w 変換と拡張 w 変換によるサンプル値系の解析

谷 萩 隆 嗣

東京工業大学大学院 東京都目黒区大岡山 2-12-1

(昭和 43 年 3 月 22 日受付)

Analysis of Sampled-Data Systems Using the w -Transform and the Modified w -Transform

Takashi YAHAGI

(Tokyo Institute of Technology, Meguro-ku, Tokyo)

(Received March 22, 1968)

The w -transform method and the modified w -transform method are developed in this paper. The w -transform can be applied to sampled-data systems which have all samplers followed by zero-order hold devices. The w -transform is developed utilizing the change of variable, $w^{-n} = (e^{-nsT} - e^{-(n+1)sT})/s$, where T is the sampling period and s is the Laplace transform variable.

The w -transform is defined as $W[e(t)] = E(w) = \sum_{n=0}^{\infty} e(nT)w^{-n}$.

As the w -transform and the z -transform are the special forms of the Laplace transform, there is no great difference between them. However, the physical meaning of the sampling process using the w -transform method is clearer than that of the z -transform method.

Using the modified w -transform, we can obtain the output response at all times.

An extensive table of $G_p(w)$ and $G(w, \mu)$ is presented in the Appendix.

1. ま え が き

サンプル値系の解析方法は、大別して時間領域での解析と Laplace 変換領域での解析とに分けられる。前者は状態変数を用いて系の特性をサンプリング区間ごとのベクトル微分方程式で記述して、状態空間法などの方法で解析を行なうので、デジタル計算機などを利用して定量的なはあくをするのに適している¹⁾。後者では主として Laplace 変換の特殊形である z 変換や拡張 z 変換が用いられ、定性的なはあくをするのには前者にはないすぐれた面がある^{2)~4)}。

周知のように、 z 変換では周期的に動作する理想的サンブラによって生じるインパルス列に着目して、 $z = e^{sT}$ において解析している。ただし T はサンプリング周期である。

しかし、実際のサンプル値系ではサンブラの出力はインパルス列ではないことと、サンプリングパルスに含まれている高調波成分を除去するために、サンブラのあとに 0 次ホールド回路をつけて用いるのが普通であることを考慮すれば、サンブラの出力をインパルス

列であると考えて解析する z 変換法よりも、0 次ホールド回路の出力が階段波形であることに着目して、サンブラと 0 次ホールド回路をあわせて 1 種のパルス変調器と考えて、解析を行なうほうが適切であると考えられる。

これらの理由から、 $x^n = e^{-nsT}/s$ において、0 次ホールド回路の出力に着目して解析を行なう x 変換法が発表されている⁵⁾。しかし、0 次ホールド回路の出力に着目するならば、各階段波形を 1 つの変数であらわして解析するほうが有利であると考えられる。これらのことを考慮して、本論文では、 $w^{-n} = (e^{-nsT} - e^{-(n+1)sT})/s$ において解析を行なう w 変換法を提案する。 w 変換を用いれば各サンプリング区間における 0 次ホールド回路の出力応答を求めることができる。さらに拡張 w 変換は任意の時刻での出力応答が求められるように定義されている。

2. w 変換の定義とその性質

解析しようとするサンプル値系が、つぎの条件を満たすものと仮定する。

- 1) サンプラは周期的に動作する。
 - 2) サンプルされた信号は、初期条件が0の線形系に加わる。
 - 3) サンプラのあとには0次ホールド回路がおかれていて、その出力は一連の階段波形である。
- 仮定 1), 2) は z 変換を行なうさいにも必要である。

Fig. 1 に示すサンプリング過程を考える。

Fig. 1 The sampling process

このとき $\overline{e(t)}$ はつぎのようになる。

$$\overline{e(t)} = \sum_{n=0}^{\infty} e(nT) \{u(t-nT) - u(t-n-1T)\} \quad (2.1)$$

ただし、 $u(t)$ = unit step function である。

(2.1) 式を Laplace 変換すれば、

$$\overline{E(s)} = \sum_{n=0}^{\infty} e(nT) \frac{e^{-nsT} - e^{-(n+1)ST}}{s} \quad (2.2)$$

$w^{-n} = (e^{-nsT} - e^{-(n+1)ST})/s$ において w 変換をつぎのように定義する。

$$\begin{aligned} W[e(t)] &= E(w) = \overline{E(s)} \Big|_{w^{-n} = \frac{e^{-nsT} - e^{-(n+1)ST}}{s}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e(nT) w^{-n} \end{aligned} \quad (2.3)$$

n を任意の整数としてつぎの変数を導入する。

$$w_d^{-n} = e^{-nsT} \quad (2.4)$$

w_d はパルス移動演算子である。

m を任意の整数としたとき、つぎの等式が成立する。

$$\left. \begin{aligned} w_d^{-m} w^{-n} &= w^{-(m+n)} \\ w_d^0 &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

(2.5) 式から任意の整数 n に対して w^{-n} が定義される。

【例】 $e(t) = u(t)$ のとき、

$$E(w) = \sum_{n=0}^{\infty} w^{-n} = w^0 \sum_{n=0}^{\infty} w_d^{-n} = \frac{w}{w_d - 1}$$

$e(t) = tu(t)$ のとき、

$$E(w) = \sum_{n=0}^{\infty} nTw^{-n} = w^0 \sum_{n=0}^{\infty} nTw_d^{-n} = \frac{Tw}{(w_d - 1)^2}$$

w 変換と z 変換の関係はつぎのようになる。

(2.3) 式から、

$$E(w) = \sum_{n=0}^{\infty} e(nT) w^{-n} = w^0 \sum_{n=0}^{\infty} e(nT) w_d^{-n} \quad (2.6)$$

z 変換の定義から、

$$E(z) = \sum_{n=0}^{\infty} e(nT) z^{-n} \quad (2.7)$$

(2.6) 式と (2.7) 式から、

$$E(w) = w^0 E(z) \Big|_{z=w_d} \quad (2.8)$$

つぎに w 変換についての主な定理をあけておく。

【定理 1】〔初期値定理〕

$E(w) = W[e(t)]$ のとき $\lim_{w \rightarrow \infty} E(w) \Big|_{w^0=1}$ が存在すれば、

$$\lim_{n \rightarrow 0} e(nT) = \lim_{w \rightarrow \infty} E(w) \Big|_{w^0=1} \quad (2.9)$$

【証明】 w 変換の定義から、

$$E(w) = \sum_{n=0}^{\infty} e(nT) w^{-n} = w^0 \sum_{n=0}^{\infty} e(nT) w_d^{-n}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{w \rightarrow \infty} E(w) \Big|_{w^0=1} &= \lim_{w_d \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} e(nT) w_d^{-n} \\ &= \lim_{n \rightarrow 0} e(nT) \end{aligned}$$

【例】 $e(t) = tu(t)$ のとき $E(w) = \frac{Tw}{(w_d - 1)^2} = \frac{Tw(w^0)^2}{(w - w^0)^2}$ であるから、初期値定理を用いると、

$$\lim_{n \rightarrow 0} e(nT) = \lim_{w \rightarrow \infty} \frac{Tw}{(w - 1)^2} = 0$$

【定理 2】〔最終値定理〕

$E(w) = W[e(t)]$ のとき、最終値が存在すれば、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e(nT) = \lim_{w \rightarrow 1} \frac{w-1}{w} E(w) \Big|_{w^0=1} \quad (2.10)$$

【証明】 w 変換の定義から、

$$W[e(t)] = E(w) = \sum_{n=0}^{\infty} e(nT) w^{-n}$$

$$\begin{aligned} W[e(t+T)] &= \sum_{n=0}^{\infty} e(n+1T) w^{-n} \\ &= w_d E(w) - e(0)w \end{aligned}$$

$$\therefore W[e(t+T) - e(t)] = (w_d - 1)E(w) - e(0)w$$

$w^0 = 1$ とすれば $w_d = w$ となるから、

$$\begin{aligned} W[e(t+T) - e(t)] \Big|_{w^0=1} &= (w - 1)E(w) \Big|_{w^0=1} - e(0)w \\ &= (w - 1)E(w) \Big|_{w^0=1} - e(0)w \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{w \rightarrow 1} W[e(t+T) - e(t)] \Big|_{w^0=1} &= \lim_{w \rightarrow 1} (w - 1)E(w) \Big|_{w^0=1} - e(0) \\ &= \lim_{w \rightarrow 1} (w - 1)E(w) \Big|_{w^0=1} - e(0) \end{aligned} \quad (2.11)$$

いっぽう、

$$\begin{aligned} W[e(t+T) - e(t)] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n [e(\overline{k+1}T) - e(kT)] w^{-k} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n [e(\overline{k+1}T) - e(kT)] w_d^{-k} \end{aligned}$$

最終値が存在すれば、

$$\begin{aligned} \lim_{w \rightarrow 1} W[e(t+T) - e(t)] \Big|_{w^0=1} &= \lim_{w \rightarrow 1} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n [e(\overline{k+1}T) - e(kT)] w^{-k} \Big|_{w^0=1} \\ &= \lim_{w_d \rightarrow 1} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n [e(\overline{k+1}T) - e(kT)] w_d^{-k} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{w_d \rightarrow 1} \sum_{k=0}^n [e(\overline{k+1}T) - e(kT)] w_d^{-k} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} e(n+1T) - e(0) \end{aligned} \quad (2.12)$$

(2.11) 式と (2.12) 式から、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e(nT) = \lim_{w \rightarrow 1} (w-1)E(w)|_{w^0=1}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} e(nT) = \lim_{w \rightarrow 1} \frac{w-1}{w} E(w) \Big|_{w^0=1}$$

【例】 $e(t) = e^{-at}u(t)$ のとき ($a > 0$),

$$E(w) = \frac{w}{w_d - e^{-aT}} = \frac{w w^0}{w - e^{-aT} w^0} \text{ であるから,}$$

最終値定理を用いれば,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e(nT) = \lim_{w \rightarrow 1} \frac{w-1}{w} \frac{w}{w - e^{-aT} w^0} = 0$$

【定理 3】 a を独立変数として,

$$E(w, a) = W[e(t, a)] \text{ とおいたとき,}$$

$$\frac{\partial}{\partial a} E(w, a) = W\left[\frac{\partial}{\partial a} e(t, a)\right] \quad (2.13)$$

【証明】

$$\begin{aligned} W\left[\frac{\partial}{\partial a} e(t, a)\right] &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\partial}{\partial a} e(nT, a)\right] w^{-n} \\ &= \frac{\partial}{\partial a} \sum_{n=0}^{\infty} e(nT, a) w^{-n} = \frac{\partial}{\partial a} E(w, a) \end{aligned}$$

【定理 4】 a を独立変数, α, β を定数としたとき,

$$\int_{\alpha}^{\beta} E(w, a) da = W\left[\int_{\alpha}^{\beta} e(t, a) da\right] \quad (2.14)$$

【定理 5】 a を独立変数, b を定数としたとき,

$$\lim_{a \rightarrow b} E(w, a) = W[\lim_{a \rightarrow b} e(t, a)] \quad (2.15)$$

3. 逆 w 変換の求め方

$E(w)$ があたえられたとき, これを逆変換して $e(nT)$ を求める方法を述べる.

w 変換の定義から,

$$E(w) = \sum_{n=0}^{\infty} e(nT) w^{-n} = w^0 \sum_{n=0}^{\infty} e(nT) w_d^{-n}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{E(w)}{w^0} &= \sum_{n=0}^{\infty} e(nT) w_d^{-n} \\ &= e(0) + e(T) w_d^{-1} + \cdots + e(nT) w_d^{-n} + \cdots, \end{aligned}$$

両辺に w_d^{n-1} をかけると,

$$\begin{aligned} \frac{E(w)}{w^0} w_d^{n-1} &= e(0) w_d^{n-1} + e(T) w_d^{n-2} + \cdots \\ &\quad \cdots + e(nT) w_d^{-1} + \cdots, \end{aligned} \quad (3.1)$$

いま積分路 Γ を, w_d 平面において $\frac{E(w)}{w^0} w_d^{n-1}$ の無限遠点を除いた特異点を含むようにとり, 反時計方向に積分を行なうものとすると, n が負でない整数のとき, (3.1) 式を積分して,

$$\begin{aligned} e(nT) &= \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} \frac{E(w)}{w^0} w_d^{n-1} dw_d \\ &= \Gamma \text{ における } \frac{E(w)}{w^0} w_d^{n-1} \text{ の留数の和} \end{aligned} \quad (3.2)$$

被積分項が点 a に k 次の多重極をもつ場合,

$$\text{Res } e_k(nT) = \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dw_d^{k-1}}$$

$$\cdot \left[\frac{E(w)}{w^0} (w_d - a)^k w_d^{n-1} \right] \Big|_{w_d=a} \quad (3.3)$$

【例】 $E(w) = \frac{Tw}{(w_d-1)^2}$ のとき,

$$\begin{aligned} e(nT) &= \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} \frac{w_d^{n-1}}{w^0} \frac{Tw}{(w_d-1)^2} dw_d \\ &= \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} \frac{Tw_d^n}{(w_d-1)^2} dw_d \end{aligned}$$

(3.3) 式で $k=2, a=1$ において,

$$e(nT) = \frac{d}{dw_d} (Tw_d^n) \Big|_{w_d=1} = nT$$

z 変換の場合と同じく w 変換の場合にも無限級数法が適用できる.

これを用いて上の例についてといてみると,

$$\begin{aligned} E(w) &= \frac{Tw}{(w_d-1)^2} = Tw^{-1} + 2Tw^{-2} + 3Tw^{-3} + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} nTw^{-n} \end{aligned}$$

$$\therefore e(nT) = nT$$

このように w_d 平面における $\frac{E(w)}{w^0} w_d^{n-1}$ の留数を計算する方法, あるいは $E(w)$ を無限級数に展開する方法を用いることにより $e(nT)$ が求められる.

4. w 変換によるサンプル値系の解析

サンプル値系の解析に w 変換を適用する方法について述べる.

Fig. 2 に示す開ループ系を考える.

Fig. 2 Open loop sampled-data system

$$\overline{C(s)} = R^*(s) Q(s) = \overline{R(s)}$$

$$\therefore C(w) = R(w)$$

Fig. 3 に示す開ループ系を考える.

Fig. 3 Open loop sampled-data system

$$C(s) = R^*(s) Q(s) G(s)$$

$$\overline{C(s)} = R^*(s) (G(s) Q(s))^* Q(s)$$

$$= \overline{R(s)} (G(s) Q(s))^*$$

$$\therefore C(w) = R(w) G_p(w)$$

ここで,

$$\begin{aligned} G_p(w) &= W[(G(s) Q(s))^*] \\ &= (1 - w_d^{-1}) W\left[\left(\frac{G(s)}{s}\right)^*\right] \\ &= \frac{1 - w_d^{-1}}{w^0} W\left[\frac{G(s)}{s}\right] = \frac{w - w^0}{w w^0} W\left[\frac{G(s)}{s}\right] \end{aligned}$$

Fig. 4 に示すフィードバック系を考える。

Fig. 4 Feed back sampled-data system

$$E(s) = R(s) - D^*(s) Q(s) G_2(s) H(s)$$

$$D(s) = E^*(s) Q(s) G_1(s)$$

$$C(s) = D^*(s) Q(s) G_2(s)$$

$$\therefore \overline{C(s)} = C^*(s) Q(s)$$

$$= \frac{\overline{R(s)} (G_1(s) Q(s))^* (G_2(s) Q(s))^*}{1 + (G_1(s) Q(s))^* (G_2(s) H(s) Q(s))^*}$$

$$\therefore C(w) = \frac{R(w) G_{1p}(w) G_{2p}(w)}{1 + G_{1p}(w) (G_2 H)_p(w)}$$

ここで

$$G_{1p}(w) = W[(G_1(s) Q(s))^*]$$

$$G_{2p}(w) = W[(G_2(s) Q(s))^*]$$

$$(G_2 H)_p(w) = W[(G_2(s) H(s) Q(s))^*]$$

【例】簡単な例として、Fig. 5 の系で $G(s) = 1(s+1)$ 、 $R(s) = 1/s$ としたとき $C(w)$ 、 $C(nT)$ はつぎのようになる。

Fig. 5 Illustrative example

$$C(w) = \frac{R(w) G_p(w)}{1 + G_p(w)}$$

$$G_p(w) = W[(G(s) Q(s))^*] = \frac{(1-e^{-T})w^0}{w-e^{-T}w^0} = \frac{1-e^{-T}}{w_d-e^{-T}}$$

$$R(w) = \frac{w}{w_d-1}$$

$$\therefore C(w) = \frac{(1-e^{-T})w}{(w_d-1)(w_d+1-2e^{-T})}$$

$$C(nT) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} \frac{(1-e^{-T})w_d^n}{(w_d-1)(w_d+1-2e^{-T})} dw_d$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} (2e^{-T}-1)^n$$

5. 拡張w変換の定義とその性質

拡張w変換をつぎのように定義する。

$$W_{\mu}[e(t)] = W[e(t+\mu T)]$$

$$= E(w, \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} e(n, \mu) w^{-n} \quad (5.1)$$

ここで、

$$e(n, \mu) = e(\overline{n+\mu} T), \quad 0 \leq \mu \leq 1$$

(5.1)式と(2.3)式から、

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} E(w, \mu) = E(w) \quad (5.2)$$

$E(w, \mu)$ を求めるために、Fig. 6 に示すような仮想進み時間 μT を導入したサンプリング過程を考える。

Fig. 6 The sampling process

このとき、

$$E(w, \mu) = \mathcal{L}[e(t+\mu T)\delta_T(t)]Q(s) \Big|_{w^{-n} = \frac{e^{-nsT} - e^{-(n+1)sT}}{s}} \quad (5.3)$$

ここで、

$$\mathcal{L}[e(t+\mu T)] = E(s) e^{\mu s T}$$

$$\mathcal{L}[\delta_T(t)] = \frac{1}{1-e^{-sT}}$$

$$\therefore E(w, \mu) = \frac{1}{2\pi j} \int_{C-j\infty}^{C+j\infty} E(p) e^{\mu p T} \frac{w}{w_d - e^{pT}} dp$$

$$= \sum_{E(s) \text{ の極}} E(s) \text{ の留数} \times e^{\mu s T} \frac{w}{w_d - e^{sT}} \quad (5.4)$$

(5.1)式あるいは(5.4)式から $E(w, \mu)$ が求められ、(5.2)式の関係を利用すれば $E(w)$ も求めることができる。伝達関数 $G(s)$ があたえられた場合には、(5.4)式の右辺の $E(s)$ のかわりに $G(s)$ を代入すれば、 $G(w, \mu)$ が求められる。

【例】 $e(t) = tu(t)$ のとき、

(5.1)式あるいは(5.4)式から、

$$E(w, \mu) = \frac{\mu T w}{w_d - 1} + \frac{T w}{(w_d - 1)^2}$$

また(5.2)式から、

$$E(w) = \lim_{\mu \rightarrow 0} E(w, \mu) = \frac{T w}{(w_d - 1)^2}$$

これは(2.3)式を用いて得られた結果と一致している。つぎに拡張w変換の主な定理を述べる。ただしw変換のときと大体同様にして証明することができる場合には証明を省略する。

【定理 6】〔初期値定理〕

$$E(w, \mu) = W_{\mu}[e(t)] \text{ のとき } \lim_{\substack{w \rightarrow \infty \\ \mu \rightarrow 0}} E(w, \mu) \Big|_{w^0=1} \text{ が存}$$

在すれば、

$$\lim_{\substack{n \rightarrow 0 \\ \mu \rightarrow 0}} e(n, \mu) = \lim_{\substack{w \rightarrow \infty \\ \mu \rightarrow 0}} E(w, \mu) \Big|_{w^0=1} \quad (5.5)$$

【定理 7】〔最終値定理〕

$E(w, \mu) = W_{\mu}[e(t)]$ のとき、最終値が存在すれば、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e(n, \mu) = \lim_{w \rightarrow 1} \frac{w-1}{w} E(w, \mu) \Big|_{w^0=1} \quad (5.6)$$

【例】 $e(t) = e^{-at}u(t)$ のとき ($a > 0$)、

$$E(w, \mu) = \frac{e^{-\mu a T} w}{w_d - e^{-a T}} = \frac{e^{-\mu a T} w^0 w}{w - e^{-a T} w^0}$$

初期値定理を用いれば,

$$\lim_{\substack{w \rightarrow 0 \\ \mu \rightarrow 0}} e(n, \mu) = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \mu \rightarrow 0}} \frac{e^{-\mu a T} w}{w - e^{-a T}} = 1$$

最終値定理を用いれば,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e(n, \mu) = \lim_{w \rightarrow 1} \frac{w-1}{w} \frac{e^{-\mu a T} w}{w - e^{-a T}} = 0$$

【定理 8】 $[\mu]$ による微分定理

$E(w, \mu) = W_\mu[e(t)]$ のとき,

$$\frac{\partial}{\partial \mu} E(w, \mu) = W_\mu \left[\frac{\partial}{\partial \mu} e(n, \mu) \right] \quad (5.7)$$

【定理 9】 $[\mu]$ による積分定理

$E(w, \mu) = W_\mu[e(t)]$ のとき,

$$\int_\alpha^\beta E(w, \mu) d\mu = W_\mu \left[\int_\alpha^\beta e(n, \mu) d\mu \right] \quad (5.8)$$

ただし α, β は $0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1$ を満たす定数である.

【定理 10】 a を定数として,

$W_\mu[E(s)] = w^0 E(w_d, \mu)$ とおいたとき,

$$W_\mu[E(s+a)] = w^0 e^{-\mu a T} E(e^{a T} w_d, \mu) \quad (5.9)$$

【証明】

$$W_\mu[E(s)] = w^0 E(w_d, \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} e(n, \mu) w^{-n}$$

$$= w^0 \sum_{n=0}^{\infty} e(n, \mu) w_d^{-n}$$

$$\therefore W_\mu[E(s+a)] = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+\mu) a T} e(n, \mu) w^{-n}$$

$$= w^0 e^{-\mu a T} \sum_{n=0}^{\infty} e(n, \mu) (e^{a T} w_d)^{-n}$$

$$= w^0 e^{-\mu a T} E(e^{a T} w_d, \mu)$$

【例】 $W_\mu[E(s)] = \frac{\mu T w}{w_d - 1} + \frac{T w}{(w_d - 1)^2}$ のとき,

$$E(w_d, \mu) = \frac{\mu T w_d}{w_d - 1} + \frac{T w_d}{(w_d - 1)^2}$$

$$\therefore W_\mu[E(s+a)] = \frac{\mu T e^{-\mu a T} w}{w_d - e^{-a T}} + \frac{T e^{-(1+\mu) a T} w}{(w_d - e^{-a T})^2}$$

6. 逆拡張 w 変換の求め方

逆 w 変換の場合と同様にして,

$$e(n, \mu) = \frac{1}{2\pi j} \int_\Gamma \frac{E(w, \mu)}{w^0} w_d^{n-1} dw_d \quad (6.1)$$

ここで Γ は被積分項の無限遠点を除いたすべての特異点をふくむようにとり, 反時計方向に積分を行なうものとする.

μ を 0 から 1 までの間で変化させれば, 任意の時刻での応答を求めることができる.

系のインパルス応答が各サンプリング時点 で不連続の場合には, (6.1) 式で $\mu \rightarrow 0$ とすればサンプリング直後の応答が求まり, $n \rightarrow n-1, \mu \rightarrow 1$ とすればサン

プリング直前の応答が求められる.

すなわち,

$$\left. \begin{aligned} \lim_{\mu \rightarrow 0} e(n, \mu) &= e(n T^+) \\ \lim_{\mu \rightarrow 1} e(n-1, \mu) &= e(n T^-) \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

【例】 $e(t) = t u(t)$ のとき,

$$E(w, \mu) = \frac{\mu T w}{w_d - 1} + \frac{T w}{(w_d - 1)^2}$$

(6.1) 式を用いると,

$$e(n, \mu) = \frac{1}{2\pi j} \int_\Gamma \left\{ \frac{\mu T w_d^n}{w_d - 1} + \frac{T w_d^n}{(w_d - 1)^2} \right\} dw_d = (n + \mu) T$$

7. 拡張 w 変換によるサンプル値系の解析

w 変換によるサンプル値系の解析と対応させる意味で, 4. で示した系について考える.

Fig. 2 の開ループ系の場合,

$$C(s) = R^*(s) Q(s) = \overline{R}(s)$$

$$\therefore C(w, \mu) = R(w)$$

Fig. 3 の開ループ系の場合,

$$C(s) = R^*(s) Q(s) G(s)$$

$$W_\mu[R^*(s)] = W[R^*(s)] = \frac{R(w)}{w^0} \text{ であるから,}$$

$$C(w, \mu) = \frac{R(w)}{w^0} G_p(w, \mu)$$

ここで,

$$G_p(w, \mu) = W_\mu[G(s) Q(s)]$$

Fig. 4 のフィードバック系の場合,

$$C(s) = \frac{R^*(s) (G_1(s) Q(s))^* Q(s) G_2(s)}{1 + (G_1(s) Q(s))^* (G_2(s) H(s) Q(s))^*}$$

$$\therefore C(w, \mu) = \frac{R(w)}{w^0} \frac{G_{1p}(w) G_{2p}(w, \mu)}{1 + G_{1p}(w) (G_2 H)_p(w)}$$

8. あとがき

w 変換法および拡張 w 変換法を提案し, これらを用いてサンプル値系の解析を行なう方法を示した. 本論文では $w^{-n} = (e^{-nsT} - e^{-(n+1)sT})/s$ において w 変換を定義している. 定義からもわかるように, w 変換はサンプリングのあとに 0 次ホールド回路がある場合のサンプル値系の解析に適用できる. しかし実際のサンプル値系では, サンプリングパルスに含まれている高調波成分を除去するために, サンプリングのあとに 0 次ホールド回路をつけるのが普通であるので, この条件はそれほど厳しいものではない.

拡張 w 変換を用いれば, 任意の時刻での出力応答を求めることができる.

w 変換法は z 変換法に対応するものであるが, これらを比較すればつぎのようになる.

z 変換では理想的サンプラの出力に着目しているので、理論上はサンプラの出力は高さが無限大で面積が実際の出力に等しいインパルス列である。

しかし物理的に実現可能なサンプラの出力は、微小な有限幅をもったパルス列であり、パルス列の高さが出力の大きさをあらわしている。ここに z 変換の理論と実際との間に gap があり、これが z 変換法がすっきりしない理由であると思われる。

w 変換では、たとえば (2.3) 式をみればわかるように、0 次ホールド回路の出力に着目しているので階段波形の高さが出力の大きさをあらわしており、 z 変換の場合のような不自然さはない。

また w 変換法と x 変換法を比べると、 w 変換法のほうが式の操作が簡単である点などが有利である。

w 変換では変数として w のほかにパルス移動演算子 w_d が導入されているが、これは解析を簡単にするために導入したもので、 $w_d = w/w^0$ の関係を用いれば w_d を消去することができる。

本方法を使用するさいの便宜のため、各種の $G(s)$ に対する $G_p(w)$ と $G(w, \mu)$ を付録に示しておく。

(5.2) 式の関係を利用すれば $G(w)$ もすぐに求められる。これらの各式は z 変換および拡張 z 変換の場合とだいたい同程度の複雑さである。

おわりに、いつもあたたかい御指導と御激励をしてくださいます、東京工業大学の栗屋 潔教授ならびに今井 聖助教授に深く感謝いたします。

文 献

- 1) J. T. Tou: "Modern Control Theory", McGraw-Hill (1964)
- 2) E. I. Jury: "Sampled-Data Control Systems", John Wiley & Sons (1958)
- 3) J. T. Tou: "Digital and Sampled-Data Control Systems", McGraw-Hill (1959)
- 4) Л. Т. Кузин: "Расчет и Проектирование Дискретных Систем Управления", Машгиз (1962)
- 5) W. L. McDaniel, C. L. Phillips: "The X-Transform and its Use in Sampled-Data System Analysis", J. Franklin Inst. 284-1, pp. 39/55 (1967)

付 録

$G(s)$	$G_p(w)$	$G(w, \mu)$
$\frac{1}{s}$	$\frac{T w^0}{w - w^0}$	$\frac{w}{w_d - 1}$
$\frac{1}{s^2}$	$\frac{T^2 w^0 (w + w^0)}{2(w - w^0)^2}$	$\frac{\mu T w}{w_d - 1} + \frac{T w}{(w_d - 1)^2}$
$\frac{1}{s^n}$	$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}} \left[\frac{1}{a} \frac{(1 - e^{-aT}) w^0}{w - e^{-aT} w^0} \right]$	$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}} \frac{e^{-\mu a T} w}{w_d - e^{-aT}}$
$\frac{1}{s+a}$	$\frac{1}{a} \frac{(1 - e^{-aT}) w^0}{w - e^{-aT} w^0}$	$\frac{e^{-\mu a T} w}{w_d - e^{-aT}}$
$\frac{1}{(s+a)^2}$	$\frac{1}{a^2} \frac{(1 - e^{-aT}) w^0}{w - e^{-aT} w^0} - \frac{1}{a} \frac{T e^{-aT} w^0 (w - w^0)}{(w - e^{-aT} w^0)^2}$	$\frac{\mu T e^{-\mu a T} w}{w_d - e^{-aT}} + \frac{T e^{-(1+\mu) a T} w}{(w_d - e^{-aT})^2}$
$\frac{1}{(s+a)^n}$	$\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}} \left[\frac{1}{a} \frac{(1 - e^{-aT}) w^0}{w - e^{-aT} w^0} \right]$	$\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}} \frac{e^{-\mu a T} w}{w_d - e^{-aT}}$
$\frac{1}{s(s+a)}$	$-\frac{1}{a^2} + \frac{T}{a} \frac{w^0}{w - w^0} + \frac{1}{a^2} \frac{w - w^0}{w - e^{-aT} w^0}$	$\frac{1}{a} \frac{w}{w_d - 1} - \frac{1}{a} \frac{e^{-\mu a T} w}{w_d - e^{-aT}}$
$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{1}{ab} + \frac{w - w^0}{a(a-b)(w - e^{-aT} w^0)} + \frac{w - w^0}{b(b-a)(w - e^{-bT} w^0)}$	$\frac{1}{b-a} \left(\frac{e^{-\mu a T} w}{w_d - e^{-aT}} - \frac{e^{-\mu b T} w}{w_d - e^{-bT}} \right)$
$\frac{s+k}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{k}{ab} + \frac{k-a}{a(a-b)} \frac{w - w^0}{w - e^{-aT} w^0} + \frac{k-b}{b(b-a)} \frac{w - w^0}{w - e^{-bT} w^0}$	$\frac{k-a}{b-a} \frac{e^{-\mu a T} w}{w_d - e^{-aT}} - \frac{k-b}{b-a} \frac{e^{-\mu b T} w}{w_d - e^{-bT}}$
$\frac{1}{s^2(s+a)}$	$\frac{1}{a^3} + \left(\frac{T^2}{2a} - \frac{T}{a^2} \right) \frac{w^0}{w - w^0} + \frac{T^2}{a} \frac{(w^0)^2}{(w - w^0)^2} - \frac{1}{a^3} \frac{w - w^0}{w - e^{-aT} w^0}$	$\frac{1}{a^2} \frac{(\mu a T - 1) w}{w_d - 1} + \frac{1}{a} \frac{T w}{(w_d - 1)^2} + \frac{1}{a^2} \frac{e^{-\mu a T} w}{w_d - e^{-aT}}$
$\frac{s+k}{s^2(s+a)}$	$\frac{k}{a^3} - \frac{1}{a^2} + \left(\frac{T}{a} + \frac{k T^2}{2a} - \frac{k T}{a^2} \right) \frac{w^0}{w - w^0} + \frac{k T^2}{a} \frac{(w^0)^2}{(w - w^0)^2} + \left(\frac{1}{a^2} - \frac{k}{a^3} \right) \frac{w - w^0}{w - e^{-aT} w^0}$	$\frac{k \mu a T + a - k}{a^2} \frac{w}{w_d - 1} + \frac{k}{a} \frac{T w}{(w_d - 1)^2} + \frac{k - a}{a^2} \frac{e^{-\mu a T} w}{w_d - e^{-aT}}$

$G(s)$	$G_p(w)$	$G(w, \mu)$
$\frac{s^2+k_1s+k_0}{s^2(s+a)}$	$\frac{k_0}{a^3} - \frac{k_1}{a^2} + \left(\frac{k_1T}{a} + \frac{k_0T^2}{2a} - \frac{k_0T}{a^2} \right) \frac{w^0}{w-w^0} + \frac{k_0T^2}{a}$ $\times \frac{(w^0)^2}{(w-w^0)^2} + \left(\frac{k_1}{a^2} - \frac{k_0}{a^3} \right) \frac{w-w^0}{w-e^{-aT}w^0} + \frac{1}{a} \frac{(1-e^{-aT})w^0}{w-e^{-aT}w^0}$	$\frac{k_0\mu aT + k_1a - k_0}{a^2} \frac{w}{w_d-1} + \frac{k_0}{a} \frac{Tw}{(w_d-1)^2}$ $+ \frac{a^2 - k_1a + k_0}{a^2} \frac{e^{-\mu aT}w}{w_d - e^{-aT}}$
$\frac{1}{s(s+a)^2}$	$-\frac{2}{a^3} + \frac{1}{a^2} \frac{Tw^0}{w-w^0} + \frac{2}{a^3} \frac{w-w^0}{w-e^{-aT}w^0}$ $+ \frac{1}{a^2} \frac{Te^{-aT}w^0(w-w^0)}{(w-e^{-aT}w^0)^2}$	$\frac{1}{a^2} \frac{w}{w_d-1} - \frac{1+\mu aT}{a^2} \frac{e^{-\mu aT}w}{w_d - e^{-aT}}$ $- \frac{1}{a} \frac{Te^{-(1+\mu)aT}w}{(w_d - e^{-aT})^2}$
$\frac{s+k}{s(s+a)^2}$	$-\frac{2k}{a^3} + \frac{k}{a^2} \frac{Tw^0}{w-w^0} + \frac{2k}{a^3} \frac{w-w^0}{w-e^{-aT}w^0}$ $+ \frac{1}{a^2} \frac{(1-e^{-aT})w^0}{w-e^{-aT}w^0} + \frac{k-a}{a^2} \frac{Te^{-aT}w^0(w-w^0)}{(w-e^{-aT}w^0)^2}$	$\frac{1}{a^2} \frac{k w}{w_d-1} + \frac{e^{-\mu aT}}{a^2} \frac{[\mu aT(k-a) - k]w}{w_d - e^{-aT}}$ $+ \frac{e^{-(1+\mu)aT}}{a^2} \frac{(k-a) a T w}{(w_d - e^{-aT})^2}$
$\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$	$-\frac{a+b}{a^2b^2} + \frac{T}{ab} \frac{w^0}{w-w^0} + \frac{1}{a^2(b-a)} \frac{w-w^0}{w-e^{-aT}w^0}$ $+ \frac{1}{b^2(a-b)} \frac{w-w^0}{w-e^{-bT}w^0}$	$-\frac{1}{ab} \frac{w}{w_d-1} + \frac{1}{a(a-b)} \frac{e^{-\mu aT}w}{w_d - e^{-aT}}$ $+ \frac{1}{b(b-a)} \frac{e^{-\mu bT}w}{w_d - e^{-bT}}$
$\frac{s+k}{s(s+a)(s+b)}$	$\frac{1}{ab} - \frac{(a+b)k}{a^2b^2} + \frac{kT}{ab} \frac{w^0}{w-w^0} + \frac{k-a}{a^2(b-a)} \frac{w-w^0}{w-e^{-aT}w^0}$ $+ \frac{k-b}{b^2(a-b)} \frac{w-w^0}{w-e^{-bT}w^0}$	$\frac{k}{ab} \frac{w}{w_d-1} + \frac{k-a}{a(a-b)} \frac{e^{-\mu aT}w}{w_d - e^{-aT}}$ $+ \frac{k-b}{b(b-a)} \frac{e^{-\mu bT}w}{w_d - e^{-bT}}$
$\frac{s^2+k_1s+k_0}{s(s+a)(s+b)}$	$\frac{k_1}{ab} - \frac{(a+b)k_0}{a^2b^2} + \frac{k_0T}{ab} \frac{w^0}{w-w^0}$ $+ \frac{a^2-k_1a+k_0}{a^2(b-a)} \frac{w-w^0}{w-e^{-aT}w^0} + \frac{b^2-k_1b+k_0}{b^2(a-b)} \frac{w-w^0}{w-e^{-bT}w^0}$	$\frac{k_0}{ab} \frac{w}{w_d-1} + \frac{a^2-k_1a+k_0}{a(a-b)} \frac{e^{-\mu aT}w}{w_d - e^{-aT}}$ $+ \frac{b^2-k_1b+k_0}{b(b-a)} \frac{e^{-\mu bT}w}{w_d - e^{-bT}}$
$\frac{1}{(s+a)(s+b)(s+c)}$	$\frac{1}{abc} - \frac{1}{a(b-a)(c-a)} \frac{w-w^0}{w-e^{-aT}w^0} - \frac{1}{b(a-b)(c-b)}$ $\times \frac{w-w^0}{w-e^{-bT}w^0} - \frac{1}{c(a-c)(b-c)} \frac{w-w^0}{w-e^{-cT}w^0}$	$\frac{1}{(b-a)(c-a)} \frac{e^{-\mu aT}w}{w_d - e^{-aT}} + \frac{1}{(a-b)(c-b)}$ $\times \frac{e^{-\mu bT}w}{w_d - e^{-bT}} + \frac{1}{(a-c)(b-c)} \frac{e^{-\mu cT}w}{w_d - e^{-cT}}$
$\frac{s+k}{(s+a)(s+b)(s+c)}$	$\frac{k}{abc} - \frac{k-a}{a(b-a)(c-a)} \frac{w-w^0}{w-e^{-aT}w^0} - \frac{k-b}{b(a-b)(c-b)}$ $\times \frac{w-w^0}{w-e^{-bT}w^0} - \frac{k-c}{c(a-c)(b-c)} \frac{w-w^0}{w-e^{-cT}w^0}$	$\frac{k-a}{(b-a)(c-a)} \frac{e^{-\mu aT}w}{w_d - e^{-aT}} + \frac{k-b}{(a-b)(c-b)} \frac{e^{-\mu bT}w}{w_d - e^{-bT}}$ $+ \frac{k-c}{(a-c)(b-c)} \frac{e^{-\mu cT}w}{w_d - e^{-cT}}$