転がり量に制限を有する平面を転がる球の接触点の制御†

中 島 明*・長 瀬 賢 二*・早 川 義 一*

Control of Contact Coordinates of a Sphere Rolling on a Plane with Constraint on Range of Rolling Motion †

Akira NAKASHIMA*, Kenji NAGASE* and Yoshikazu HAYAKAWA*

In this paper, we discuss control of contact coordinates for a contact point between a sphere and a plane with pure rolling contact by using iterative closed paths on the sphere with constraint on range of rolling motion. First, we analyze the boundary of the reachable area by the closed path with constraint on range of rolling motion. Utilizing the result, we propose a method which brings all the contact coordinates to a target point by the iteration of a finite number of the closed paths. A numerical example where the rolling motion is restricted to the area on the semisphere shows the effectiveness of the proposed method.

Key Words: nonholonomic constraint, sphere rolling on a plane, closed path, constraint on rolling motion

1. はじめに

近年、多指ハンドロボットによる対象物の把握・操りにおいて盛んな研究がなされている¹⁾。そのなかでも、転がり接触での対象物の把握・操りでは、拘束が非ホロノミック²⁾であるため、接触点の制御が可能である。筆者ら³⁾は、6関節2本指ロボットハンドによる純粋転がり接触での対象物の把握・操りにおいて、対象物の位置・姿勢、内力の軌道追従と、接触点のレギュレーションを同時に達成する一手法を提案した。この手法の基本的な考え方は、対象物の位置・姿勢、内力と接触点の一部に対する線形化補償器を設計し、線形化された一部の接触点において単一種類の閉軌道を繰り返すことで、接触点すべてのレギュレーションを行なうというものである。なお、接触点の運動については、指を球、対象物を直方体と考えることにより、平面を転がる球の運動学モデル⁴⁾を考えた。

上記で述べた平面を転がる球の運動学モデルは対称アフィンな非ホロノミックシステムであるので、時不変で滑らかな状態フィードバックでは安定化できない⁵⁾。またこのシステムは Chained form²⁾のような正準形に変換できないため、制御はより難しく、一般的な手法は確立されていない。このシステムに対して、水野ら⁶⁾は、時間軸状態制御形⁷⁾の1次近似システムが持つ不可制御な状態量が、ダイナミクスが

遅いこと、ならびに、時間軸と座標の取替えにより入れ替わることに着目し、取り替えを繰り返すことで全状態量を逐次的に原点に収束させる手法を提案した。この手法は、線形近似システムに基づいているため、線形システム理論を用いてさまざまなコントローラを設計できるが、実際非線形システムにおける収束については十分な議論はなされていない。一方、Bicchiら⁸⁾は、各入力に対応したベクトル場の微分方程式の解である flow²⁾を求め、それらを順に組み合わせることで、目標状態までの入力の軌道を生成する手法を提案した。しかしながら、flowの合成関数として与えられる多変数の非線形方程式を数値的に解く必要があるため、局所最小値の存在により解が求まらない可能性がある。さらに、外乱などにより当初の軌道からずれた場合は、flowの組み合わせを改めて求める必要がある。また、状態量の一部において閉軌道を行なうことで、残りの状態量に変化(ホロノミー)が生じることに着目した手法がいくつかある。Liら⁹⁾は、複数の種類の閉軌道を用いて各状態量を順次目標状態へと移動させる手法を提案した。しかし、この手法は、一つの閉軌道により状態量の一部を目標状態へ移動させている間は、ほかの状態量はモデルに従うことを前提としているため、モデル化誤差や外乱などに弱いことが予想される。またBicchiら¹⁰⁾は、平面と対称な軸を持つ任意の2次曲面の対象物に対して、閉軌道による経路計画を提案した。しかしながら、この手法は各状態量を順次目標点へ移動させるという点で、上記Liらと同じ問題点を持つ。Haradaら¹¹⁾は、平面と回転楕円体の対象物に対して、3つの線分からなる閉軌道を2つ組み合わせて1ステップと考え、このステップを繰り返すことで目標点に到達する手法を提案した。しか

† 第4回制御部門大会にて発表(2004・5)

* 名古屋大学大学院工学研究科 名古屋市千種区不老町

* Faculty of Engineering, Nagoya University, Furo-cho, Chikusa-ku, Nagoya
(Received March 15, 2004)
(Revised August 20, 2004)

しながら、ハンドロボットなどで利用する場合には、軌道の速度が不連続にならないように各線分の切り換えの前後で運動を停止させる必要があるため、1ステップを構成する線分ができるだけ少ない手法がより好ましいと考えられる。

一方筆者ら^{3), 12)}は、平面を転がる球において、より少ない線分からなる単一種類の閉軌道を用いた接触点のレギュレーション法を確立するという観点から、球上の接触点において、3つのパラメータにより特徴付けられる4つの線分からなる単一種類の閉軌道を考え、閉軌道を繰り返すことで目標点へ到達する手法を提案した。文献3)においては、1回の閉軌道により目標状態へと近づけるような閉軌道のパラメータが必ず存在することを示し、それを利用した目標点到達のための一手法を提案した。しかしながら、そこでは1回の閉軌道により目標状態に近づけることは保証されているものの、有限回の繰り返して目標点へ到達することは保証されていない。そこでつぎに文献12)において、接触状態を特徴付ける平面において、1回の閉軌道で到達可能な領域内に、原点（現在の接触点位置）で交差する有限な長さを持つ2本の直線が存在することを示し、この直線上を移動しながら有限回の繰り返して目標点に到達する手法を提案した。しかしながら、文献12)で示した直線は1回の閉軌道で到達可能な領域の一部であり、実際にはより広範囲な領域に到達可能であると予想される。また、いずれの手法においても球の転がり量の制約を考慮せず、ロボットハンドへの適用を考えた場合、その制約を考慮した手法が必要である。

本研究では、平面を転がる球において、文献3), 12)で提案した単一種類の閉軌道を用いて、球の転がり量に制限を有する場合での接触点のレギュレーションを考える。はじめに、到達可能な領域を最大限に利用するという観点から、接触状態を特徴付ける平面において、転がり量の範囲を指定したときの1回の閉軌道による到達可能領域を正確に見積もる。つぎに、この見積もった領域を利用して、有限回で目標点に到達するアルゴリズムを提案する。基本的なアイデアは、文献12)と同様に、求めた領域上を移動しながら目標点に到達するものであり、筆者らのこれまでの研究と同様に、現在位置と目標点のみからパラメータを決定するため、閉軌道の開始時刻をサンプル時刻とした離散時間フィードバックのような構成で実現できる。なお、閉軌道の開始時刻においてパラメータを決定する際には、解の存在が保証された1変数の非線形方程式を二分法により解くだけで良い。提案手法は球の転がり量の上下限を指定できるため、ロボットハンドへの適用に適した手法と考えられ、また、到達可能な領域を有効に使うことができるので、少ない所要時間で接触点の移動が可能であると考えられる。最後に、転がり量の制約を半球上とした場合での数値例により手法の有効性を確認する。

2. 対象モデルと準備

2.1 対象モデルと閉軌道

Fig. 1のような、ハンドの指先が対象物表面を転がる運

Fig. 1 Sphere rolling on a plane

動を抽象化した、平面を転がる球のモデルを考える。Σ_Fは球の中心に固定した座標系、Σ_Oは平面上に固定した座標系である。球上と平面上の接触点を表わす

$$\text{球上の接触点座標: } \alpha_f := [u_f \ v_f]^T \in \mathbb{R}^2 \quad (1)$$

$$\text{平面上の接触点座標: } \alpha_o := [u_o \ v_o]^T \in \mathbb{R}^2 \quad (2)$$

は、それぞれ Fig. 1 のように極座標と直交座標にとっている。この α_f , α_o と指・対象物表面を表わす写像²⁾ $c_f(\cdot), c_o(\cdot): \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^3$ を用いて、Σ_F で表わした接触点と Σ_O で表わした接触点は $c_f(\alpha_f)$, $c_o(\alpha_o)$ と表わされる。また、左上の破線で囲まれた図は、接触点の近傍を拡大したものであり、説明のため球と平面を離して描いてある。この図において、座標系 Σ_C_f は、原点を球上の接触点 (u_f, v_f) , x, y, z 軸の方向をそれぞれ $\partial c_f / \partial u_f$, $\partial c_f / \partial v_f$, $(\partial c_f / \partial u_f) \times (\partial c_f / \partial v_f)$ とする直交座標系であり、また座標系 Σ_C_o も c_o を用いて同様に定義される直交座標系である $((\partial c_f / \partial u_f)^T (\partial c_f / \partial v_f) = 0, (\partial c_o / \partial u_o)^T (\partial c_o / \partial v_o) = 0$ であることに注意)。これら Σ_C_f と Σ_C_o の x 軸のなす角を

$$\text{球と平面の相対姿勢: } \psi \in \mathbb{R}^1 \quad (3)$$

とする。以上を用いると、接触状態は、接触座標

$$\eta := [\alpha_f^T \ \alpha_o^T \ \psi]^T \in \mathbb{R}^5 \quad (4)$$

により表現される。本研究では、球と平面の相対運動は純粋転がり接触であると仮定する。純粋転がり接触は、Σ_C_o に対する Σ_C_f の相対速度を Σ_C_f で表わしたものを $V_C := [v_{Cx} \ v_{Cy} \ v_{Cz} \ \omega_{Cx} \ \omega_{Cy} \ \omega_{Cz}]^T \in \mathbb{R}^6$ とすれば、 $v_{Cx} = v_{Cy} = v_{Cz} = \omega_{Cz} = 0$ となるような剛体間の運動として表現される²⁾。すなわち、純粋転がり接触とは、接触点において横滑りせず、接触点法線回りに回転しない幾何学的拘束を示している。このとき、 $\dot{\eta}$ と $\dot{\alpha}_f$ の関係は以下のようになる^{2), 4)}。

Fig. 2 Proposed closed path on the sphere

$$\begin{bmatrix} \dot{\alpha}_f \\ \dot{\alpha}_o \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \rho \cos v_f \cos \psi & -\rho \sin \psi \\ -\rho \cos v_f \sin \psi & -\rho \cos \psi \\ \sin v_f & 0 \end{bmatrix} \dot{\alpha}_f \quad (5)$$

ただし, ρ は球の半径である.

(5) 式において η のレギュレーションを考えるにあたり, 目標状態は原点とし, $\dot{\alpha}_f$ が直接制御できるものとする. したがって, 球上の接点 α_f はすでに原点にあるものとして, 残りの状態量

$$\tilde{\eta} := [\alpha_o^T \ \psi]^T \in \mathbb{R}^3 \quad (6)$$

を, α_f における単一種類の閉軌道を繰り返すことで, 原点へと持っていくことを考える. 本研究で用いる閉軌道である, 文献 3), 12) で提案されている 3 つのパラメータ θ_1 , θ_2 , φ で特徴付けられた球上の閉軌道を Fig. 2 に示す. 左図が球上 (α_f) の閉軌道, 右図は閉軌道による平面上 (α_o) の軌跡であり, A_f が閉軌道開始時の球上の接点, A_o が A_f に対応した対象物上の接点を表わしている. 閉軌道は, 上段左図のように, 球上において θ_1 , θ_2 によって定まる経路 $A_f \rightarrow B_f \rightarrow C_f \rightarrow D_f \rightarrow E_f(A_f)$ を, 下段左図のように赤道から x 軸回りに φ だけ傾いて行なうものである. (5) 式をこの経路に沿って積分することにより, 一回の閉軌道により生じる $\tilde{\eta}$ の変化量 $\Delta\tilde{\eta}$ を求めれば,

$$\Delta\tilde{\eta}(\theta_1, \theta_2, \varphi) := [\Delta\alpha_o^T \ \Delta\psi]^T \in \mathbb{R}^3 \quad (7)$$

ただし,

$$\Delta\alpha_o(\theta_1, \theta_2, \varphi) = R_\varphi(\varphi) \Delta\alpha'_o(\theta_1, \theta_2) \quad (8)$$

$$\Delta\psi(\theta_1, \theta_2) = -\theta_1 \sin \theta_2 \quad (9)$$

$$R_\varphi(\varphi) := \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \Delta\alpha'_o(\theta_1, \theta_2) &:= \begin{bmatrix} \Delta u'_o \\ \Delta v'_o \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\rho\theta_1 + \rho(\cot \theta_2 + \theta_2) \sin(\theta_1 \sin \theta_2) \\ \rho(\cot \theta_2 + \theta_2)(1 - \cos(\theta_1 \sin \theta_2)) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (11)$$

である. ここで, (11) 式の $\Delta\alpha'_o$ は $\varphi = 0$ のときに生じる変化 (Fig. 2 上段右図) であり, (8) 式の実際の変化量 $\Delta\alpha_o$ は, $\Delta\alpha'_o$ を回転行列 R_φ により回転したものである (Fig. 2 下段右図).

本研究では転がり量に制限を有する場合を考え, θ_1 , θ_2 , φ のそれぞれの範囲を

$$|\theta_1| \leq \bar{\theta}_1, \quad |\theta_2| \leq \bar{\theta}_2, \quad |\varphi| \leq \pi \quad (12)$$

ただし

$$0 < \bar{\theta}_1 < \pi, \quad 0 < \bar{\theta}_2 < \frac{\pi}{2} \quad (13)$$

とする. なお, 閉軌道の開始方向 φ に関しては範囲に制限を設けていない. これは, 閉軌道の開始位置において, 任意の方向に運動が発生できることを表わしており, 通常成立するものであると考えられるためである.

[注 1] ロボットへの適用を考えた場合, 制限したい領域は, 半球上など球上のある領域内として指定されることも多い. (12) 式の制限のもとで移動可能な領域は, Fig. 2 左上図の A_f から最も遠い点 C_f を x' 軸回りに回転させてできる円を境界とする領域として定まる. この領域は頂点 A_f からの開き角が $\theta_r := \angle A_f O C_f$ 以内の領域で特徴付けることができ, このとき, $|\varphi| \leq \pi$ に注意すれば $|u_f| \leq \theta_r$, $|v_f| \leq \theta_r$ となる. この θ_r は三角形 $\triangle A_f O C_f$ に関して余弦定理を用いて以下のように求まる.

$$\theta_r = \cos^{-1}(\cos \theta_1 \cos \theta_2) \quad (14)$$

2.2 閉軌道の性質

2.1 節の議論からわかるように, 閉軌道により望みの接点の移動を実現するには, そのために与えられた変化量 $\Delta\tilde{\eta}_d$ から (7)~(11) 式により閉軌道のパラメータ θ_1 , θ_2 , φ を決定する必要がある. これは多変数の非線形方程式を解く問題に相当する. 一般的にはニュートン法などの数値解法を適用することになるのだが, 局所最小値の存在から解が求まらない可能性がある. また, 後述する補題 1(ii) からわかるように, 解が一意に定まらず関数 $\Delta\tilde{\eta}$ のヤコビアンが正則とならない点 ($\theta_1 = 0$ や $\theta_2 = 0$ 上の点) が存在するため, ニュートン法は適用できない. さらに, 容易に想像できるように, 転がり量の制限などから関数 $\Delta\tilde{\eta}$ の値域は制限されており, どのような範囲の変化量 $\Delta\tilde{\eta}_d$ に対して解が存在するのか明らかにしておく必要がある. 以降では, 関数 $\Delta\tilde{\eta}$ の性質を調べ, $\Delta\tilde{\eta}$ の値域の詳細な見積もりを行なうとともに, 二分法を用いたパラメータの決定法を示す. 本節ではそのための準備として, これまでにわかっている関数の性質を列挙しておく. 証明の詳細は, 文献 3), 12) を参照されたい.

Fig. 3 Reachable area generated by the closed path

まず、変化量 $\Delta\alpha'_o$, $\Delta\psi$ のパラメータ θ_1 , θ_2 に関する性質について以下の補題が成り立つ。

[補題 1]³⁾ (7) 式の変化量 $\Delta\tilde{\eta}$ は以下の性質を持つ。

(i) $\Delta\alpha'_o$, $\Delta\psi$ は θ_1 , θ_2 に関して連続である。

(ii) $\theta_1 = 0$ または $\theta_2 = 0 \iff \|\Delta\alpha'_o\| = 0$ (15)

$\theta_1 = 0$ または $\theta_2 = 0 \iff \Delta\psi = 0$ (16)

補題 1 (ii) より, $\Delta\tilde{\eta} = [(R_\varphi \Delta\alpha'_o)^T \Delta\psi]^T$ であるから, たとえば $\Delta\psi = 0$ のまま $\|\Delta\alpha'_o\|$ を変化させることができない。すなわち, 関数 $\Delta\tilde{\eta}$ は原点近傍を張ることができないことがわかる。

また, 閉軌道の傾き φ について, 以下の補題が成り立つ。

[補題 2]¹²⁾ (6), (7) 式の $\tilde{\eta}$, $\Delta\tilde{\eta}$ を考える。このとき, $\|\tilde{\eta} + \Delta\tilde{\eta}\|$ を最小化する φ は, 以下の式を満たす。

$$R_\varphi \frac{\Delta\alpha'_o}{\|\Delta\alpha'_o\|} = -\frac{\alpha_o}{\|\alpha_o\|} \quad (17)$$

この補題 2 の幾何学的な解釈を述べる。(7), (8) 式より, 変化量 $\Delta\tilde{\eta}$ は

$$\Delta\tilde{\eta} = \begin{bmatrix} R_\varphi \Delta\alpha'_o \\ \Delta\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \|\Delta\alpha'_o\| \times R_\varphi \frac{\Delta\alpha'_o}{\|\Delta\alpha'_o\|} \\ \Delta\psi \end{bmatrix} \quad (18)$$

のように表現することができる。これを図に表わすと, Fig. 3 のようになる。Fig. 3 左図において, 点 P は $\tilde{\eta}$ 空間において現在の接触状態 $\tilde{\eta} := [\alpha_o^T \ \psi]^T = [u_o \ v_o \ \psi]^T$ を表わしており, 点 P を原点として, $(\|\Delta\alpha'_o\|, \Delta\psi)$ 平面の到達可能領域が斜線で表わされている。この領域を Ω と呼ぶこととすると, (18) 式より, $\Delta\tilde{\eta}$ の取りうる領域は, この領域 Ω を $\Delta\psi$ 軸回りに φ だけ回転したものである。したがって, (17) 式の幾何学的な解釈は, Fig. 3 右図のように, 到達可能領域 Ω が $-\frac{\alpha_o}{\|\alpha_o\|}$ の方向を向くように φ を決定することにより, θ_1 , θ_2 , φ のうち, φ について $\|\tilde{\eta} + \Delta\tilde{\eta}\|$ が最小化される, というものである。なお, (17) 式の φ を用いることとすると, $\|\tilde{\eta} + \Delta\tilde{\eta}\|$ は

$$\begin{aligned} \|\tilde{\eta} + \Delta\tilde{\eta}\| &= \left\| \begin{bmatrix} (\|\alpha_o\| - \|\Delta\alpha'_o\|) \frac{\alpha_o}{\|\alpha_o\|} \\ \psi + \Delta\psi \end{bmatrix} \right\| \\ &= \sqrt{(\|\alpha_o\| - \|\Delta\alpha'_o\|)^2 + (\psi + \Delta\psi)^2} \quad (19) \end{aligned}$$

Fig. 4 Reachable area on $(\|\Delta\alpha'_o\|, \Delta\psi)$ plane

となる。(11), (9) 式より $\|\Delta\alpha'_o\|$, $\Delta\psi$ は θ_1 , θ_2 の関数であるから, 以降では, (θ_1, θ_2) によって特徴づけられる $(\|\Delta\alpha'_o\|, \Delta\psi)$ 平面における到達可能領域 Ω の性質について考えれば良い。この到達可能領域 Ω について以下の対称性に関する補題が成り立つ。

[補題 3]¹²⁾ (9), (11) 式で与えられる $(\|\Delta\alpha'_o\|, \Delta\psi)$ 平面における到達可能領域 Ω を考える。このとき, Ω は $\|\Delta\alpha'_o\|$ 軸に関して対称である。

次節では, これらの性質を利用して, 転がり量を制限したときの到達可能領域 Ω を正確に見積もることを考える。

3. 到達可能領域の境界

本節の内容を簡単に述べる。Fig. 4 において斜線で表わされているのが到達可能領域 Ω であり, 補題 3 を考慮して $\Delta\psi \geq 0$ の部分のみを示してある。本節で求めたいのは到達可能領域 Ω の境界 (A), (B) である。これら境界 (A), (B) 上の各点は, $\Delta\psi(\theta_1, \theta_2) = \epsilon$ として固定したときの $\|\Delta\alpha'_o\|$ の最小値と最大値 (図中の丸印とバツ印) に対応しているので, 以降ではこれらを求めることを考えれば良い。

まず, $\Delta\psi(\theta_1, \theta_2) = \epsilon$ として $\|\Delta\alpha'_o(\theta_1, \theta_2)\|$ の θ_1 を ϵ に変数変換することを考える。(9), (12) 式より

$$\Delta\psi(\theta_1, \theta_2) = -\theta_1 \sin \theta_2 = \epsilon \quad (20)$$

ただし

$$|\epsilon| \leq \bar{\epsilon}, \quad \bar{\epsilon} := \bar{\theta}_1 \sin \bar{\theta}_2 \quad (21)$$

であるので, (20) 式を変形すれば

$$\theta_1 = -\frac{\epsilon}{\sin \theta_2} \quad (22)$$

とできる。このとき, (12) 式より中間変数となる $|\theta_1| \leq \bar{\theta}_1$ が存在するための θ_2 の条件は以下ようになる。

$$-\bar{\theta}_2 \leq \theta_2 \leq \sin^{-1}\left(-\frac{|\epsilon|}{\bar{\theta}_1}\right) \text{ または } \sin^{-1}\left(\frac{|\epsilon|}{\bar{\theta}_1}\right) \leq \theta_2 \leq \bar{\theta}_2 \quad (23)$$

さて, 変換後の $\|\Delta\alpha'_o(-\frac{\epsilon}{\sin \theta_2}, \theta_2)\|$ ($= \|\Delta\alpha'_o(\theta_1, \theta_2)\|$) を改めて $\|\Delta\alpha'_o(\epsilon, \theta_2)\|$ と書くこととすれば, (11), (22) 式より

$$\|\Delta\alpha'_o(\epsilon, \theta_2)\|^2 = \rho^2 \frac{\epsilon^2 - 2\Theta(\theta_2)\epsilon \sin \epsilon + 2\Theta(\theta_2)^2(1 - \cos \epsilon)}{\sin^2 \theta_2} \quad (24)$$

ただし

$$\Theta(\theta_2) := \cos \theta_2 + \theta_2 \sin \theta_2 \quad (25)$$

となる。ここで (20) 式より $\varepsilon = \Delta\psi$ は θ_1, θ_2 に関して連続であるので、補題 1 (i) より (24) 式は ε, θ_2 に関して連続である。また、 $\varepsilon = 0$ のとき補題 1(ii) よりただちに $\|\Delta\alpha'_0\| = 0$ が求まるので、以降では $\varepsilon \neq 0$ である場合を考える (このとき補題 1(ii) より $\theta_1 \neq 0, \theta_2 \neq 0$ に注意)。さらに、(24) 式より $\|\Delta\alpha'_0(\varepsilon, \theta_2)\| = \|\Delta\alpha'_0(-\varepsilon, \theta_2)\|$, $\|\Delta\alpha'_0(\varepsilon, \theta_2)\| = \|\Delta\alpha'_0(\varepsilon, -\theta_2)\|$ であるから、(24) 式は ε, θ_2 に関して対称である。したがって、以降では $\varepsilon > 0, \theta_2 > 0$ とする。

さて、 $\|\Delta\alpha'_0(\varepsilon, \theta_2)\|$ の θ_2 に関する性質を解析することを考える。ここでは、(12), (21) 式より θ_2, ε がとりうる最大の範囲である $0 < \theta_2 < \frac{\pi}{2}, 0 < \varepsilon < \pi$ の場合について考える。このとき、以下の定理が成り立つ。

【定理 1】 (24) 式の $\|\Delta\alpha'_0(\varepsilon, \theta_2)\|^2$ において、 ε を固定して θ_2 の関数と見なす。また、 $0 < \theta_2 < \frac{\pi}{2}, 0 < \varepsilon < \pi$ とする。このとき、以下の性質が成り立つ。

- (i) $\varepsilon < \frac{\pi}{2}$: 極値を 1 つ持ち、その点は極小値である。
- (ii) $\varepsilon \geq \frac{\pi}{2}$: 単調減少関数である。

(証明) (24) 式を θ_2 に関して偏微分すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta_2} \|\Delta\alpha'_0(\varepsilon, \theta_2)\|^2 &= \frac{\{-\theta_2 \cos \theta_2 \varepsilon \sin \varepsilon + 2\theta_2 \cos \theta_2 \Theta(1 - \cos \varepsilon)\} \sin \theta_2 - \cos \theta_2 \{\varepsilon^2 - 2\varepsilon \sin \varepsilon + 2\Theta^2(1 - \cos \varepsilon)\}}{\sin^3 \theta_2} \\ &= \frac{2\rho^2 \cos \theta_2}{\sin^3 \theta_2} f(\varepsilon, \theta_2) \end{aligned} \quad (26)$$

ただし

$$\begin{aligned} f(\varepsilon, \theta_2) &:= \varepsilon \sin \varepsilon \Theta_1(\theta_2) - 2(1 - \cos \varepsilon) \Theta_2(\theta_2) - \varepsilon^2 \quad (27) \\ \begin{cases} \Theta_1(\theta_2) &:= 2 \cos \theta_2 + \theta_2 \sin \theta_2 \\ \Theta_2(\theta_2) &:= \cos \theta_2 (\cos \theta_2 + \theta_2 \sin \theta_2) \end{cases} \quad (28) \end{aligned}$$

となる。さて、 $\theta_2 > 0$ の範囲に注意すると、 $\cos \theta_2 / \sin^3 \theta_2 > 0$ であるため、(26) 式の符号、および (26) 式が 0 となるかは $f(\varepsilon, \theta_2)$ により決まる。したがって (27) 式を解析することを考え、以下のように変形する。

$$f(\varepsilon, \theta_2) = \varepsilon^2 \left\{ \frac{\sin \varepsilon}{\varepsilon} \left\{ \Theta_1 - \left(\frac{\tan \frac{\varepsilon}{2}}{\frac{\varepsilon}{2}} \right) \Theta_2 \right\} - 1 \right\} \quad (29)$$

ここで、三角関数の倍角、半角の関係より

$$2 \frac{1 - \cos \varepsilon}{\varepsilon \sin \varepsilon} = 2 \frac{2 \sin^2 \frac{\varepsilon}{2}}{\varepsilon \times 2 \sin \frac{\varepsilon}{2} \cos \frac{\varepsilon}{2}} = \frac{\tan \frac{\varepsilon}{2}}{\frac{\varepsilon}{2}}$$

であることを用いた。(29) 式を θ_2 に関して偏微分すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta_2} f(\varepsilon, \theta_2) &= \varepsilon \sin \varepsilon \left\{ \Theta'_1 - \left(\frac{\tan \frac{\varepsilon}{2}}{\frac{\varepsilon}{2}} \right) \Theta'_2 \right\} \\ &= \varepsilon \sin \varepsilon \Theta'_1 \left\{ 1 - \left(\frac{\tan \frac{\varepsilon}{2}}{\frac{\varepsilon}{2}} \right) \frac{\Theta'_2}{\Theta'_1} \right\} \end{aligned} \quad (30)$$

となる。(30) 式右辺の各項の上下限値は

Fig. 5 Sketch of $\|\Delta\alpha'_0(\varepsilon, \theta_2)\|$ as a function of θ_2

$$\frac{\sin \varepsilon}{\varepsilon} < 1, \frac{\tan \frac{\varepsilon}{2}}{\frac{\varepsilon}{2}} > 1, \Theta'_1 < 0, \Theta'_2 < 0, \frac{\Theta'_2}{\Theta'_1} > \frac{\pi}{2} \quad (31)$$

で与えられるので (詳細は付録 A 参照),

$$\frac{\partial}{\partial \theta_2} f(\varepsilon, \theta_2) = \underbrace{\varepsilon \sin \varepsilon}_{>0} \underbrace{\Theta'_1}_{<0} \left\{ 1 - \underbrace{\left(\frac{\tan \frac{\varepsilon}{2}}{\frac{\varepsilon}{2}} \right)}_{>1} \underbrace{\frac{\Theta'_2}{\Theta'_1}}_{>\frac{\pi}{2}} \right\} > 0 \quad (32)$$

を得る。したがって、(29) 式の $f(\varepsilon, \theta_2)$ は θ_2 に関して単調増加関数である。つぎに、 $f(\varepsilon, \theta_2)$ の θ_2 に関する $0, \frac{\pi}{2}$ での極限値を調べると、(29), (28), (A.1), (A.2) 式より

$$\lim_{\theta_2 \downarrow 0} f(\varepsilon, \theta_2) = \varepsilon^2 \left[\frac{\sin \varepsilon}{\varepsilon} \left\{ 2 - \left(\frac{\tan \frac{\varepsilon}{2}}{\frac{\varepsilon}{2}} \right) \right\} - 1 \right] < 0 \quad (33)$$

$$\lim_{\theta_2 \uparrow \frac{\pi}{2}} f(\varepsilon, \theta_2) = \varepsilon^2 \left[\frac{\pi}{2} \left(\frac{\sin \varepsilon}{\varepsilon} \right) - 1 \right] \begin{cases} > 0 & (0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}) \\ \leq 0 & (\frac{\pi}{2} \leq \varepsilon < \pi) \end{cases} \quad (34)$$

である。これら (33), (34) 式より、 $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$ のときは、 $0 < \theta_2 < \frac{\pi}{2}$ において $f(\varepsilon, \theta_2)$ が符号を変えるため、 $f(\varepsilon, \theta_2) = 0$ は解をただ 1 つ持つ。したがって、 $f(\varepsilon, \theta_2) = 0$ の解を θ_2^* とすると、(26) 式より、 $\|\Delta\alpha'_0(\varepsilon, \theta_2)\|^2$ は $\theta_2 = \theta_2^*$ において極小値を 1 つ持つ。これより、(i) が示された。また、 $\frac{\pi}{2} \leq \varepsilon < \pi$ のときは、(33), (34) 式より $f(\varepsilon, \theta_2)$ は常に負である。したがって、(26) 式より、 $\|\Delta\alpha'_0(\varepsilon, \theta_2)\|^2$ は単調減少関数であり、(ii) が示された。□

定理 1 の内容を図示すると Fig. 5 となる。左図は $\varepsilon < \frac{\pi}{2}$ の場合を示しており、 $\theta_2 = \theta_2^*$ で $\|\Delta\alpha'_0(\varepsilon, \theta_2)\|$ は極小値をとる。また右図は $\varepsilon \geq \frac{\pi}{2}$ の場合を表わしており、 $\|\Delta\alpha'_0(\varepsilon, \theta_2)\|$ は単調減少関数である。

この定理 1 により、転がり量が制限された場合の境界の見積もりが可能となる。具体的には、 ε を (21) 式の範囲で変化させて、 θ_2 の定義域 (23) 式における $\|\Delta\alpha'_0(\varepsilon, \theta_2)\|$ の最小値と最大値 (Fig. 4 参照) を与える θ_2 を、定理 1 の性質を用いて求めれば良い。この θ_2 と (24) 式を用いて $\|\Delta\alpha'_0(\varepsilon, \theta_2)\|$ の最小値、最大値が計算でき、またそれを与える θ_1 も (22) 式から求められる。ただしそのためには、Fig. 5 からわかるように、 $\varepsilon < \frac{\pi}{2}, \varepsilon \geq \frac{\pi}{2}$ の場合分けが必要であり、さらに、 $\varepsilon < \frac{\pi}{2}$ のときには、 θ_2 の定義域が極小

値を与える θ_2^* を含むときと含まないときで場合分けが必要となる. 以下に, (12) 式の制限のもとでの $\|\Delta\alpha'_o(\varepsilon, \theta_2)\|$ の最小値, 最大値を与える θ_2 の計算法を示す. なお, 最小値, 最大値を与える θ_2 を $\theta_{2\min}$, $\theta_{2\max}$ と記述する. また, 前述したように $\theta_2 > 0$ の範囲を考えているので, (23) 式より θ_2 の範囲は

$$\sin^{-1}\left(\frac{\varepsilon}{\bar{\theta}_1}\right) \leq \theta_2 \leq \bar{\theta}_2 \quad (35)$$

となることに注意する.

【到達可能領域 Ω の境界の計算法】

(i) $\varepsilon < \frac{\pi}{2}$ (Fig. 5 左図)

1) $\bar{\theta}_2 < \theta_2^*$ (定義域が θ_2^* の左側)

このとき $\|\Delta\alpha'_o(\varepsilon, \theta_2)\|$ は定義域において単調減少関数である. したがって, 最小値と最大値を与える θ_2 はそれぞれ定義域の右端と左端になる.

$$\theta_{2\min} = \bar{\theta}_2, \quad \theta_{2\max} = \sin^{-1}\left(\frac{\varepsilon}{\bar{\theta}_1}\right) \quad (36)$$

2) $\sin^{-1}(\frac{\varepsilon}{\bar{\theta}_1}) \leq \theta_2^* \leq \bar{\theta}_2$ (定義域が θ_2^* を含む)

このとき $\|\Delta\alpha'_o(\varepsilon, \theta_2)\|$ は θ_2^* で最小値をとる. 最大値は定義域の端点のどちらかである.

$$\text{a) } \|\Delta\alpha'_o(\varepsilon, \sin^{-1}(\frac{\varepsilon}{\bar{\theta}_1}))\| \geq \|\Delta\alpha'_o(\varepsilon, \bar{\theta}_2)\|$$

$$\theta_{2\min} = \theta_2^*, \quad \theta_{2\max} = \sin^{-1}\left(\frac{\varepsilon}{\bar{\theta}_1}\right) \quad (37)$$

$$\text{b) } \|\Delta\alpha'_o(\varepsilon, \sin^{-1}(\frac{\varepsilon}{\bar{\theta}_1}))\| < \|\Delta\alpha'_o(\varepsilon, \bar{\theta}_2)\|$$

$$\theta_{2\min} = \theta_2^*, \quad \theta_{2\max} = \bar{\theta}_2 \quad (38)$$

3) $\theta_2^* < \sin^{-1}(\frac{\varepsilon}{\bar{\theta}_1})$ (定義域が θ_2^* の右側)

このとき $\|\Delta\alpha'_o(\varepsilon, \theta_2)\|$ は定義域において単調増加関数である. したがって, 最小値と最大値を与える θ_2 はそれぞれ定義域の左端と右端になる.

$$\theta_{2\min} = \sin^{-1}\left(\frac{\varepsilon}{\bar{\theta}_1}\right), \quad \theta_{2\max} = \bar{\theta}_2 \quad (39)$$

(ii) $\varepsilon \geq \frac{\pi}{2}$ (Fig. 5 右図)

このとき, $\|\Delta\alpha'_o(\varepsilon, \theta_2)\|$ は単調減少関数となるので, 最小値と最大値を与える θ_2 はそれぞれ定義域の右端と左端になる.

$$\theta_{2\min} = \bar{\theta}_2, \quad \theta_{2\max} = \sin^{-1}\left(\frac{\varepsilon}{\bar{\theta}_1}\right) \quad (40)$$

[注2] 上記の (i) $\varepsilon < \frac{\pi}{2}$ の場合において, 境界値を与える θ_2 のうち θ_2^* は定理1の証明で述べたように $f(\varepsilon, \theta_2) = 0$ の解であるため, 数値的に求める必要がある. しかしながら, $f(\varepsilon, \theta_2)$ は区間 $[0, \frac{\pi}{2}]$ において単調増加関数であり, $\theta_2 = 0$, $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$ で異なる符号をとる ((33), (34) 式). したがって二分法¹³⁾により数値的に安定して解を求めることができる.

Fig. 6 Reachable area by the iteration of two closed paths

4. 目標点到達のためのパラメータ決定アルゴリズム

本節では, 前節で求めた到達可能領域 Ω の境界を利用した目標点到達のためのパラメータ決定アルゴリズムについて述べる. φ は (17) 式のように決定するものとし, ここでは θ_1 , θ_2 の決定法を述べる. これにより, 目標点は $(\|\Delta\alpha'_o\|, \Delta\psi)$ 平面の第1, 4象限に含まれる.

まず, 2回の閉軌道で到達可能な領域を特徴付ける. Fig. 6は $(\|\Delta\alpha'_o\|, \Delta\psi)$ 平面であり, 説明の便宜上, $\|\Delta\alpha'_o\|$ 軸の負の領域も示してあり, この負の領域は, (17) 式を満たす φ に π を加えることで実現できる. 以降では説明の簡単化のため, $\|\Delta\alpha'_o\|$, $\Delta\psi$ の値を

$$x := \|\Delta\alpha'_o\|, \quad y := \Delta\psi \quad (41)$$

と表わし, $(\|\Delta\alpha'_o\|, \Delta\psi)$ 平面を (x, y) 平面と呼ぶ. なお, 図中の原点 O が現在位置に対応する. Fig. 6において, 斜線部の領域は, 4章の結果により特徴付けられる1回の閉軌道で到達可能な領域 Ω であり, $\bar{x}$, $\bar{y}$ は Ω の端点の座標である. y 座標の最大値 $\bar{y}$ は (20), (21), (41) 式より ε の最大値 $\bar{\varepsilon} = \bar{\theta}_1 \sin \bar{\theta}_2$ であり, また, x 座標の最大値 $\bar{x}$ を与える $\theta_{2\max}$ が $\varepsilon = \bar{\varepsilon} = \bar{\theta}_1 \sin \bar{\theta}_2$ のとき (36)~(40) 式のいずれの場合も $\theta_{2\max} = \bar{\theta}_2$ となることに注意すると, それぞれ

$$\bar{x} := \|\Delta\alpha'_o(\bar{\varepsilon}, \bar{\theta}_2)\|, \quad \bar{y} := \bar{\varepsilon} = \bar{\theta}_1 \sin \bar{\theta}_2 \quad (42)$$

である. また, 2回の閉軌道で到達可能な領域は, Ω の境界上の各点を始点にして再度 Ω を描くことで覆うことができる領域であり, これを Ω^2 と呼ぶ (Fig. 6の太線で囲まれた領域). たとえば, 目標点 (x_d, y_d) が図の位置にあるとき, 1回目の閉軌道で P まで移動すれば, 2回目の閉軌道で到達することができる. なお以降の説明のために, 領域 Ω の境界 (A), (B) を特徴付ける $\|\Delta\alpha'_o(\varepsilon, \theta_2)\|$ の最小値と最

Fig. 7 Decomposition of (x, y) plane

大値 (Fig. 4 参照) を以下のようにおく.

$$x_A(\varepsilon) := \|\Delta\alpha'_o(\varepsilon, \theta_{2\min})\|, \quad x_B(\varepsilon) := \|\Delta\alpha'_o(\varepsilon, \theta_{2\max})\| \quad (43)$$

つぎに, 目標点への到達を実現するパラメータを求めるために, Fig. 6 の (x, y) 平面を Fig. 7 のように太線で区切られた領域に分割する. なお, Fig. 6 からわかるように, Ω^2 は x, y 軸に関して対称なので, Fig. 7 には第 1 象限だけを示してある. もし目標点が第 2, 3 象限にある場合は, (17) 式の φ を用いて目標点を第 1, 4 象限に移すことができ, その後, 第 4 象限にある場合は, y_d の符号を反転させることで以降の議論が適用可能である. Fig. 7 は Fig. 6 の (x, y) 平面を 5 つの領域 $\Omega, \Omega_\alpha^2, \Omega_\beta^2, \Omega_\gamma^2, \phi_{\Omega^2}$ に分割したものであり, 各領域の定義は以下のものである.

$$\Omega := \{(x, y) | x_A(y) \leq x \leq x_B(y), y \leq \bar{y}\} \quad (44)$$

$$\Omega_\alpha^2 := \{(x, y) | \bar{x} - x_B(y - \bar{y}) \leq x \leq \bar{x} - x_A(y - \bar{y}), \bar{y} < y \leq 2\bar{y}\} \quad (45)$$

$$\Omega_\beta^2 := \{(x, y) | x < x_A(y), y \leq \bar{y} \text{ または } x < \bar{x} - x_B(y - \bar{y}), \bar{y} < y < 2\bar{y}\} \quad (46)$$

$$\Omega_\gamma^2 := \{(x, y) | x_B(y) < x \leq \bar{x} + x_B(\bar{y} - y), y < \bar{y}\} \quad (47)$$

$$\phi_{\Omega^2} := \{(x, y) | x, y \notin \Omega^2, \Omega^2 = \Omega \cup \Omega_\alpha^2 \cup \Omega_\beta^2 \cup \Omega_\gamma^2\} \quad (48)$$

ここで, Ω が 1 回で到達可能な領域, $\Omega_\alpha^2, \Omega_\beta^2, \Omega_\gamma^2$ が 2 回で到達可能な領域, ϕ_{Ω^2} が到達に 3 回以上かかる領域である.

以上の各領域に目標点 (x_d, y_d) がある場合の移動方法について述べる. まず, 目標点が領域 ϕ_{Ω^2} にある場合は, 領域 Ω の端点 $(\bar{x}, \bar{y})$ への移動を繰り返す. このとき, 常に有限の移動幅で目標点に近づいていくので, たかだか有限回の移動により目標点は $\Omega^2 = \Omega \cup \Omega_\alpha^2 \cup \Omega_\beta^2 \cup \Omega_\gamma^2$ に入る. つぎに目標点が領域 Ω^2 にある場合の移動の仕方を述べる. まず, 目標点が Ω_α^2 にある場合は, 1 回目の閉軌道で Ω の端点 $(\bar{x}, \bar{y})$ に移動することで目標点が Ω に含まれる (Fig. 7 参照). また, 目標点が Ω_β^2 にある場合は, Fig. 8 左図のように 1 回

Fig. 8 Scheme of the algorithm for decision of parameters

目で境界 (B) に沿って点 Q まで移動し, 2 回目でも境界 (B) に沿って移動すれば目標点に到達できる. 1 回目, 2 回目の y 方向の移動量をそれぞれ $y_{\beta_1} > 0, y_{\beta_2} > 0$ とすると, 2 回行った後の x 方向の移動量は $x_B(y_{\beta_1}) - x_B(y_{\beta_2})$ で与えられるので, $y_{\beta_1} + y_{\beta_2} = y_d$ に注意すると

$$x_B(y_{\beta_1}) - x_B(y_d - y_{\beta_1}) = x_d \quad (49)$$

となる. なお, $y_{\beta_2} = y_d - y_{\beta_1} > 0$ より $y_{\beta_1} < y_d$ であり, また $y_{\beta_1} < \bar{y}$ であるので, y_{β_1} の範囲は $0 < y_{\beta_1} < y_d$ ($y_d < \bar{y}$) もしくは $0 < y_{\beta_1} < \bar{y}$ ($y_d \geq \bar{y}$) であることに注意されたい. したがって, 上記の範囲で (49) 式を解くことにより 1 回目の y 方向の移動幅 y_{β_1} が求まり, (43) 式より x 方向の移動幅 $x_B(y_{\beta_1})$ も決まるので, この点に移動することで目標点が Ω に含まれる. 一方, 目標点が Ω_γ^2 にある場合は, Fig. 8 右図のように 1 回目で境界 (B) に沿って点 R まで移動し, 2 回目で境界 (B) に沿って移動れば目標点に到達できる. 1 回目, 2 回目の y 方向の移動量をそれぞれ $y_{\gamma_1} > 0, y_{\gamma_2} < 0$ とすると, x 方向の 2 回目の移動量は $x_B(y_{\gamma_1}) + x_B(y_{\gamma_2})$ で与えられ, $y_{\gamma_1} + y_{\gamma_2} = y_d$ に注意すれば

$$x_B(y_{\gamma_1}) + x_B(y_d - y_{\gamma_1}) = x_d \quad (50)$$

となる. なお, $y_{\gamma_2} = y_d - y_{\gamma_1} < 0$ より $y_d < y_{\gamma_1}$ であり, また $y_{\gamma_1} \leq \bar{y}$ であるので, y_{γ_1} の範囲は $y_d < y_{\gamma_1} \leq \bar{y}$ であることに注意されたい. したがって, 上記の範囲で (50) 式を解くことにより 1 回目の y 方向の移動幅 y_{γ_1} が求まり, (43) 式より x 方向の移動幅 $x_B(y_{\gamma_1})$ も決まるので, この点に移動することで目標点が Ω に含まれる. 最後に, 目標点が Ω にある場合は, (x_d, y_d) に移動すれば良い.

以上をまとめた目標点到達のためのパラメータ決定アルゴリズムを以下に示す. なお, k は閉軌道の繰り返しの回数であり, 直交座標 (x, y) で表わした k 回目の閉軌道開始時における目標点の座標を $(x_d[k], y_d[k])$ とする. なお, 前述したように目標点は第 1 象限にあるものとし, $x_d[k] > 0, y_d[k] > 0$ とする.

【目標点到達のためのパラメータ決定アルゴリズム】

$$1) \quad (x_d[k], y_d[k]) \in \phi_{\Omega^2}$$

目標点 $(x_d[k], y_d[k])$ が領域 Ω^2 に含まれるまで領域 Ω の端点 $(\bar{x}, \bar{y})$ への移動を繰り返す. $\theta_1[k]$, $\theta_2[k]$ は (22), (42) 式より以下のようになる.

$$\theta_2[k] = \bar{\theta}_2, \quad \theta_1[k] = -\frac{\bar{\theta}_1 \sin \bar{\theta}_2}{\sin \theta_2[k]} \quad (51)$$

$$\mathbf{2)} \quad (x_d[k], y_d[k]) \in \Omega^2$$

以下の閉軌道を 1 回行なうことで，目標点 $(x_d[k], y_d[k])$ は領域 Ω に含まれる.

$$(i) \quad (x_d[k], y_d[k]) \in \Omega_\alpha^2$$

Ω の端点 $(\bar{x}, \bar{y})$ に移動する. $\theta_1[k], \theta_2[k]$ は (22), (42) 式より以下のようにになる.

$$\theta_2[k] = \bar{\theta}_2, \quad \theta_1[k] = -\frac{\bar{\theta}_1 \sin \bar{\theta}_2}{\sin \theta_2[k]} \quad (52)$$

$$(ii) \quad (x_d[k], y_d[k]) \in \Omega_\beta^2$$

$$\{x_B(y_{\beta_1}) - x_B(y_d[k] - y_{\beta_1})\} - x_d[k] = 0$$

$$\text{ただし} \begin{cases} 0 < y_{\beta_1} < y_d & (y_d \leq \bar{y}) \\ 0 < y_{\beta_1} < \bar{y} & (y_d > \bar{y}) \end{cases} \quad (53)$$

を解いて y_{β_1} を求め、得られた y_{β_1} を $\varepsilon = y_{\beta_1}$ として 4 章の境界の計算法に従い、境界 (B) 上の点を与える $\theta_2[k]$ を算出する。また (22) 式より $\theta_1[k]$ を求める。

$$\theta_2[k] = \theta_{2\max}, \quad \theta_1[k] = -\frac{y\beta_1}{\sin \theta_2[k]} \quad (54)$$

(iii) $(x_d[k], y_d[k]) \in \Omega_\gamma^2$

$$\{x_B(y_{\gamma_1}) + x_B(\dot{y}_d[k] - y_{\gamma_1})\} - x_d[k] = 0 \quad (55)$$

ただし $y_d < y_{\gamma_1} < \bar{y}$

を解いて y_{γ_1} を求め、得られた y_{γ_1} を $\varepsilon = y_{\gamma_1}$ として 4 章の境界の計算法に従い、境界 (B) 上の点を与える $\theta_2[k]$ を算出する。また (22) 式より $\theta_1[k]$ を求める。

$$\theta_2[k] = \theta_{2\max}, \quad \theta_1[k] = -\frac{y_{\gamma_1}}{\sin \theta_2[k]} \quad (56)$$

$$\mathbf{3)} \quad (x_d[k], y_d[k]) \in \Omega$$

$\varepsilon = y_d[k]$ として, 4 章の境界の計算法に従い境界 (A), (B) を与える $\theta_{2\min}, \theta_{2\max}$ を算出し,

$$\|\Delta\alpha'_o(y_d[k], \theta_2[k])\| - x_d[k] = 0$$

$$\text{ただし} \begin{cases} \theta_{2\min} \leq \theta_2[k] \leq \theta_{2\max} & (\theta_{2\min} \leq \theta_{2\max}) \\ \theta_{2\max} \leq \theta_2[k] \leq \theta_{2\min} & (\theta_{2\min} > \theta_{2\max}) \end{cases} \quad (57)$$

を解いて $\theta_2[k]$ を求める. また得られた $\theta_2[k]$ を用いて (22) 式より $\theta_1[k]$ を求める.

[注 3] 上記アルゴリズムにおいて, (51), (52) 式は定義域の境界値により直接与えられる. 一方, 数値計算により求める必要があるのは (53), (55), (57) 式であるが, いずれも定義域が固定された 1 変数の非線形方程式であり, 定義域の端点で符号を変える (各領域の定義から容易に確認できる). しがたってこれらの式は, 二分法を用いて容易に解くことができる.

[注4] 本手法では、文献3), 12) のように、閉軌道を繰り返すたびに、 k 回目の閉軌道開始位置から見た目標点 $(x_d[k], y_d[k])$ のみを用いて閉軌道のパラメータを決定している。このため、上記アルゴリズムは閉軌道の開始時刻をサンプル時刻とした離散時間フィードバックのような構成になっており、外乱や誤差などに強いことが期待できる。

5. シミュレーション

前節で示したアルゴリズムの有効性を数値シミュレーションにより確認する．半径は $\rho = 1[\text{m}]$ とし，接触点の初期位置の設定は， $\alpha_f = [0 \ 0]^T[\text{rad}]$ ， $\alpha_o = [3 \ 4]^T[\text{m}]$ ， $\psi = \frac{\pi}{2}[\text{rad}]$ とした．また，転がり量の境界値 θ_r は，半球を想定して $\theta_r \approx 1.56 < \frac{\pi}{2}$ とした（(14) 式において $\bar{\theta}_1 = \bar{\theta}_2 = 1.5 < \frac{\pi}{2}$ とおいて求めた）．

Fig. 9～11 にシミュレーション結果を示す。Fig. 9 は α_o 平面における α_o の軌道が示されており、図中丸印と矢印は、それぞれ 1 回の閉軌道を行なったときの α_o と ψ の値を示している。Fig. 10 は $(\|\Delta\alpha_o\|, \Delta\psi)$ 平面 ((x, y) 平面) における閉軌道ごとの現在位置の移動のようすを丸印で表わしたものであり、実線で囲まれた三日月形の領域が Ω である。Fig. 11 は α_f が 2[sec] ごとに閉軌道を行なっているようすを表わしており、太線は転がり量の境界値 θ_r を示している。Fig. 9 からわかるように、5 回の閉軌道により α_o , ψ ともに原点へと到達している。閉軌道による移動の仕方については、Fig. 10 を見るとわかるように、目標点が 3 回目までは $\phi_{\Omega 2}$ にあるため、領域の端点に移動している。そして、3 回の閉軌道により 2 回の閉軌道で到達できる領域 Ω^2 に到達してからは、移動幅の大きさを調節して、2 回の繰り返しにより到達している。なお、Fig. 9 において、 k ステップ目の閉軌道を行なったときの移動先である $\circ$ が原点と初期位置を結ぶ直線上にあるのは、(17) 式の φ により α_o 平面上の最短経路を選択していることに対応している。また、Fig. 11 からわかるように、 $\alpha_f = [u_f \ v_f]^T$ の u_f , v_f ともに転がり量の境界値 $\theta_r \approx 1.56$ 以内に収まっている。

6. おわりに

本研究では，平面を転がる球において，文献 3)，12) で提案した単一種類の閉軌道を用いて，球の転がり量に制限を有する場合での接触点のレギュレーションを考えた．はじめに，到達可能な領域を最大限に利用するという観点から，接触状態を特徴付ける平面において，転がり量の範囲を指定し

Fig. 9 Trajectory of α_o and ψ on α_o plane Fig. 10 Shift of $(\|\alpha_o\|, \psi)$ on $(\|\Delta\alpha'_o\|, \Delta\psi)$ plane

たときの1回の閉軌道による到達可能領域を正確に見積もった。つぎに、この見積もった領域を利用して、有限回で目標点に到達するアルゴリズムを提案した。提案手法は球の転がり量の上下限を指定できるため、ロボットハンドへの適用に適した手法と考えられ、また、到達可能な領域を有効に使うことができるので、少ない所要時間で接触点の移動が可能であると考えられる。最後に、手法の有効性を転がり量を半球に制約した場合での数値例により確認した。

今後の課題は、今回の問題設定の球と平面を一般形状に拡張すること、および本手法のロバスト性の考察である。また、ロボットハンドの自由度がより少ない場合のように、対象物と接触点の運動が干渉しあう状況での接触点のレギュレーション法を考えることも、今後の課題である。

参 考 文 献

- 1) 吉川恒夫: 器用なメカニカルハンド, 日本ロボット学会誌, **18**-6, 763/766 (2000)
- 2) R. M. Murray, Z. Li and S. S. Sastry: *A Mathematical Introduction to ROBOTIC MANIPULATION*, CRC Press

Fig. 11 Trajectory of α_f

(1994)

- 3) 中島, 長瀬, 早川: 2指ハンドによる転がり接触を用いた対象物の把握・操りと接触点の制御, 計測自動制御学会論文集, **40**-1 70/79 (2004)
- 4) D. J. Montana: The Kinematics of Contact and Grasp, *Inter. J. Robot. Res.*, **7**-3, 17/32 (1988)
- 5) R. W. Brockett: Asymptotic stability and feedback stabilization, *Differential Geometric Control Theory*, **27** 181/191 (1983)
- 6) 水野, 三平, 古賀, 石川: 転がりを用いた球体の姿勢制御, 日本ロボット学会誌, **16**-1, 118/123 (1998)
- 7) 清田, 三平: 時間軸状態制御形によるドリフト項を持たない非ホロノミックシステムの安定化, システム制御情報学会論文集, **12**-11, 647/654 (1999)
- 8) A. Bicchi and R. Sorrentino: Dextrous manipulation through rolling, in *Proc. IEEE Int. Conf. Robot. Automat.*, 452/257 (1995)
- 9) Z. Li and J. Canny: Motion of two rigid bodies with rolling constraint, *IEEE Trans. Robot. Automat.*, **6**-1, 62/72 (1990)
- 10) A. Bicchi and A. Marigo: Dextrous Grippers: Putting Nonholonomy to Work for Fine Manipulation, *Inter. J. Robot. Res.*, **21**-5-6, 427/442 (2002)
- 11) K. Harada, T. Kawashima and M. Kaneko: Rolling Based Manipulation under Neighborhood Equilibrium, *Inter. J. Robot. Res.*, **21**-5-6, 463/474 (2002)
- 12) 中島, 長瀬, 早川: 単一種類の閉軌道の繰り返しを用いた平面を転がす球の接触点の制御, 計測自動制御学会論文集, **40**-4, 434/441 (2004)
- 13) 宮下精二: 応用数学基礎講座 7 数値計算, 朝倉書店 (2002)

《付 録》

A. (31) 式の証明

(i) $\frac{\sin \varepsilon}{\varepsilon}$:

$\frac{\sin \varepsilon}{\varepsilon}$ を微分すると

$$\left(\frac{\sin \varepsilon}{\varepsilon}\right)' = \frac{\varepsilon \cos \varepsilon - \sin \varepsilon}{\varepsilon^2} < 0 \quad \left(\frac{\pi}{2} \leq \varepsilon < \pi\right)$$

は明らかであるので, $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$ について考えると

$$\varepsilon' \Big|_{\varepsilon=0, \frac{\pi}{2}} = 1, \quad \begin{cases} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} (\tan \varepsilon)' = 1 \\ \lim_{\varepsilon \uparrow \frac{\pi}{2}} (\tan \varepsilon)' = \infty \end{cases}$$

であるので,

$$\left(\frac{\sin \varepsilon}{\varepsilon}\right)' = \frac{\varepsilon \cos \varepsilon - \sin \varepsilon}{\varepsilon^2} = \frac{\cos \varepsilon}{\varepsilon^2}(\varepsilon - \tan \varepsilon) < 0$$

より $\frac{\sin \varepsilon}{\varepsilon}$ は単調減少関数である. よって $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\sin \varepsilon}{\varepsilon} = 1$ より

$$0 < \frac{\sin \varepsilon}{\varepsilon} < 1 \quad (\text{A.1})$$

である.

(ii) $\frac{\tan \frac{\varepsilon}{2}}{\frac{\varepsilon}{2}}$:

$\frac{\tan \frac{\varepsilon}{2}}{\frac{\varepsilon}{2}}$ を微分すると (A.1) 式より

$$\begin{aligned} \left(\frac{\tan \frac{\varepsilon}{2}}{\frac{\varepsilon}{2}}\right)' &= \frac{\frac{1}{2} \frac{1}{\cos^2 \frac{\varepsilon}{2}} \cdot \frac{\varepsilon}{2} - \frac{1}{2} \tan \frac{\varepsilon}{2}}{\frac{\varepsilon^2}{4}} = \frac{\varepsilon - 2 \sin \frac{\varepsilon}{2} \cos \frac{\varepsilon}{2}}{\varepsilon^2 \cos^2 \frac{\varepsilon}{2}} \\ &= \frac{1 - \frac{\sin \varepsilon}{\varepsilon}}{\varepsilon \cos^2 \frac{\varepsilon}{2}} > 0 \end{aligned}$$

であるので $\frac{\tan \frac{\varepsilon}{2}}{\frac{\varepsilon}{2}}$ は単調増加関数である. よってロピタルの定理より

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\tan \frac{\varepsilon}{2}}{\frac{\varepsilon}{2}} = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \frac{1}{\cos^2 \frac{\varepsilon}{2}}}{\frac{1}{2}} = 1$$

となることから, 以下が成り立つ.

$$\frac{\tan \frac{\varepsilon}{2}}{\frac{\varepsilon}{2}} > 1 \quad (\text{A.2})$$

(iii) Θ'_1, Θ'_2 :

(28) 式より, Θ'_1, Θ'_2 を求めると

$$\Theta'_1 = \theta_2 \cos \theta_2 - \sin \theta_2 \quad (\text{A.3})$$

$$\begin{aligned} \Theta'_2 &= -\sin \theta_2 (\cos \theta_2 + \theta_2 \sin \theta_2) + \theta_2 \cos^2 \theta_2 \\ &= -\sin \theta_2 \cos \theta_2 + \theta_2 (\cos^2 \theta_2 - \sin^2 \theta_2) \\ &= \frac{1}{2} (2\theta_2 \cos 2\theta_2 - \sin 2\theta_2) \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

となる. ここで

$$g(x) := x \cos x - \sin x, \quad 0 < x < \pi \quad (\text{A.5})$$

とおくと

$$\Theta'_1 = g(\theta_2), \quad \Theta'_2 = \frac{1}{2} g(2\theta_2) \quad (\text{A.6})$$

であるので, $g(x)$ を解析すると

$$g'(x) = -x \sin x < 0, \quad \lim_{x \downarrow 0} g(x) = 0 \quad (\text{A.7})$$

となるので, $g(x) < 0$ である. よって以下が成り立つ.

$$\Theta'_1 < 0, \quad \Theta'_2 < 0 \quad (\text{A.8})$$

(iv) $\frac{\Theta'_2}{\Theta'_1}$:

$\frac{\Theta'_2}{\Theta'_1}$ を微分すると, (A.6), (A.7) 式より

$$\begin{aligned} \left(\frac{\Theta'_2}{\Theta'_1}\right)' &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{g(2\theta_2)}{g(\theta_2)} \right\}' = \frac{2\{g(2\theta_2)\}' g(\theta_2) - g(2\theta_2) g'(\theta_2)}{2\{g(\theta_2)\}^2} \\ &= \frac{-8\theta_2 \sin \theta_2 \cos \theta_2 g(\theta_2) + g(2\theta_2) \theta_2 \sin \theta_2}{2\{g(\theta_2)\}^2} \\ &= \frac{\theta_2 \sin \theta_2}{2\{g(\theta_2)\}^2} h(\theta_2) \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

ただし

$$h(\theta_2) := -8 \cos \theta_2 g(\theta_2) + g(2\theta_2) \quad (\text{A.10})$$

となる. この $h(\theta_2)$ を微分すると (A.7) 式より

$$\begin{aligned} h'(\theta_2) &= 8 \sin \theta_2 g(\theta_2) - 8 \cos \theta_2 g'(\theta_2) + \{g(2\theta_2)\}' \\ &= 8 \sin \theta_2 g(\theta_2) + 8 \theta_2 \sin \theta_2 \cos \theta_2 - 4 \theta_2 \sin 2\theta_2 \\ &= 8 \sin \theta_2 g(\theta_2) < 0 \end{aligned}$$

であり, (A.10) 式より $\lim_{\theta_2 \downarrow 0} h(\theta_2) = 0$ であることから, $h(\theta_2) < 0$ である. したがって, (A.9) 式より

$$\left(\frac{\Theta'_2}{\Theta'_1}\right)' < 0 \quad (\text{A.11})$$

であることがわかり, $\frac{\Theta'_2}{\Theta'_1}$ は単調減少関数である. よって, (A.5), (A.6) 式より

$$\lim_{\theta_2 \downarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\Theta'_2}{\Theta'_1} = \frac{1}{2} \lim_{\theta_2 \downarrow \frac{\pi}{2}} \frac{g(2\theta_2)}{g(\theta_2)} = \frac{\pi}{2}$$

であることから以下が成り立つ.

$$\frac{\Theta'_2}{\Theta'_1} > \frac{\pi}{2} \quad (\text{A.12})$$

[著者紹介]

中 島 明 (学生会員)

2002 年名古屋大学大学院工学研究科電子機械工学専攻博士前期課程修了. 同年, 同大学大学院工学研究科電子機械工学専攻博士後期課程に進学し現在に至る. 多指ハンドロボットによる把握・操りの制御, 非ホロノミックシステムの制御の研究に従事.

長 瀬 賢 二 (正会員)

1998 年名古屋大学大学院工学研究科博士後期課程修了. 同年名古屋大学工学研究科助手. 振動の制御, ロボットの制御などの研究に従事. 日本機械学会, 日本ロボット学会などの会員 (工学博士).

早 川 義 一 (正会員)

1979 年名古屋大学大学院博士後期課程修了. 同年名古屋大学工学部助手, 講師, 助教授を経て, 1996 年同教授. システム制御理論, ロボット工学の研究に従事. システム制御情報学会などの会員 (工学博士).