重畳パルス列の信号分離のための時間-周期解析法[†]

西 口 憲 一*

Time-Period Analysis for Pulse Train Deinterleaving[†]

Ken'ichi NISHIGUCHI*

This paper presents a new method for the signal separation of interleaved pulse trains consisting of several pulse trains emitted from independent signal sources, some of which possibly exist for only a short period of time. The separation is based on the differences in the pulse repetition intervals (PRIs) of the signal sources. To detect each pulse train, we derive a map from the input signal to a function of two variables: time and PRI, which we call the PRI map. By taking the absolute value of the PRI map, we obtain a short-time PRI spectrum, from which we can use thresholding to estimate the number of signal sources, their time duration, and the PRIs. The PRI map is an extension of the PRI transform, which was proposed by the author previously. The extension is based on the time-period analysis. The construction of the PRI map is similar to that of a wavelet transform. The difference is that the PRI map is a nonlinear transform, while the wavelet transform is a linear one. Simulation results are presented on the performance of the signal separation of interleaved pulse trains using the PRI map. Finally, the performance analysis is given to show the detection ability of the PRI map for short pulse trains.

Key Words: signal separation, deinterleaving, pulse train, pulse repetition interval, time-period analysis

1. はじめに

レーダ、通信などの分野において、信号はしばしば周期的なパルス列として表わされ、一つのチャンネルに複数の信号源からのパルス列が同時に入力することがある。このような重なり合ったパルス列から信号源の個数を推定して各パルスを信号源ごとに分離することはパルス列分離 (pulse train deinterleaving) の問題と呼ばれ、種々の解法と多くの研究がある^{1)~8)}。レーダパルス列の信号分離に関しては文献¹⁾に従来の取り組みの概観が示されているが、分離は主として信号源ごとのパルス繰り返し間隔 (PRI: pulse repetition interval) の違いに基づき行なわれる。

もし個々の信号源からの信号が正弦波であれば、信号分離はスペクトル解析で簡単に行なえる。すなわち、パワースペクトルのピークの数と位置から信号の数とそれぞれの周波数が推定できる。ところが信号がパルス列の場合には、周期的なパルス列のパワースペクトルや自己相関関数はいずれもまた周期的なパルス列となるため、パルス列の信号分離は容易ではない。

この問題を解決するために、筆者らは以前、PRI 変換と呼ぶ非線形の積分変換を提案した⁷⁾。PRI 変換は自己相関関数で現われる PRI の位置のピークだけを保存して、分数調波成分をほぼ完全に抑圧する機能をもつ。当初の PRI 変換は PRI の揺らぎに対して脆弱であったが、改良を施したアルゴリズム (変形 PRI 変換)⁸⁾によってその弱点を克服することができた。PRI 変換あるいは変形 PRI 変換を用いると、PRI を変数とするある種のスペクトル (PRI スペクトルと呼ぶ) が得られ、そのピークの個数と位置から、信号源の個数と PRI を推定することができる。

しかしながら、これらの方法で信号を検出するためには、各信号源からのパルス列が観測時間内に十分長く存在していなければならないという制約がある。応用上は、PRI の揺らぎに対してロバストで、かつ短いパルス列しか含まれていない場合でも検出できる方法が望ましい。本論文では、この要請を満たす方法として PRI 写像と呼ぶ方法を提案する。PRI 写像は PRI 変換を時間-周期解析により拡張したものである。これは PRI 変換と同じく非線形の積分変換であるが、PRI に比例する幅の移動窓を用いて、時変 PRI スペクトルが得られるようにしたところに特徴がある。このような拡張により、パルス列の PRI が揺らぎをもっている、さらに観測時間中の短い時間しかパルス列が存在していなくても検出が可能になることを示す。

本論文の構成はつぎのとおりである。まず 2 章で、問題の定式化を行ない、PRI 変換によるパルス列分離法の限界を示

[†] 33rd International Symposium on Stochastic Systems Theory and its Applications で一部発表 (2001・10)

* 三菱電機 (株) 先端技術総合研究所 尼崎市塚口本町 8-1-1

* Advanced Technology R&D Center, Mitsubishi Electric Corp., Amagasaki

(Received February 20, 2004)

(Revised August 23, 2004)

す。つぎに3章で、本論文で提案する PRI 写像によるパルス列分離法とシミュレーション例を示す。4章では、PRI 写像の解析的な性能評価を行なう。5章はまとめである。

2. 問題の定式化

パルスの到着時間の系列を $t_n, n = 1, 2, \dots, N$ とし、パルス列をつぎのような単位インパルスの和としてモデル化する。

$$g(t) = \sum_{n=1}^N \delta(t - t_n) \quad (1)$$

ここで、 $\delta(\cdot)$ は Dirac の δ 関数である。実際のパルスは有限の幅と振幅をもつものであるが、ここではその到着時間だけをパラメータとして用いることを想定してインパルスで表現してある。

パルス列には複数の信号源からの信号が含まれていて、信号源ごとに PRI は異なるものとする。この場合のパルス列は

$$g(t) = \sum_{\mu=1}^M g_{\mu}(t) \quad (2)$$

$$g_{\mu}(t) = \sum_{n=1}^{N_{\mu}} \delta(t - (n + \eta_{\mu})p_{\mu}) \quad (3)$$

と表わせる。ここで M は信号源の個数、 N_{μ} は信号源 μ からの信号に含まれるパルス数、 p_{μ} と η_{μ} はその PRI と位相である。

ここで取り上げる deinterleaving の問題はパルス到着時間のデータから、そこに含まれる信号源の個数 M やそれぞれの信号の PRI $p_{\mu}, \mu = 1, \dots, M$ を推定することである。(3) 式は PRI が固定でパルス抜けが生じていない理想的なパルス列の場合であるが、実際には PRI に揺らぎがあったりパルス抜けが生じることがあり、さらに個々の要素信号のパルス数 N_{μ} が小さい場合にも対処する必要がある。

前に提案した PRI 変換⁷⁾は、入力信号 $g(t)$ に対して

$$D(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)g(t+\tau)e^{2\pi i t \tau/\tau} dt \quad (4)$$

で定義される。ここで τ は PRI 変数でありその定義域は $\tau > 0$ とする。入力信号が(1)式のパルス列のときには、PRI 変換は δ 関数の積の積分を含むことになるが、これは厳密には超関数同士の畳み込み積分(合成積)⁹⁾として解釈することができる。 δ 関数同士の場合に畳み込み積分は

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(s-t)\delta(t)dt = \delta(s) \quad (5)$$

となる。あと、任意の連続関数 $\varphi(t)$ に対して $\varphi(t)\delta(t) = \varphi(0)\delta(t)$ が成立することと δ 関数が偶関数であることに注意すると、(1)式のパルス列に対する PRI 変換は

$$D(\tau) = \sum_{m=2}^N \sum_{n=1}^{m-1} \delta(\tau - (t_m - t_n))e^{2\pi i t_n/\tau} \quad (6)$$

と表わされる。特に、パルス列が単一の信号源からのもので、

(a) Input pulse train

(b) PRI spectrum by the modified PRI transform

Fig. 1 Modified PRI transform for a pulse train with short elements

$t_n = (n + \eta)p, n = 1, 2, \dots, N$ のときには、

$$D(\tau) = (N-1)\delta(\tau - p)\exp(2\pi i \eta) + \sum_{l=2}^{N-1} \delta(\tau - lp) \frac{\sin(N\pi/l)}{\sin(\pi/l)} e^{\pi i (N+1+2\eta)/l} \quad (7)$$

となる。この右辺第1項は PRI のところに位置するインパルスを表わし、その係数の絶対値は $N-1$ に等しい。第2項は PRI の整数倍のところに位置するインパルス、すなわち分数調波成分を表わすが、それらの係数の絶対値は

$$\left| \frac{\sin(N\pi/l)}{\sin(\pi/l)} \right| \leq \frac{1}{\sin(\pi/l)} \leq \frac{l}{2}, \quad l = 2, 3, \dots \quad (8)$$

で抑えられる。この右辺は N に依存しないから、 N が大きくなるにつれ相対的に分数調波成分が抑圧されることになる。信号源が複数あっても同様で、それぞれの信号源のパルス列について分数調波成分の抑圧が行なわれる。

このような性質から、パルス列に PRI 変換を適用して適当なしきい値を設けると、信号源の数とそれらの PRI を推定することができるが、実用上、この方法の適用には限界がある。それは、個々の信号源からの信号が観測時間中に十分豊富に存在しているという条件が必要なことである。Fig. 1 には短い信号が含まれている場合に、PRI 変換を適用した例

Fig. 2 Moving window for the PRI map

を示す。なお、当初の PRI 変換は PRI の揺らぎに弱いという性質があり、計算にはこれを改良したアルゴリズム（変形 PRI 変換）⁸⁾を用いている。PRI スペクトルは変形 PRI 変換の絶対値を取ったものである。Fig. 1a に示すように入力パルス列の信号源は 5 つでそのうちの 4 つは短い信号である。5 つの信号源の平均 PRI はそれぞれ $1, \sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{10}, \sqrt{15}$ で、いずれも PRI が 30% の揺らぎをもち、10% のパルス抜けが生じている。この入力信号に対する、変形 PRI 変換による PRI スペクトルを Fig. 1b に示す。このスペクトルでは、観測時間全体にわたってパルス列が存在する信号源 #4 に対応するピークは顕著であるが、ほかの信号源に対応するピークは雑音に埋もれて検出は難しい。この限界は特にレーダ信号の検出のような応用にとって深刻な問題になる。

3. パルス列の時間-周期解析法

3.1 PRI 写像

前章で述べたような PRI 変換の難点は、一般の信号処理において、信号全体の Fourier 変換を用いて局所的な信号を検出する際に生じる難点と共通のものである。後者の難点を克服するには、ウェーブレット変換を用いた時間-周波数解析が有効である^{10), 11)}。パルス列に対しては、周波数の代わりに PRI という周期を用いることになるが、類似の考え方を導入して時間-周期解析を行なうことにする。

パルス列を想定した入力信号 $g(\cdot)$ に対して、時間と PRI の 2 変数の空間への写像を

$$D(t, \tau) = \int_{s \in W(t, \tau)} g(s)g(s + \tau)e^{2\pi i s / \tau} ds \quad (9)$$

で定義し、これを PRI 写像と呼ぶ。ここで、PRI 変数 τ の定義域は $\tau > 0$ とする。また $W(t, \tau) = [t - w\tau/2, t + w\tau/2]$ は移動窓（Fig. 2 参照）であり、 $w > 0$ は定数である。被積分関数は (4) 式の PRI 変換と同一であり、異なるところは積分範囲である。すなわち、PRI 写像では移動窓の範囲内だけで PRI 変換の計算を行なう。移動窓の幅 $w\tau$ はウェーブレット変換と同じ考え方から PRI に比例するようにとってある。たとえば、 $w = 10$ とすれば、どの PRI の場合にも 10 パル

Fig. 3 Overlapped PRI bins

ス分の幅で PRI 変換の値を計算することになる。このように PRI 写像は PRI 変換の拡張であり、これは Fourier 変換からウェーブレット変換への拡張と類似のものである。

入力信号 $g(\cdot)$ が (1) 式のパルス列の場合には、PRI 写像は

$$\begin{aligned} D(t, \tau) &= \sum_{m=2}^N \sum_{n=1}^{m-1} \int_{s \in W(t, \tau)} \delta(s - t_n) \\ &\quad \times \delta(s + \tau - t_m) e^{2\pi i s / \tau} ds \\ &= \sum_{m=2}^N \sum_{n=1}^{m-1} \delta(\tau - (t_m - t_n)) e^{2\pi i t_n / \tau} I_{W(t, \tau)}(t_n) \end{aligned} \quad (10)$$

となる。ここで、 $I_{W(t, \tau)}$ は集合 $W(t, \tau)$ の定義関数である。PRI 写像の数値計算を行なうためには、離散型の公式にする必要がある。そのため τ 軸を分割して PRI ビンと呼ぶ細分区間の集合を用いる（Fig. 3 参照）。隣り合う PRI ビンの中心の間隔を $\Delta\tau$ とおき、各 PRI ビンの中心を

$$\tau_k = (k - 1/2)\Delta\tau, \quad k = 1, \dots, K \quad (11)$$

とする。ここで K は PRI ビンの個数であり、 $K\Delta\tau$ が探索したい PRI の上限よりも大きくなるように選ぶ。さらに $b > 0$ を定数として、PRI ビンをつぎのように決める。

$$B_k = [(1 - b/2)\tau_k, (1 + b/2)\tau_k], \quad k = 1, \dots, K \quad (12)$$

このとき、PRI ビンの幅は $b\tau_k, k = 1, \dots, K$ となり、近傍の PRI ビンとオーバーラップすることになる。このようにするのは、検出すべきパルス列の PRI の揺らぎを考慮するためである⁸⁾。このような準備のもとで、(1) 式のパルス列に対する離散 PRI 写像を

$$D_k(t) = \sum_{\{(n, m); t_m - t_n \in B_k, t_n \in W_k(t)\}} e^{2\pi i t_n / \tau_k} \quad (13)$$

で定義する。ここで $W_k(t) = W(t, \tau_k)$ とおいた。さらに PRI 写像の絶対値 $|D_k(t)|$ で、時間の関数としての PRI スペクトルを定義する。これは時間-周期解析における時変スペクトルに相当するから、時変 PRI スペクトルと呼ぶべきものになる。

なお、先に提案した変形 PRI 変換⁸⁾では、オーバーラップさせた PRI ビンと共に時間原点の移動を行なって

$$D_k = \sum_{\{(n,m); t_m - t_n \in B_k\}} e^{2\pi i t'_n / \tau_k} \quad (14)$$

という形で離散型のアルゴリズムを定義した。ここで、 t'_n は t_n に時間原点の移動を施したものである。この操作により長いパルス列に対する PRI 変換では位相 $2\pi t_n / \tau_k$ の揺らぎが時間と共に次第に拡大するのが抑制される。しかし PRI 写像は移動窓の範囲内だけの PRI 変換であり、位相の揺らぎが拡大するという現象は顕著ではないので時間原点移動は行わない。

3.2 PRI 写像からの信号の検出法

もし、ある信号源の PRI が τ_k で、そのパルス列が移動窓 $W_k(t)$ に存在していたとすると、(13) 式の PRI 写像の値は位相のそろった複素数の和となるから、時変 PRI スペクトルがピークを形成することになる。その PRI の整数倍の分数調波に相当するところの PRI ビンにおける PRI 写像の値は、PRI 変換の場合と同じ原理で抑圧される。

PRI 写像からのパルス列の検出は、時変 PRI スペクトル $|D_k(t)|$ があるしきい値を越えているか否かで判定する。すなわち、この値がしきい値を越えていれば、その PRI 軸の位置が指し示す PRI をもつパルス列が時間軸の指し示す時間に存在すると判定する。

検出のためのしきい値は雑音の統計量から決める必要があり、雑音のモデルと共に下記の2つの節で述べる。

3.3 雑音のモデルと誤警報確率

(13) 式で定義される PRI 写像 $D_k(t)$ は、PRI ビン B_k に合致する PRI をもつパルス列が存在しなくても、あるパルスペア (t_n, t_m) がたまたま $t_m - t_n \in B_k$ かつ $t_n \in W_k(t)$ という条件を満たしていれば、絶対値が1の複素数が加算されることになる。これは PRI が異なる信号源同士の相互干渉により生じるものである。そのような複素数は一般に位相がそろっていないから、 B_k に合致する PRI をもつパルス列が存在する場合のように同じ位相で積み上がることはないが、PRI 写像の雑音成分になり、誤警報の原因になる。ここではこの誤警報確率を Poisson 到着モデルを用いて求める。雑音成分解析のための Poisson 到着モデルの導入は前の論文⁸⁾で行なったが、ここではさらに進めて誤警報確率まで求めることにする。

PRI ビン B_k (中心は τ_k) と移動窓 $W_k(t)$ を任意に1つ固定し、そこでの PRI 写像の値は雑音成分であると仮定する。すなわち、移動窓内にはこの PRI ビンに合致する PRI をもつパルス列は含まれていないものとする。移動窓内でのパルスの密度を ρ とし、パルスは一様に分布しているものと仮定する。これらのパルスは実際には一定の PRI をもつパルス列の重畳されたものであるが、PRI 変換の雑音成分の予測のためには一様性の仮定は良い近似を与える⁸⁾。PRI 写像は移動窓内での PRI 変換であるからここでもこの仮定を用いる。移動窓内のパルスを左成分としてもつパルスペアで、そ

Fig. 4 False alarm probability of the PRI map

の時間間隔が PRI ビンに入るものの個数を L とおく。移動窓の幅は $w\tau_k$ であるから、移動窓内には平均 $\rho w\tau_k$ 個のパルスが存在する。また PRI ビンの幅は $b\tau_k$ であるから、各パルスについて、それとの時間間隔が PRI ビンに入るパルスの平均個数は $\rho b\tau_k$ となる。 L の平均 λ はこれらの積であり

$$\lambda = (\rho\tau_k)^2 bw \quad (15)$$

となる。 L はパラメータ λ の Poisson 分布にしたがうと仮定して、PRI 写像の雑音成分を

$$D_N = \sum_{j=1}^L e^{i\Theta_j} \quad (16)$$

によりモデル化する。ここで、 $\Theta_j, j = 1, 2, \dots, L$ は互いに独立で $[0, 2\pi]$ に一様分布する確率変数である。雑音強度を

$$I_N = \sqrt{E|D_N|^2} \quad (17)$$

で定義すると、(16) 式のモデルに対しては簡単に

$$I_N^2 = E \sum_{\ell, j=1}^L E[e^{i(\Theta_\ell - \Theta_j)} | L] = EL = \lambda \quad (18)$$

となる。ここで E は期待値を表わす。さらに、しきい値 Γ に対する誤警報確率を求めると

$$P_{FA} \equiv \mathcal{P}(|D_N| \geq \Gamma) = 1 - \Gamma \int_0^\infty \exp[\lambda(J_0(s) - 1)] J_1(\Gamma s) ds \quad (19)$$

となる。ここで $J_0(\cdot), J_1(\cdot)$ はそれぞれ 0 次と 1 次の Bessel 関数である。この式の導出は付録 A に示す。Fig. 4 には (19) 式で求めた PRI 写像の誤警報確率を示す。

3.4 データからのしきい値の決定

応用上は、与えられた一定の誤警報確率のもとで信号検出を行なうのが望ましい。このために、(19) 式をしきい値 Γ について (数値的に) 解いて

$$\Gamma = h(\lambda; P_{FA}) \quad (20)$$

とおく。Fig. 5 には、しきい値を誤警報確率ごとに λ の関数としてプロットしてある。 λ はさらにパルス密度の関数であるが、実際のパルス列は時間帯によってパルス密度が異なる。

Fig. 5 Threshold of the PRI map

そのため、移動窓 $W_k(t)$ に含まれるパルスの個数を $N_k(t)$ とし、移動窓ごとのパルス密度を

$$\rho = \frac{N_k(t)}{w\tau_k} \quad (21)$$

で、さらに λ を

$$\lambda = \frac{N_k^2(t)b}{w} \quad (22)$$

で推定する。これを (20) 式に代入した

$$\Gamma_k(t) = h\left(\frac{N_k^2(t)b}{w}; P_{FA}\right) \quad (23)$$

をしきい値として用いる。このしきい値はデータからの測定値を含む適応型のしきい値である。

3.5 分数調波成分

PRI 画像における分数調波成分は、PRI 変換の場合と同様に (8) 式で評価できる。このレベルと雑音のしきい値を比較してみる。(16) 式の D_N の分布を 2 次元の正規分布で近似すると、 $|D_N|$ は Rayleigh 分布で近似されることになり、その確率密度関数は

$$f(r) = \frac{2r}{\lambda} e^{-r^2/\lambda} \quad (24)$$

と表わせる。これは中心極限定理により、 λ が大きいときに良い近似となる。このとき誤警報確率は

$$P_{FA} \sim \int_{\Gamma}^{\infty} f(r)dr = e^{-\Gamma^2/\lambda} \quad (25)$$

で近似できる。これを Γ について解いて、(15) 式を代入すると

$$\Gamma \sim (-\log P_{FA})\sqrt{bw\rho\tau} \quad (26)$$

となる。PRI が p のパルス列を考えると、密度は $\rho = 1/p$ であり、 $\tau = lp$ の分数調波成分のところでのしきい値は

$$\Gamma \sim (-\log P_{FA})\sqrt{bw}l \quad (27)$$

となる。たとえば、 $P_{FA} = 10^{-6}$ 、 $b = 0.3$ 、 $w = 20$ とすると、 $\Gamma \sim 9.1l$ となり、(8) 式の右辺の $l/2$ に比べて遙かに大きな値になる。したがって、分数調波成分は雑音しきい値に対して無視できる程度の大きさである。

(a) Time-PRI spectrum by the PRI map

(b) Adaptive threshold for the time-PRI spectrum

(c) Detected signals by the PRI map

Fig. 6 Simulation result

3.6 シミュレーション例

PRI 画像を用いたパルス列検出の計算機シミュレーションの例を示す。

Fig. 6 に示すのは、入力パルス列が Fig. 1a に示した例の場合で信号源は 5 つであり、そのうち 1 つを除いて短いパルス列である。この入力信号に対する、時変 PRI スペクトルは Fig. 6a のようになり、(23) 式の適応型のしきい値は Fig. 6b のようになる。ここで PRI 画像のパラメータには、 $b = 0.3$ 、 $w = 20$ という値を用いた。またしきい値を決める

ための誤警報確率は $P_{FA} = 10^{-6}$ とした. 時変 PRI スペクトルがしきい値を上回っている領域は Fig. 6c に示すようになり, これが検出結果を与える. この図から明らかなように, PRI 写像を用いるパルス列検出法では, 入力信号に含まれる各信号源からのパルス列が, PRI に揺らぎをもっている, 間欠的であっても, パルス抜けがあっても, めいりょうに検出が可能になる. ただし, 実際にパルス列の存在する区間に対して検出されるのは若干狭い区間になっている. これはパルス列の両端では, 移動窓に含まれるパルスの個数が少なくなって検出しにくくなるためと考えられる.

4. 性能解析

4.1 解析の仮定と検出可能性の条件

PRI 写像の検出性能には, 設計パラメータと入力パルス列の性質とが関係する. このうち設計パラメータは, 3.1節で述べたように, PRI ビンの相対幅 b と移動窓の相対幅 w である. ここでは入力パルス列の性質を表わすために, そこに含まれる複数の信号源の1つを固定して検出すべきパルス列とし, 残りは混入パルスとして, つぎの3つのパラメータを導入する.

- ν : 検出すべきパルス列の長さ (パルスの個数)
- ζ : 検出すべきパルス列の PRI の揺らぎ幅
- q : 検出すべきパルス列の1周期中での混入パルスの平均個数

PRI の揺らぎ幅 ζ は平均 PRI が τ のとき, PRI が $[(1 - \zeta/2)\tau, (1 + \zeta/2)\tau]$ の区間で揺らぐことを意味するものとし, 揺らぎの分布はこの区間内での一様分布を仮定する. また, 混入パルスは 3.2節の雑音パルスと同様に Poisson 到着を仮定する. 混入パルスの平均個数は, 入力パルス列の密度を ρ とすると $q = \rho\tau - 1$ で与えられる. Fig. 1a のパルス列の例の場合には q は Fig. 7 のようになり, $0 \leq q \leq 5.5$ の範囲で変化する.

つぎに性能解析のための検出可能性の条件を定める. 検出すべきパルス列の入る PRI ビンと移動窓をひとつ固定し, そ

こでの PRI 写像の値を D_S とおく. しきい値を Γ とすると, 信号が検出されるためには,

$$|D_S| \geq \Gamma \quad (28)$$

となる必要がある. D_S は確率変数であり分布をもつが, その分布を求めることは複雑なので, 信号の強度 I_S を

$$I_S = \sqrt{E|D_S|^2} \quad (29)$$

で定義し, 検出可能性の条件は

$$I_S \geq \Gamma \quad (30)$$

とする. しきい値 Γ の計算には (20) 式を用いるが, その引数の λ は (15) 式から求める. $\nu' = \min(\nu, w)$ とおくと, 移動窓の中には平均 $qw + \nu'$ 個のパルスが存在するから, 密度は $\rho = (qw + \nu')/w\tau$ であり, (15) 式により

$$\lambda = \frac{(qw + \nu')^2 b}{w} \quad (31)$$

となる. また, (20) 式の誤警報確率にはシミュレーションでも用いた $P_{FA} = 10^{-6}$ を用いる.

4.2 信号の強度

前節の条件のもとで, 検出すべきパルス列の信号強度を解析的に求めることにする. 検出すべきパルス列の平均 PRI と信号の存在する PRI ビンの中心 PRI は共に τ とする. 検出すべきパルス列の到着時間を $t_1, t_2, \dots, t_\nu$ と表わす. これらは前節の仮定により, つぎの関係を満たす.

$$t_n = t_{n-1} + \tau(1 + X_{n-1}), \quad n = 2, 3, \dots, \nu \quad (32)$$

ここで, $X_n, n = 1, 2, \dots$ は PRI の揺らぎを表わす確率変数であり, 互いに独立で $[-\zeta/2, \zeta/2]$ に一様分布する.

ほかのパルスが混入している場合には, 検出すべきパルス列の本来のパルスペア以外に, 右成分が混入パルス, 左成分が混入パルス, 両成分とも混入パルス, という3種類のパルスペアが PRI ビンに入る. このことを考慮すると信号の存在する PRI ビンでの PRI 写像は

$$D_S = \sum_{n=1}^{\nu} (1 + U_n + V_n) e^{2\pi i t_n / \tau} + D'_N \quad (33)$$

で近似できる. ここで, U_n, V_n は t_n をそれぞれ左成分, 右成分としてペアを組む混入パルスの個数を表わす. また, D'_N は両成分とも混入パルスのパルスペアによる PRI 写像の要素である.

混入するパルスの密度は q/τ であり, PRI ビンの幅は $b\tau$ だから, U_n および V_n の期待値は

$$EU_n = EV_n = bq \quad (34)$$

となる. 混入パルスを Poisson モデルで扱うことにすると, これらの2乗の期待値は

$$EU_n^2 = EV_n^2 = bq + (bq)^2 \quad (35)$$

となる. また, D'_N の2乗の期待値は (15), (18) 式の計算と同様にして

$$E|D'_N|^2 = q^2 bw \quad (36)$$

Fig. 7 Average number of mixing pulses per period for a case shown in Fig. 1a

で与えられる。これらを用いて (29) 式で定義した信号の強度を計算するとつぎようになる。

$$I_S^2 = (1 + 2bq)^2 I_0^2 + (qw + 2\nu')bq \quad (37)$$

ここでも $\nu' = \min(\nu, w)$ とおいた。また I_0 は混入パルスがない場合の信号強度であり、

$$I_0^2 = \nu' \frac{1 + \text{sinc}(\zeta)}{1 - \text{sinc}(\zeta)} - \frac{2\text{sinc}(\zeta)[1 - \text{sinc}(\nu' \zeta)]}{[1 - \text{sinc}(\zeta)]^2} \quad (38)$$

で与えられる。これらの信号強度の計算の詳細は付録 B に示す。

4.3 PRI 画像の検出性能

PRI 画像のメリットは、パルス列が短くて観測時間中の一部にしか含まれていなくても、またそのパルス列の PRI が揺らいでいても検出できるという点にある。それでは、どこまで短いパルス列まで検出できるのか、さらにどの程度 PRI が揺らいでいても検出できるのかということが問題になる。ここでは、前節で導いた解析的な式を用いてそれらを定量的に評価する。

(A) 検出可能なパルス列の最小の長さ

検出すべきパルス列の長さが ν であるとする、一般には移動窓の幅は $w = \nu$ が最良の結果を与える。もし、移動窓がそれより広ければ信号強度はそのまま雑音成分だけが増加するし、それよりも狭ければ信号強度の低下の度合いが雑音強度の低下の度合いよりも大きくなるからである。したがってまず、 $w = \nu$ という条件のもとで、パルス列の長さを変えて検出性能を調べてみる。なお、あとで述べるように q が非常に小さい場合には、 w を大きくしても雑音成分が増えないことがあるがこれは例外的である。

Fig. 8 には、(37) 式で求めた信号強度 I_S と (18) 式で求めた雑音強度 I_N 、および (20) 式で求めたしきい値 Γ を ν の関数として重ねてプロットしてある。パラメータは $b = 0.3, q = 5$ としてある。この図からわかるように、 ν が小さいときには信号強度よりもしきい値のほうが大きい、 ν が大きくなるにつれ信号強度の伸びがしきい値の伸びを上回ってある ν で検出可能になる。この ν を $\nu_{\min}^*$ とおく。 $\nu_{\min}^*$ は b, ζ, q の関数である。Fig. 9 には、 $b = 0.3$ として、 $\nu_{\min}^*$ を ζ の関数としてプロットしてある。この図からわかることは、PRI の揺らぎが小さい場合 ($\zeta \leq 0.15$) には 10 パルス前後の短いパルス列でも検出可能であること、 ζ がそれより大きい場合でも $q \leq 5, \zeta \leq 0.3$ では 20 パルス以下で検出可能になることである。

長さ $\nu_{\min}^*$ のパルス列は移動窓の幅をそれと同じにして初めて検出できるものである。実際には w をあらかじめ決めておくことになるから、その w に対して検出可能なパルス列の長さを求める必要がある。その最小の長さを $\nu_{\min}$ とおく。 $\nu_{\min}$ は b, w, ζ, q の関数である。なお、 ν を w まで大きくしても検出可能にはならないこともあり、その場合には $\nu_{\min}$ は存在しない。 w の値を固定して、 $\nu_{\min}$ の値を調べたのが Fig. 10 である。この図からたとえば、揺らぎ幅が $\zeta \leq 0.15$

Fig. 8 Signal intensity and threshold, $b = 0.3, w = \nu, q = 5$.

Fig. 9 Minimum length of pulse train, $b = 0.3, w = \nu$.

で、混入パルス数が $q \leq 5$ の場合には、 $w = 10$ (Fig. 10a) としておけば、10 パルス以下のパルス列が検出可能になることがわかる。また、揺らぎ幅が $\zeta \leq 0.3$ で混入パルス数が $q \leq 5$ の場合には、 $w = 20$ (Fig. 10b) としておけば、20 パルス以下のパルス列が検出可能になることがわかる。これは 3.6 節のシミュレーション例で用いた条件に近い。

一般には移動窓の幅を大きくしていくと $\nu_{\min}$ も大きくなるが、 q が非常に小さい場合 (図では $q = 0$ がそれに相当) だけは例外で、 w を大きくすれば $\nu_{\min}$ は小さくなる。これは、その場合には (31) 式の λ が w の減少関数になり、しきい値も低下していくことに起因する。

Fig. 10c は移動窓の幅を非常に大きくして $w = 100$ としたものであるが、この場合 $\nu_{\min}$ も非常に大きくなり、たとえば $q = 5, \zeta = 0.3$ では 60 を越える。PRI 変換は実質的に移動窓の幅を非常に大きくした PRI 画像と考えることができるが、この場合には検出に必要なパルス列が非常に長くなり、それが PRI 変換の弱点になっていたと解釈することができる。

(B) 検出可能な PRI の最大の揺らぎ幅

ここまでは、PRI ビンの幅は $b = 0.3$ に固定して解析してきたが、 b を変えたときに、PRI の揺らぎに対してどこまで対処可能なのかということを調べてみる。

Fig. 11 には、信号対しきい値の比 I_S/Γ を PRI の揺らぎ幅 ζ の関数としてプロットしてある。パラメータの値は

Fig. 10 Minimum length of pulse train when w is fixed, $b = 0.3$.

$b = 0.2$, $w = \nu = 20$ とした. この I_S/Γ が 1 を越えていれば検出可能になる. なお, ζ が b よりも大きい場合の信号強度は, 混入パルスがない場合の信号強度 I_0 が b/ζ 倍に低下するのと同等であるとみなして, (37) 式の代わりに

$$I_S^2 = [(1 + 2bq)(b/\zeta)I_0]^2 + (q^2 + 2q)bv \quad (39)$$

を用いて計算を行なっている. 図からわかるように, ζ を大きくしていくと, I_S/Γ が次第に低下して, ある ζ で 1 になる. この ζ を $\zeta_{\max}$ とおく. $\zeta_{\max}$ は, b, w, ν, q の関数である. Fig. 12 には, $\zeta_{\max}$ を b の関数としてプロットしたものを示す. ここで $w = \nu = 20$ としてある. この図を見ると, $q \leq 5$, $\zeta \leq 0.3$ の範囲では, $\zeta_{\max} > b$ となっていることから, b の値を想定される PRI の揺らぎ幅の最大値に設定しておけば, PRI の揺らぎに対処可能であることがわかる.

Fig. 11 Signal-to-threshold ratio, $b = 0.2$, $w = \nu = 20$.

Fig. 12 Maximum width of the PRI fluctuations, $w = \nu = 20$.

また, b を 0.4 のあたりまで増加させることにより, $\zeta_{\max}$ は 0.35 の程度までは拡大できることがわかる.

ただし, 分解能の面からは逆に b は小さいほうが良い. PRI の接近した 2 つのパルス列を別のものとして検出するためには, それらの PRI の差が $b \times \text{PRI}$ 以上ある必要があるから, b を大きくすると分解能は落ちる. したがって, b を設定する際には, 上記の相反する 2 つの要請を考え合わせて決める必要がある.

5. ま と め

受信信号の中に PRI に揺らぎをもつ短いパルス列が存在する場合にも検出ができる PRI 写像の方法を提案した. この方法は, 長いパルス列の検出に有効な PRI 変換の方法を拡張したものである. 拡張は, Fourier 変換からウェーブレット変換への拡張を行なうのと同様のアプローチであり, 得られた PRI 写像は時間と PRI の 2 つの変数の関数であるのが特徴である. シミュレーションと性能解析の結果, PRI に揺らぎをもつ 10 ~ 20 パルス程度の短いパルス列でも検出可能であることが確認され, 今後 PRI 解析に有望な方法として応用されることが期待される.

謝辞 本研究の遂行にあたり, 三菱電機 (株) 通信機製作所の小林正明博士, 廣濱功氏, および先端技術総合研究所の岩本貴司氏との議論は有益でした. ここに記して深謝いたします.

参 考 文 献

- 1) R. G. Wiley: Electronic intelligence: The analysis of radar signals (2nd ed.), Artech House, 237/249 (1993)
- 2) J. B. Moore and V. Krishnamurthy: Deinterleaving pulse trains using discrete-time stochastic dynamic-linear models, *IEEE Trans. Signal Processing*, **42**-11, 3092/3103 (1994)
- 3) A. Logothetis and V. Krishnamurthy: An interval-amplitude algorithm for deinterleaving stochastic pulse train sources, *IEEE Trans. Signal Processing*, **46**-5, 1344/1350 (1998)
- 4) B. M. Sadler and S. D. Casey: On periodic pulse interval analysis with outliers and missing observations, *IEEE Trans. Signal Processing*, **46**-11, 2990/3002 (1998)
- 5) T. Conroy and B. Moore: The limits of extended Kalman filtering for pulse train deinterleaving, *IEEE Trans. Signal Processing*, **46**-12, 3326/3332 (1998)
- 6) R. J. Orsi, J. B. Moore and R. E. Mahony: Spectrum estimation of interleaved pulse trains, *IEEE Trans. Signal Processing*, **47**-6, 1646/1653 (1999)
- 7) 西口憲一: パルス繰り返し間隔推定のための新手法, 電子通信学会情報システム部門全国大会, 1/1 (1983)
- 8) K. Nishiguchi and M. Kobayashi: Improved algorithm for estimating pulse repetition intervals, *IEEE Trans. Aerospace and Electronic Systems*, **36**-2, 407/421 (2000)
- 9) L. シュワルツ: 超関数の理論, 岩波書店 (1971)
- 10) チャールズ K. チュウイ: ウェーブレット入門, 東京電気大学出版局 (1993)
- 11) チャールズ K. チュウイ: ウェーブレット応用, 信号解析のための数学的手法, 東京電気大学出版局 (1993)
- 12) 森口, 宇田川, 一松: 数学公式 III 特殊関数, 岩波 (1987)

[著 者 紹 介]

西 口 憲 一 (正会員)

1974 年, 京都大学理学部数学科卒業。同年三菱電機 (株) に入社。現在, 先端技術総合研究所に勤務。確率システムの解析, 推定, 最適化ならびに信号処理などの研究に従事。2003 年度本学会論文賞を受賞。システム制御情報学会, IEEE などの会員 (工学博士)。

《 付 録 》

A. 誤警報確率の導出

誤警報確率を求めるには, (16) 式でモデル化した PRI 写像の雑音の確率密度関数を求める必要がある。PRI 写像の値は複素数であるが, これを 2 次元の実数とみなして, 2 次元空間上での確率密度関数を計算する。確率密度関数は特性関数の Fourier 変換であるから, 特性関数がわかれば良い。まず, PRI ビンへの入力がないときには PRI 写像は

$$D_1 = e^{i\Theta} \quad (\text{A.1})$$

となる。ここで, Θ は $[0, 2\pi]$ で一様分布をする確率変数である。PRI 写像の 2 次元分布の特性関数のパラメータを ξ, η とすると, 1 個だけの入力に対する特性関数 ϕ_1 は, ξ, η の

空間での距離 $s = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ だけの関数になって,

$$\begin{aligned} \phi_1(s) &= E \exp[i(\xi \cos \Theta + \eta \sin \Theta)] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp[i(\xi \cos \theta + \eta \sin \theta)] d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp[is \cos \theta] d\theta = J_0(s) \quad (\text{A.2}) \end{aligned}$$

と表わされる。ここで $J_0(\cdot)$ は 0 次の Bessel 関数である。PRI ビンへの入力がないときには PRI 写像は

$$D_\ell = \sum_{j=1}^{\ell} e^{i\Theta_j} \quad (\text{A.3})$$

となるが, $\Theta_j, j = 1, \dots, \ell$ は独立であるから, この特性関数は 1 個だけの場合の特性関数の ℓ 乗になる。PRI ビンへの到着個数 L はパラメータ λ の Poisson 分布にしたがうから, その確率分布は

$$p_\ell \equiv \mathcal{P}(L = \ell) = \frac{\lambda^\ell}{\ell!} e^{-\lambda}, \quad \ell = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{A.4})$$

であり, 平均値と分散は共に λ となる。これより雑音だけの場合の PRI 写像の特性関数は, 距離 s だけの関数として表わせて

$$\begin{aligned} \phi(s) &= \sum_{\ell=0}^{\infty} p_\ell J_0^\ell(s) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\lambda^\ell}{\ell!} e^{-\lambda} J_0^\ell(s) \\ &= \exp[\lambda(J_0(s) - 1)] \quad (\text{A.5}) \end{aligned}$$

となる。 D_N の 2 次元空間での確率密度関数はこれを Fourier 変換すれば求められる。距離 $s = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ だけの関数の Fourier 変換はまた距離 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ だけの関数になるから,

$$\begin{aligned} \hat{\phi}(r) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(s) e^{-i(x\xi + y\eta)} d\xi d\eta \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \phi(s) e^{-irs \cos \theta} s d\theta ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} s \phi(s) J_0(rs) ds \quad (\text{A.6}) \end{aligned}$$

となる。これから $|D_N|$ の確率密度関数が得られて

$$p(r) = 2\pi r \hat{\phi}(r) = \int_0^{\infty} r s \phi(s) J_0(rs) ds \quad (\text{A.7})$$

となる。

しきい値を Γ としたときの誤警報確率は

$$P_{FA}(\Gamma) \equiv \mathcal{P}(|D_N| > \Gamma) = 1 - P(\Gamma) \quad (\text{A.8})$$

と表わされる。ここで $P(\cdot)$ は累積分布関数である。(A.7) 式を用いて累積分布関数を計算すると

$$\begin{aligned} P(u) &= \mathcal{P}(|D_N| \leq u) = \int_0^u p(r) dr \\ &= \int_0^{\infty} \phi(s) \int_0^u r s J_0(rs) dr ds \\ &= \int_0^{\infty} \phi(s) u J_1(us) ds \quad (\text{A.9}) \end{aligned}$$

となる. ここで, $J_1(\cdot)$ は 1 次の Bessel 関数であり, 関係式^{12, p. 189)}

$$\int_0^u rs J_0(rs) dr = u J_1(su) \quad (\text{A.10})$$

を用いた. (A.9) 式を (A.8) 式に代入すれば, 誤警報確率

$$P_{\text{FA}}(\Gamma) = 1 - \Gamma \int_0^\infty \phi(s) J_1(\Gamma s) ds \quad (\text{A.11})$$

を得る.

B. 信号強度の計算

$\nu \leq w$ と仮定して計算を行なう. そうでない場合には ν を $\nu' = \min(\nu, w)$ で置き換えれば良い. まず混入パルスがない ($q = 0$) ときの信号強度を調べる. この場合, τ に対応する PRI ピンでの PRI 写像は

$$D_0 = \sum_{n=1}^{\nu} e^{2\pi i t_n / \tau} \quad (\text{B.1})$$

となる. 一般に X を $[-\zeta/2, \zeta/2]$ で一様分布する確率変数としたとき,

$$\begin{aligned} E e^{2\pi i X} &= \int_{-\zeta/2}^{\zeta/2} e^{2\pi i x} \frac{1}{\zeta} dx = \left[\frac{1}{2\pi i \zeta} e^{2\pi i x} \right]_{-\zeta/2}^{\zeta/2} \\ &= \frac{e^{\pi i \zeta} - e^{-\pi i \zeta}}{2\pi i \zeta} = \frac{\sin(\pi \zeta)}{\pi \zeta} \equiv \text{sinc}(\zeta) \quad (\text{B.2}) \end{aligned}$$

が成立する. (32) 式を (B.1) 式に代入し, (B.2) 式を用いて D_0 の絶対値の 2 乗の期待値を計算すると

$$\begin{aligned} I_0^2 &\equiv E |D_0|^2 = E \sum_{n,m=1}^{\nu} e^{2\pi i (t_m - t_n) / \tau} \\ &= \sum_{n,m=1}^{\nu} \text{sinc}^{|m-n|}(\zeta) \\ &= \nu \frac{1 + \text{sinc}(\zeta)}{1 - \text{sinc}(\zeta)} - \frac{2 \text{sinc}(\zeta) [1 - \text{sinc}^\nu(\zeta)]}{[1 - \text{sinc}(\zeta)]^2} \quad (\text{B.3}) \end{aligned}$$

となる. これらを用いてほかのパルスが混入している場合の信号の強度を計算する.

$$\begin{aligned} I_S^2 &\equiv E \left| \sum_{n=1}^{\nu} (1 + U_n + V_n) e^{2\pi i t_n / \tau} \right|^2 + E |D_N|^2 \\ &= \sum_{m,n=1}^{\nu} E [(1 + U_m + V_m)(1 + U_n + V_n) \\ &\quad \cdot e^{2\pi i (t_m - t_n) / \tau}] + q^2 bw \\ &= \sum_{m,n=1}^{\nu} E (1 + U_m + V_m)(1 + U_n + V_n) \\ &\quad \cdot E e^{2\pi i (t_m - t_n) / \tau} + q^2 bw \quad (\text{B.4}) \end{aligned}$$

最後の辺の最初の期待値は

$$\begin{aligned} &E(1 + U_m + V_m)(1 + U_n + V_n) \\ &= (1 + 2bq)^2 + E(U_m - bq)(U_n - bq) \\ &\quad + E(V_m - bq)(V_n - bq) \\ &= \begin{cases} (1 + 2bq)^2 + 2bq, & n = m \\ (1 + 2bq)^2, & n \neq m \end{cases} \quad (\text{B.5}) \end{aligned}$$

となる. これを (B.4) 式へ代入して, (B.3) 式を用いると

$$\begin{aligned} I_S^2 &= \sum_{n,m=1}^{\nu} \text{sinc}^{|m-n|}(\zeta) (1 + 2bq)^2 + 2\nu bq + q^2 bw \\ &= (1 + 2bq)^2 I_0^2 + (qw + 2\nu)bw \quad (\text{B.6}) \end{aligned}$$

を得る.