比べてより頻繁に現われる。つぎにやや一般的な例を示す。

【例 2】 プラント (P) のより制限されたものとして、つぎのような定係数系を考える。

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (12)$$

いま、 $A'h = \lambda h$ (λ : 実数) なる関係を満たす n 次元実ベクトル h が存在したとする。このとき、条件 $\langle h, x(t_0) \rangle = 0$ を満たすような初期値 $x(t_0)$ に対して 2 次形式 $x'h'h'x$ は d.l.f. である。実際、 $A(x, t) \equiv x'h'h'x$

とおけば、定理 2 の条件 (i) はとうぜん満足される。また、

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial A}{\partial x}, Ax \right\rangle &= 2 \langle h'h'x, Ax \rangle = 2 \langle A'h'h'x, x \rangle \\ &= 2 \lambda \langle h'h'x, x \rangle = 2 \lambda A \end{aligned}$$

が成立するから、条件(ii)の(11)式が満たされ、さらに $A(x(t_0)) = \langle h, x(t_0) \rangle^2 = 0$ である。

さて、よく知られた行列論の定理より、 A の実固有値を $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ ($p \leq n$) とすれば (重根を許す)、 $Ah = \lambda_i h$ ($i=1, \dots, p$) の関係を満たすようなベクトル $h_1, \dots, h_m$ ($p \leq m \leq n$) が存在する。そこで、 m 個の条件 $\langle h_i, x(t_0) \rangle = 0$ ($i=1, \dots, m$) を同時に満たすような初期値 $x(t_0)$ に対して $\sum_{i=1}^m x'h_i h_i' x$ が d.l.f. となる (d.l.f. の和はやはり d.l.f. であるから)。なお、 $\langle h_i, x \rangle = 0$ ($i=1, \dots, m$) で表わされる超平面群のことを invariant hyperplanes と呼ぶ⁵⁾。そこでいま、 $n \times m$ の実行列 H を、

$$HH' = \sum_{i=1}^m h_i h_i' \quad \text{あるいは} \quad H = [h_1, \dots, h_m]$$

で定義して、上のことをいいかえる。すなわち、条件 $\|H'x(t_0)\| = 0$ を満たすような初期値 $x(t_0)$ に対して 2 次形式 $x'HH'x$ は d.l.f. である。

ここで、かりに $y = H'x$ をプラント (12) の出力と見なすと、任意の $t \geq t_0$ に対して $\|y(t)\| = \|H'x(t)\| = 0$ であるから、あきらかにこの系は状態の可観測性を持っていない。Kalman³⁾ は、以上とは逆に、可観測ではないような系に対して 2 次形式 d.l.f. の存在しうることを指摘した。

ところで、定理 2 によれば d.l.f. は 2 次形式とはかぎらず、また (t を explicit に含まないという意味で) stationary ともかぎらない。そこでこの点に関して、より具体的な例をあげる。

【例 3】 次式で表わされるプラントを考えよう。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\gamma & -\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \bar{u}_1 \quad (13)$$

ただし $\gamma, \delta > 0$ 、かつ $\delta^2 \geq 4\gamma$ とする。したがって、2 次式 $s^2 + \delta s + \gamma = 0$ の根を $-\alpha, -\beta$ とすると $\alpha, \beta > 0$ であり、unforced 系は (非振動的に) ゼロに収束する。このことは次章で考慮される。

いま、関数 $f(\zeta, \eta)$ は非負定で、かつ変数 ζ, η に関して連続な第一階導関数を持つとする。このとき、任意の実数 μ に対して、関数形、

$$A(x_1, x_2, t) = e^{\mu t} f((x_2 + \alpha x_1) e^{\beta t}, (x_2 + \beta x_1) e^{\alpha t})$$

は、条件 $A(x_1(t_0), x_2(t_0), t_0) = 0$ を満たすような初期値 $x_1(t_0), x_2(t_0)$ に対して d.l.f. となっている。実際、 $A(\cdot)$ は非負定であり、かつ(11)式と(13)式を用いて得られる偏微分方程式の一般解であることが直接的に

確かめられる。したがって定理 2 より、この $A(\cdot)$ は d.l.f. である。そこで、つぎのような損失関数は、適当な初期値のもとにすべて d.l.f. となる。

$$\begin{aligned} L_1 &= (x_2 + \alpha x_1)^2, \quad L_2 = (x_2 + \beta x_1)^2 \\ L_3 &= (x_2 + \alpha x_1)^2 (x_2 + \beta x_1)^2 \\ L_4 &= \{(e^{-\alpha t} + e^{-\beta t})x_2 + (\alpha e^{-\alpha t} + \beta e^{-\beta t})x_1\}^2 \end{aligned}$$

実際、 L_1 の場合は $f(\zeta, \eta) \equiv \zeta^2$, $\mu = -2\beta$, L_2 は $f(\zeta, \eta) \equiv \eta^2$, $\mu = -2\alpha$, L_3 は $f(\zeta, \eta) \equiv \zeta^2 \eta^2$, $\mu = -2(\alpha + \beta)$, L_4 は $f(\zeta, \eta) \equiv (\zeta + \eta)^2$, $\mu = -2(\alpha + \beta)$ のようにそれぞれ選ばれている。ここで、 L_1, L_2 は例 2 で述べた d.l.f. の特別な場合であり、 $H = (\alpha, 1)'$ あるいは $H = (\beta, 1)'$ となっている。

5. singular 問題との関連

最適制御における singular 問題は、従来より多くの研究者によって検討されている。いっぽう、前章までで導入した u.p.i. と d.p.i. の概念を用いると、従来の解析法とはまったく別のアプローチによって、この問題を議論することが可能である。以下のことは、より一般的な場合にまで拡張可能であるが⁶⁾、ここでは簡単のため例として 2 次系のプラントをとりあげ、singular case の存在性について検討する。

まず、プラントは例 1 の (6) 式として、最小にすべき評価関数が、

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \left(x_1^2 + \frac{x_2^2}{\alpha^2} \right) dt, \quad (\alpha: \text{任意正数}) \quad (14)$$

かつ、終端条件が $x_1(t_f) = x_2(t_f) = 0$ で与えられるような最適制御問題を考えよう。

さて、3. の定理 1 より $\Psi = 2x_1x_2/\alpha$ がこのプラントに対応する u.l.f. であることは容易に知れる。したがって (14) 式中の損失関数と、

$$\left(x_1^2 + \frac{x_2^2}{\alpha^2} \right) + 2 \frac{x_1x_2}{\alpha} = \frac{1}{\alpha^2} (\alpha x_1 + x_2)^2 \quad (15)$$

とは、たがいに等価である。すなわち、最初の最適制御問題の解を求めるかわりに、(14) 式中の損失関数を (15) 式でおきかえて生じる新たな最適制御問題の解を求めても良いわけである (両者の最適解はまったく一致する)。そこで、(6) 式中の u_1 を

$$u_1 = -\{rx_1 + (\delta - 1)x_2\} + \bar{u}_1$$

と選ぶと、このプラントの方程式は (13) 式となり、制御関数についての拘束条件は、 $|\bar{u}_1 - \{rx_1 + (\delta - 1)x_2\}| \leq 1$ となる (ただし、 $r = \alpha\beta$, $\delta = \alpha + \beta$ であり、 β は任意正数とする)。4. で述べたように、(13) 式のプラントに対して、(15) 式の損失関数は条件 $\alpha x_1(t_0) + x_2(t_0) = 0$ を満たすような初期値 $x_1(t_0), x_2(t_0)$ に対する d.l.f. となっている。さらに、(13) 式の unforced

系の解軌道は、与えられた終端条件を満たし、かつ $\bar{u}_1(t) \equiv 0$ は原点の近傍で admissible control となり得るから、4. の系より $\bar{u}_1^*(t) \equiv 0$ が最適解であり、最初の最適制御問題に戻って考えると、最適解 $u_1^*(t)$ は次式で表わされる。

$$u_1^*(t) = -\{rx_1 + (\delta - 1)x_2\} \quad (16)$$

最大原理によれば、(14) 式の評価関数形に対する最適解は一見 bang-bang 形になると思われるが、実際の解は (16) 式のような線形フィードバック解となるのであり、これがいわゆる singular case である。ただしこの最適解は初期値が、

$$\alpha x_1(t_0) + x_2(t_0) = 0 \quad (17)$$

$$\text{かつ, } |(\alpha - 1)x_2(t_0)| \leq 1 \quad (18)$$

の条件を満たすときのみ妥当であり {6}、これ以外の初期値に対しては、最大原理が bang-bang 形の解を提供する。この解は、状態空間中のプラントの軌道が (17), (18) 式で表わされる部分集合に到達するまで有効であり、以後の最適解は (16) 式となり、軌道は invariant hyperplane (この場合は直線) 上に乗ったまま原点に至るわけである。

さて、(6) 式のプラントにかぎらず、多くの 2 次系プラントは適当な線形フィードバックによって (13) 式の形に直せる。したがって (14) 式のような評価関数の与えられた最適制御問題に対しては、原点の近傍で必ず singular 解を持つことが容易に予想されよう。

なお、この最適制御問題では、その終端条件の性質上 $\alpha = \infty$ とすることは許されない。実際、 $\alpha = \infty$ とすると (13) 式の unforced 系の状態は原点に収束しなくなる。そこで、 x_1^2 の項だけからなる (9) 式のような評価関数に対しては singular 解の存在は保証できない。実際、この場合の最適解は、純慣性系の場合⁷⁾と同様に可算無限回の切り換えを行なう bang-bang 形になることが推察されている⁸⁾。

6. あとがき

最適制御論における評価関数のうちには、従来あまり考慮されることのなかった特殊な性質を持つクラスが存在する。そのひとつは、特定の制御過程終端条件の場合にのみ、文献²⁾で紹介した“非可制御評価関数”であるが、本稿ではこの概念を種々の終端条件の場合にまで拡張した。他のひとつは、ある特定の初期値を与えると、それを最小にする制御関数が恒等的にゼロと求まるような“degenerate 評価関数”であり、本稿ではこれを一般的なスカラ値関数の形で与えて、さらに具体的な例を示した。

これらの概念は、最適制御系の評価関数を決定する

立場の人、および最適制御問題を与えられてこれをとく立場の人に対して、補佐的な、しかし重要な情報を提供するものといえよう。たとえば、これら 2 つの概念を用いることにより、従来の方法とは別の（ある意味で、逆の）アプローチによって singular 問題を解析することが可能となってくる。

なお、ここで導入した特殊な評価関数の概念は離散系にも拡張されるべきであろうが、そのための示唆となる考察が文献⁹⁾の p. 64~71 にある。

4. のように、あらかじめ最適制御関数の形を想定しておき、それに対応する評価関数形を吟味する問題は、一般に“最適制御における逆問題”と呼ばれるものであり、最適制御系の計画段階において相当に重要な意味を持つことになる。

おわりに、つねひごろ御指導、御鞭撻をたまわる東京工業大学伊沢計介教授に心から感謝の意を表します。また、同学森永智昭助教授はじめ、伊沢研究室、森永研究室の諸先輩、同僚のかたがたの日ごろの御好意に対してお礼申しあげます。

参 考 文 献

- 1) R. Oldenburger: "Optimal Control", Holt, Rinehart and Winston Co., New York (1966)
- 2) 須賀: “最適制御における逆問題”, 計測と制御, 6-8, p. 549/557 (1967)
- 3) R. E. Kalman: "When is a Linear Control System Optimal?", Trans. ASME, Vol. 86 D, p. 51~60 (1964)
- 4) W. M. Wonham and C. D. Johnson: "Optimal Bang-Bang Control with Quadratic Performance Index", Trans. ASME, Vol. 86 D, p. 107/115 (1964)
- 5) C. D. Johnson: "Invariant Hyperplanes for Linear Dynamical Systems", IEEE Trans., Vol. AC 11, p. 113~116 (1966)
- 6) 須賀, “ある最適制御問題における特異解の存在条件”: 第 7 回計測自動制御学会学術講演会予稿集, p. 17/20 (1968)
- 7) A. T. Fuller: "Relay Control Systems Optimized for Various Performance Criteria", Proceedings, 1st Congress of IFAC, Butterworths, London, p. 510/519 (1961)
- 8) 浅野: “最適制御におけるある singular 解について”, 昭和 41 年度東京工業大学卒業論文 (1967)
- 9) 辻 節三: “最適制御概論” (1967-養賢堂)
- 10) L. I. Rozonoér: "A Variational Approach to the Problem of Invariance II", Automation and Remote Control, 24-7, p. 793~800 (1963)

付 記

{1} より正確な数学的記述はつぎのようにすればよい。まず区間 $[t_0, t_f]$ 上で定義された r 次元ベクトル値関数 $u(t) = (u_1(t), \dots, u_r(t))'$ を考え、各 $u_i(t)$ ($i=1, \dots, r$) が区間 $[t_0, t_f]$ で可測であるとする。こ

のような $u(t)$ の全体を関数集合 $M_r(t_0, t_f)$ で表わすと、本文は「…の値が、 $\forall u(t) \in M_r(t_0, t_f)$ に対して定数のとき、……」となる。また、 $t_f = \infty$ のときは、 $M_r(t_0, \infty)$ の部分集合、

$$S_r(t_0, \infty) = \{u(t) | u(t) \in M_r(t_0, \infty), \lim_{t \rightarrow \infty} \|x_u(t)\| = 0; \forall x(t_0) \in R^n\}$$

を考えて、本文は「……の値が、 $\forall u(t) \in S_r(t_0, \infty)$ に対して定数のとき、……」となる（ただし、 $S_r(t_0, \infty) \neq \emptyset$ を仮定する）。ここで、 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_u(t)\| = 0$ より、 $x(t)$ の n 個の成分すべてがゼロに収束するものと仮定していることに注意しよう。さらにまた、プラント (P) に状態の可制御性を仮定していないことにも注意したい。したがって、その軌道がまったく u に依存せず、初期値によってのみ決められるような状態変数 $x_i(t)$ が存在するかもしれない。しかしその場合にも、 $\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = 0$ が仮定されているわけである。この仮定は、評価関数の値が非有界になる場合を避けるためにおかれている。

{2} 定理 1 および定理 2 は、つぎのような非線形プラントに対しても容易に拡張できる。

$$\dot{x} = f(x, t) + B(x, t)u$$

ここで、 $f(x, t)$ は n 次元ベクトル値関数、 $B(x, t)$ は $n \times r$ の行列値関数。

{3} 前もって制御関数に制限のある場合には、いわゆる admissible control $u(t)$ は {2} で述べた $M_r(t_0, t_f)$ の中のある部分集合 $U_r(t_0, t_f)$ として規定される。たとえば、

$$U_r(t_0, t_f) = \{u(t) | u(t) \in M_r(t_0, t_f), |u_i(t)| \leq 1 (i=1, \dots, r); \forall t \in (t_0, t_f)\}$$

したがって、定義 1 中の語句を「…の値が、 $\forall u(t) \in U_r(t_0, t_f)$ に対して定数のとき、…($t_f = \infty$ のときは、 $\forall u(t) \in U_r(t_0, \infty) \cap S_r(t_0, \infty)$ に対して定数のとき)」と書きなおすこともできる。しかし、厳密なわりには明解な結果がでてこないで、本稿ではこれを採用しない。

{4} 文献²⁾では、最大原理を用いたため $\Gamma(\cdot)$ に連続な第 2 階導関数の存在性を仮定したが、実は本定理のように弱められる。さらにまた、条件 (ii-1) 中の (2) 式、(3) 式はそれぞれ次式と交換できる。

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial x}(x(t_f), t_f) = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial \Gamma}{\partial x}(x(t), t) = 0$$

実際、スカラー変数スカラー値関数 $\rho(r)$ を考えると、 $\rho(r) = C; \forall r \in R^1$ ということは $d\rho/dr = 0; \forall r \in R^1$ と同等であるが、この事実をベクトル変数スカラー値関数に拡張すれば上のことは容易に理解される。

{5} Rozonoér¹⁰⁾ は、本稿の u.p.i. に相当する “Invariance” なる概念を導入し, invariant なはん関数についての必要十分条件を得ている. 当論文では, 制御過程の終端条件の細かな設定がなされておらず, また変分法を用いてかなり一般的な条件を得ているため, 実際問題にあたって実用的とは言えない (この条件から, ただちに invariant なはん関数形を求めることは困難であろう). しかしながら, 本稿の u.p.i. に対する一般的必要条件を求めるため, あるいはより深い考察のためには, この “Invariance” の概念は非常に重要なものと思われる.

{6} (6)式と(16)式とで構成される系に対して,

$$\begin{aligned}\dot{x}_2 &= -(rx_1 + \delta x_2) = -\{\alpha\beta x_1 + (\alpha + \beta)x_2\} \\ &= -\beta(\alpha x_1 + x_2) - \alpha x_2\end{aligned}$$

であり, さらに $\alpha x_1(t) + x_2(t) = 0; \forall t \geq t_0$ であるから, けっきょく $x_2(t) = x_2(t_0)e^{-\alpha(t-t_0)}$.

いっぽう, (6)式中の制御関数の制限より, $\forall t \geq t_0$ に対して,

$$\begin{aligned}|u_1| &= |\gamma x_1(t) + (\delta - 1)x_2(t)| = |(\alpha - 1)x_2(t)| \\ &= |(\alpha - 1)x_2(t_0)e^{-\alpha(t-t_0)}| = |(\alpha - 1)x_2(t_0)| \leq 1\end{aligned}$$

すなわち, (18)式が要求される. (17), (18)式で表わされる状態空間中の部分集合は singular region と呼ばれ, invariant hyperplane 中の部分集合をなす.