単一種類の閉軌道の繰り返しを用いた平面を転がる球の接触点の制御†

中 島 明*・長 瀬 賢 二*・早 川 義 一*

Control of Contact Coordinates between a Sphere and a Plane with Pure Rolling Contact
by Using Iterative Closed Paths†

Akira NAKASHIMA*, Kenji NAGASE* and Yoshikazu HAYAKAWA*

In this paper, we discuss control of contact coordinates between a sphere and a plane with pure rolling contact by using iterative closed paths on the sphere. First, we show that there exist two lines with fixed-length interval on reachable area by the closed path. Utilizing the result, we propose a method which brings all the contact coordinates to a target point by the iteration of a finite number of the closed paths. A numerical example shows the effectiveness of the proposed method.

Key Words: nonholonomic constraints, sphere rolling on a plane, closed path, finite number of iterations

1. はじめに

近年、多指ハンドロボットによる対象物の把握・操りにおいて盛んな研究がなされている¹⁾。そのなかでも、転がり接触での対象物の把握・操りでは、拘束が非ホロノミック²⁾であるため、接触点の制御が可能である。しかし、転がり接触での把握・操り系は、従来扱われる非ホロノミック系に比べて複雑であるため、対象物の把握・操りと接触点の制御は同時には実現されていなかった。筆者ら⁴⁾は、6関節2本指ロボットハンドによる純粋転がり接触での対象物の把握・操りにおいて、対象物の位置・姿勢、内力の軌道追従と、接触点のレギュレーションを同時に達成する一手法を提案した。基本となる考え方は、(1) 対象物の位置・姿勢、内力と接触点の一部に対する線形化補償器を設計し、(2) 線形化された一部の接触点において単一種類の閉軌道を繰り返すことで、接触点のすべてをレギュレーションする、というものである。なお、(2)においては、指を球、対象物を直方体と考えることにより、平面を転がる球の運動学モデル⁵⁾に対する接触点のレギュレーション問題を考えた。

平面を転がる球の運動学モデルは対称アフィンな非ホロノミックシステムであるので、時不変で滑らかな状態フィードバックでは安定化できない⁶⁾。またこのシステムは Chained form⁷⁾のような正準形に変換できないため、制御はより難しく、一般的な手法は確立されていない。このシステムに対し

て、水野ら⁸⁾は、時間軸状態制御形⁹⁾の1次近似システムが持つ不可制御な状態量が、ダイナミクスが遅いこと、ならびに、時間軸と座標の取替えにより入れ替わることに着目し、取り替えて繰り返すことで全状態量を逐次的に原点に収束させる手法を提案した。この手法は、線形近似システムに基づいているため、線形システム理論を用いてさまざまなコントローラを設計できる。しかし、実際の非線形システムにおける収束については十分な議論はなされておらず、また、初期値が原点から離れている場合には、線形化を行なう点の取替えを順次行なう必要がある。一方 Bicchi ら¹¹⁾は、各入力に対応したベクトル場の微分方程式の解である flow⁷⁾を求め、それらを順に組み合わせることで、目標状態までの入力の軌道を生成する手法を提案した。しかしながら、flowの合成関数として与えられる多変数の非線形方程式を数値的に解く必要があるため、局所最小値の存在により解が求まらない可能性がある。さらに、外乱などにより当初の軌道からずれた場合は、flowの組み合わせを改めて求める必要がある。また Li ら¹⁰⁾は、状態量の一部において閉軌道を行なうことで、残りの状態量に変化(ホロノミー)が生じることに着目し、複数の閉軌道を用いて各状態量を順次目標状態へと移動させる手法を提案した。しかし、この手法は、一つの閉軌道により状態量の一部を目標状態へ移動させている間は、ほかの状態量はモデルに従うことを前提としているため、モデル化誤差や外乱などに弱いことが予想される。

一方、筆者らは前述の文献4)において、球上の接触点において、3つのパラメータにより特徴付けられる単一種類の閉軌道を考え、平面上の接触点と相対姿勢を任意の状態から目標状態へと近づけるような閉軌道のパラメータが必ず存在することを示した。また、そのことに着目し、現在の状態と

† 第31回制御理論シンポジウムにて発表(2002・10)

* 名古屋大学大学院工学研究科 名古屋市千種区不老町

* Faculty of Engineering, Nagoya University, Furo-cho, Chikusa-ku, Nagoya

(Received July 30, 2003)

(Revised December 18, 2003)

Fig. 1 A sphere rolling on a plane

目標状態の差のノルムを評価関数として、その最小化問題を解くことによりパラメータを決定する手法を提案した。この手法の評価関数は現在の状態と目標値のみによって決まるため、初期状態から目標状態までの軌道計画を行なう必要がなく、単に現在の状態から目標状態へと近づくパラメータを決定して繰り返すだけで良いという特徴を持つ。したがって、モデル化誤差や外乱に比較的強い手法と考えられる。しかしながら、そこでは一回の開軌道により目標状態へと近づけることが証明されているのみであり、有限回での到達は保証されていない。また、軌道を得るには3変数の非線形方程式を数値的に解く必要があり、局所解に陥る場合がある。

本研究では、文献4)で提案した単一種類の閉軌道を用いて、目標状態への到達に要する閉軌道の繰り返しの回数が保証された接触点のレギュレーションを実現するための閉軌道のパラメータ決定アルゴリズムを提案する。はじめに、接触状態を特徴付ける平面において、1回の閉軌道により到達可能な領域として、原点（現在の接触点位置）で交差する有限な長さを持つ2本の直線が存在することを示す。つぎに、このことを利用したアルゴリズムについて述べる。基本的なアイデアは、閉軌道を繰り返すことにより、上記で述べた直線上を移動しながら目標点に到達しようというものである。本手法は、閉軌道を繰り返す際に、解の存在が保証された1変数の非線形方程式を解くだけで良いので、二分法¹²⁾などにより解を確実に得ることができる。最後に、手法の有効性を数値シミュレーションにより確認する。

2. 対象モデルおよび準備

Fig. 1のような、ハンドの指先が対象物表面を転がる運動を抽象化した、平面を転がる球のモデルを考える。Σ_Fは球の中心に固定した座標系、Σ_Oは平面上に固定した座標系である。球上と平面上の接触点を表す

$$\text{球上の接触点座標: } \alpha_f := [u_f \ v_f]^T \in \mathbb{R}^2 \quad (1)$$

$$\text{平面上の接触点座標: } \alpha_o := [u_o \ v_o]^T \in \mathbb{R}^2 \quad (2)$$

は、それぞれ Fig. 1 のように極座標と直交座標にとっている。この α_f , α_o と指・対象物表面を表す写像⁷⁾ $c_f(\cdot), c_o(\cdot) : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^3$ を用いて、Σ_F で表わした接触点と Σ_O で表わした接触点は $c_f(\alpha_f)$, $c_o(\alpha_o)$ と表わされる。また、左上の破線で囲まれた図は、接触点の近傍を拡大したものであり、説明のため球と平面を離して描いてある。この図において、座標系 Σ_F は、原点を球上の接触点 (u_f, v_f) , x, y, z 軸の方向をそれぞれ $\partial c_f / \partial u_f$, $\partial c_f / \partial v_f$, $(\partial c_f / \partial u_f) \times (\partial c_f / \partial v_f)$ とする直交座標系であり、また座標系 Σ_O も c_o を用いて同様に定義される直交座標系である $((\partial c_f / \partial u_f)^T (\partial c_f / \partial v_f) = 0, (\partial c_o / \partial u_o)^T (\partial c_o / \partial v_o) = 0$ であることに注意)。これら Σ_F と Σ_O の x 軸のなす角を

$$\text{球と平面の相対姿勢: } \psi \in \mathbb{R}^1 \quad (3)$$

とする。以上を用いると、接触状態は、接触座標

$$\eta := [\alpha_f^T \ \alpha_o^T \ \psi]^T \in \mathbb{R}^5 \quad (4)$$

により表現される。本研究では、球と平面の相対運動は純粋転がり接触⁷⁾であると仮定する。純粋転がり接触は、Σ_O に対する Σ_F の相対速度を Σ_F で表わしたものを $V_C := [v_{Cx} \ v_{Cy} \ v_{Cz} \ \omega_{Cx} \ \omega_{Cy} \ \omega_{Cz}]^T \in \mathbb{R}^6$ とすれば⁷⁾, $v_{Cx} = v_{Cy} = v_{Cz} = \omega_{Cx} = \omega_{Cy} = \omega_{Cz} = 0$ となるような剛体間の運動として表現される。すなわち、接触点において横滑りせず、接触点法線回りに回転しない幾何学的拘束を示している。このとき、 $\dot{\eta}$ と $\dot{\alpha}_f$ の関係は以下ようになる^{5), 7)}。

$$\begin{bmatrix} \dot{\alpha}_f \\ \dot{\alpha}_o \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \rho \cos v_f \cos \psi & -\rho \sin \psi \\ -\rho \cos v_f \sin \psi & -\rho \cos \psi \\ \sin v_f & 0 \end{bmatrix} \dot{\alpha}_f \quad (5)$$

ただし、 ρ は球の半径である。

(5) 式において η のレギュレーションを考えるにあたり、目標状態は原点とし、 $\dot{\alpha}_f$ が直接制御できるものとする。したがって、球上の接触点 α_f はすでに原点にあるものとして、残りの状態量

$$\tilde{\eta} := [\alpha_o^T \ \psi]^T \in \mathbb{R}^3 \quad (6)$$

を、 α_f における単一種類の閉軌道を繰り返すことで、原点へと持っていくことを考える。文献4)で提案されている球上の閉軌道を Fig. 2 に示す。左図が球上 (α_f) の閉軌道、右図は閉軌道による平面上 (α_o) の軌跡であり、 A_f が閉軌道開始時の球上の接触点、 A_o が A_f に対応した対象物上の接触点を表わしている。閉軌道は、上段左図のように、球上において θ_1, θ_2 によって定まる経路 $A_f \rightarrow B_f \rightarrow C_f \rightarrow D_f \rightarrow E_f (A_f)$ を、下段左図のように赤道から x 軸回りに φ だけ傾いて行なうものである。(5) 式をこの経路に沿って積分することにより、一回の閉軌道により生じる $\tilde{\eta}$ の変化量 $\Delta \tilde{\eta}$ を求めれば、

Fig. 2 Proposed closed path on the sphere

$$\Delta \tilde{\eta}(\theta_1, \theta_2, \varphi) := [\Delta \alpha_o^T \Delta \psi]^T \in \mathbb{R}^3 \quad (7)$$

ただし,

$$\Delta \alpha_o(\theta_1, \theta_2, \varphi) = R_\varphi(\varphi) \Delta \alpha_o'(\theta_1, \theta_2) \quad (8)$$

$$\Delta \psi(\theta_1, \theta_2) = -\theta_1 \sin \theta_2 \quad (9)$$

$$R_\varphi(\varphi) := \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\Delta \alpha_o'(\theta_1, \theta_2) := \begin{bmatrix} \Delta u_o' \\ \Delta v_o' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\rho \theta_1 + \rho(\cot \theta_2 + \theta_2) \sin(\theta_1 \sin \theta_2) \\ \rho(\cot \theta_2 + \theta_2)(1 - \cos(\theta_1 \sin \theta_2)) \end{bmatrix} \quad (11)$$

である。閉軌道を決めるパラメータは $\theta_1, \theta_2, \varphi$ の3つであり、それぞれの範囲は以下のようである。

$$-\pi < \theta_1 < \pi, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta_2 < \frac{\pi}{2}, \quad -\pi < \varphi < \pi \quad (12)$$

(11) 式の $\Delta \alpha_o'$ は $\varphi = 0$ のときに生じる変化 (Fig. 2 上段右図) であり、(8) 式の実際の変化量 $\Delta \alpha_o$ は、 $\Delta \alpha_o'$ を回転行列 R_φ により回転したものである (Fig. 2 下段右図)。

著者は文献4)において、以下の定理を示した。

《定理1》^{4), 14)} (6) 式で与えられる $\tilde{\eta} \in \mathbb{R}^3$ と (7)~(11) 式により与えられる変化量 $\Delta \tilde{\eta} \in \mathbb{R}^3$ を考える。このとき、任意の $\tilde{\eta}$ に対して、以下の式を満たす $\theta_1, \theta_2, \varphi$ が存在する。

$$\|\tilde{\eta} + \Delta \tilde{\eta}\| < \|\tilde{\eta}\| \quad (13)$$

定理1より、原点へ近づくための閉軌道パラメータ $\theta_1, \theta_2, \varphi$ の存在が保証されているので、文献4)では以下の最小化問題を解いてパラメータ $\theta_1, \theta_2, \varphi$ を決定することを考えた。

$$(\theta_1[k], \theta_2[k], \varphi[k]) = \arg \min_{\theta_1[k], \theta_2[k], \varphi[k]} \|\tilde{\eta}[k] + \Delta \tilde{\eta}[k]\| \quad (14)$$

ただし $\tilde{\eta}[k]$ は k 回目の閉軌道の開始位置である。(14) 式は現在位置 $\tilde{\eta}[k]$ を用いてパラメータを決定する、ある種のフィードバックのような構成になっているため、外乱やモデル化誤差などに強いことが期待できる。しかし一方で、この手法では、3変数の非線形方程式を数値的に解く必要があり、また、目標状態へ有限回の閉軌道で到達できる保証もない。

以降では、目標状態への到達に要する閉軌道の繰り返しの回数を保証したパラメータ決定アルゴリズムについて述べる。アルゴリズムの詳細は第4章で述べるが、基本的なアイデアは、

(1) 接触点位置を特徴付ける平面において、1回の閉軌道で到達が可能な領域として、原点(現在の接触点位置)で交差する有限な長さを持つ2本の直線を求める(第3章)

(2) 閉軌道を繰り返すことで、その直線上を移動しながら目標点へ到達する(第4章)

というものである。平面の任意の点は1次独立な2つのベクトルの線形結合で表わされるので、上記で述べた直線上を移動することで必ず目標点に到達できることに注意されたい。

3. 主 結 果

変化量 $\Delta \tilde{\eta}$ において、以下の補題が成り立つ。

[補題1]^{4), 13)} (7) 式の変化量 $\Delta \tilde{\eta}$ は以下の性質を持つ。

(i) $\Delta \alpha_o', \Delta \psi$ は θ_1, θ_2 に関して連続である。

(ii) $\theta_1 = 0$ または $\theta_2 = 0 \iff \|\Delta \alpha_o'\| = 0 \quad (15)$

$\theta_1 = 0$ または $\theta_2 = 0 \iff \Delta \psi = 0 \quad (16)$

この補題1は変化量 $\Delta \alpha_o', \Delta \psi$ のパラメータ θ_1, θ_2 に関する性質を示している。

閉軌道の傾きを表わすパラメータ φ について、以下の補題が成り立つ。

[補題2] (6), (7) 式の $\tilde{\eta}, \Delta \tilde{\eta}$ を考える。このとき、 $\|\tilde{\eta} + \Delta \tilde{\eta}\|$ を最小化する φ は、以下の式を満たす。

$$R_\varphi \frac{\Delta \alpha_o'}{\|\Delta \alpha_o'\|} = -\frac{\alpha_o}{\|\alpha_o\|} \quad (17)$$

(証明) (7), (8) 式より $\Delta \tilde{\eta} = [(R_\varphi \Delta \alpha_o')^T \Delta \psi]^T$ を用いると、

$$\begin{aligned} \|\tilde{\eta} + \Delta \tilde{\eta}\|^2 &= \|\alpha_o\|^2 + \psi^2 + \underbrace{2\alpha_o^T (R_\varphi \Delta \alpha_o')}_A + 2\psi \Delta \psi + \|\Delta \alpha_o'\|^2 + \Delta \psi^2 \end{aligned}$$

となる。ここで、(10) 式より $R_\varphi^T R_\varphi = I_2$ を用いた。上式において、 φ に依存する項は、 α_o と $R_\varphi \Delta \alpha_o'$ の内積である A のみである。 R_φ は回転行列であり、 $\Delta \alpha_o'$ の方向を変えるのみである。したがって、 A は α_o と $R_\varphi \Delta \alpha_o'$ のなす角が π となるときの、すなわち φ が (17) 式を満たすとき最小化される。□

補題2の幾何学的な解釈を述べる。(7), (8) 式より、変化量

Fig. 3 Reachable area generated by the closed path

$\Delta\tilde{\eta}$ は

$$\Delta\tilde{\eta} = \begin{bmatrix} R_\varphi \Delta\alpha'_o \\ \Delta\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \|\Delta\alpha'_o\| \times R_\varphi \frac{\Delta\alpha'_o}{\|\Delta\alpha'_o\|} \\ \Delta\psi \end{bmatrix} \quad (18)$$

のように表現することができる。これを図に表わすと、Fig. 3 右図のようになる。Fig. 3 左図において、点 P は $\tilde{\eta}$ 空間において現在の接触状態 $\tilde{\eta} := [\alpha_o^T \ \psi]^T = [u_o \ v_o \ \psi]^T$ を表わしており、点 P を原点として、 $(\|\Delta\alpha'_o\|, \Delta\psi)$ 平面の到達可能領域が斜線で表わされている。この領域を Ω と呼ぶこととすると、(18) 式より、 $\Delta\tilde{\eta}$ の取り得る領域は、この領域 Ω を $\Delta\psi$ 軸回りに φ だけ回転したものである。したがって、(17) 式の幾何学的な解釈は、Fig. 3 右図のように、到達可能領域 Ω が $-\frac{\alpha_o}{\|\alpha_o\|}$ の方向を向くように φ を決定することにより、 $\theta_1, \theta_2, \varphi$ のうち、 φ について $\|\tilde{\eta} + \Delta\tilde{\eta}\|$ が最小化される、というものである。そこで、(17) 式の φ を用いることとすると、 $\|\tilde{\eta} + \Delta\tilde{\eta}\|$ は

$$\begin{aligned} \|\tilde{\eta} + \Delta\tilde{\eta}\| &= \left\| \begin{bmatrix} (\|\alpha_o\| - \|\Delta\alpha'_o\|) \frac{\alpha_o}{\|\alpha_o\|} \\ \psi + \Delta\psi \end{bmatrix} \right\| \\ &= \sqrt{(\|\alpha_o\| - \|\Delta\alpha'_o\|)^2 + (\psi + \Delta\psi)^2} \quad (19) \end{aligned}$$

となる。ここで $\|\Delta\alpha'_o\|$, $\Delta\psi$ は θ_1, θ_2 の関数であるので、以降では、 (θ_1, θ_2) によって特徴づけられる $(\|\Delta\alpha'_o\|, \Delta\psi)$ 平面における到達可能領域 Ω の性質について考えていく。

まず、到達可能領域 Ω について以下の補題を示す。

[補題 3] (9), (11) 式で与えられる $(\|\Delta\alpha'_o\|, \Delta\psi)$ 平面における到達可能領域 Ω を考える。このとき、 Ω は $\|\Delta\alpha'_o\|$ 軸に関して対称である。

(証明) $\Delta\psi$ と $-\Delta\psi$ となる (θ_1, θ_2) に対して $\|\Delta\alpha'_o\|$ が不変であることを示す。 $(\theta_1, \theta_2) = (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$ のとき $\Delta\psi = \Delta\hat{\psi}$, $\Delta\alpha'_o = [\Delta\hat{u}'_o \ \Delta\hat{v}'_o]^T$ であるとする。このとき、 $\Delta\psi = -\Delta\hat{\psi}$ となるのは (9) 式より $(\theta_1, \theta_2) = (-\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$ または $(\hat{\theta}_1, -\hat{\theta}_2)$ のときである。このときの $\Delta\alpha'_o$ は (11) 式より、

$$\Delta\alpha'_o(-\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) = \begin{bmatrix} -\Delta\hat{u}'_o \\ \Delta\hat{v}'_o \end{bmatrix}, \quad \Delta\alpha'_o(\hat{\theta}_1, -\hat{\theta}_2) = \begin{bmatrix} \Delta\hat{u}'_o \\ -\Delta\hat{v}'_o \end{bmatrix}$$

であるので、

$$\|\Delta\alpha'_o(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)\| = \|\Delta\alpha'_o(-\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)\| = \|\Delta\alpha'_o(\hat{\theta}_1, -\hat{\theta}_2)\| \quad (20)$$

となる。ゆえに、 Ω は $\|\Delta\alpha'_o\|$ 軸に関して対称である。□

到達可能領域 Ω について、以下の定理が成り立つ。

《定理 2》 (9), (11) 式の $\Delta\alpha'_o$, $\Delta\psi$ を考える。このとき

$$-\frac{\pi}{2} < \varepsilon < \frac{\pi}{2} \quad (21)$$

を満たす任意の ε に対して、以下の式が成り立つ θ_1, θ_2 が存在する。

$$\Delta\psi = \varepsilon, \quad \|\Delta\alpha'_o\| = \rho|\varepsilon| \quad (22)$$

(証明) $\varepsilon = 0$ のときは補題 1(ii) より明らかであるので、以降では $\varepsilon \neq 0$ として考える。(9) 式より $\Delta\psi = -\theta_1 \sin \theta_2$ であり、(12) 式より $-\pi < \theta_1 < \pi$, $-\frac{\pi}{2} < \theta_2 < \frac{\pi}{2}$ であるので、明らかに $\Delta\psi = -\theta_1 \sin \theta_2 = \varepsilon$ を満たす θ_1, θ_2 が存在する。このとき、上式より

$$\theta_1 = -\frac{\varepsilon}{\sin \theta_2} \quad (23)$$

であるので、 $-\pi < \theta_1 < \pi$ が存在するための θ_2 の範囲は、 $-\pi < \theta_1 < \pi$ に (23) 式を代入して解くことにより、 ε を用いて

$$\begin{aligned} -\frac{\pi}{2} < \theta_2 < \sin^{-1}\left(-\frac{\varepsilon}{\pi}\right) \text{ または } \sin^{-1}\left(\frac{\varepsilon}{\pi}\right) < \theta_2 < \frac{\pi}{2} \quad (\varepsilon > 0) \\ -\frac{\pi}{2} < \theta_2 < \sin^{-1}\left(\frac{\varepsilon}{\pi}\right) \text{ または } \sin^{-1}\left(-\frac{\varepsilon}{\pi}\right) < \theta_2 < \frac{\pi}{2} \quad (\varepsilon < 0) \end{aligned} \quad (24)$$

と表現される。

つぎに、任意の $\varepsilon \neq 0$ に対して $\|\Delta\alpha'_o\| = \rho|\varepsilon|$ を満たす θ_1, θ_2 が存在することを示す。(23) 式を用いて $\|\Delta\alpha'_o(\theta_1, \theta_2)\|^2$ から θ_1 を消去すると、 $\|\Delta\alpha'_o\|^2$ は以下のように θ_2 と ε の関数になる。

$$\|\Delta\alpha'_o(\varepsilon, \theta_2)\|^2 = \rho^2 \frac{\varepsilon^2 - 2(\cos \theta_2 + \theta_2 \sin \theta_2)\varepsilon \sin \varepsilon + 2(\cos \theta_2 + \theta_2 \sin \theta_2)^2(1 - \cos \varepsilon)}{\sin^2 \theta_2} \quad (25)$$

$\varepsilon = -\theta_1 \sin \theta_2$ は θ_1, θ_2 に関して連続であるので、補題 1(i) より (25) 式は ε, θ_2 に関して連続である。ここで、補題 3 より $\|\Delta\alpha'_o\|$ は $\Delta\psi = \varepsilon$ に関して対称であるから、 $\varepsilon > 0$ の場合のみについて考えればよい。また、 θ_2 についても、(25) 式より $\|\Delta\alpha'_o(\varepsilon, \theta_2)\| = \|\Delta\alpha'_o(\varepsilon, -\theta_2)\|$ であることから $\theta_2 > 0$ の場合のみについて考えればよい。したがって、 $\varepsilon > 0, \theta_2 > 0$ であるとして、

$$\|\Delta\alpha'_o(\varepsilon, \theta_2)\|^2 = (\rho\varepsilon)^2 \quad (26)$$

を満たす θ_2 が (24) 式の範囲において存在することを示せば良いことになる。このためには、中間値の定理より、 $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$ を満たす任意の ε に対して

$$\|\Delta\alpha'_o(\varepsilon, \theta_{2L})\|^2 \leq (\rho\varepsilon)^2 \leq \|\Delta\alpha'_o(\varepsilon, \theta_{2U})\|^2 \quad (27)$$

を満たす θ_{2L} , θ_{2U} が存在すればよい. θ_{2L} , θ_{2U} を (24) 式にある θ_2 の範囲の上下限値にとることにより,

$$\begin{aligned} \lim_{\theta_{2L} \rightarrow \frac{\pi}{2}} \|\Delta\alpha'_o(\varepsilon, \theta_{2L})\|^2 &= \rho^2 \left\{ \varepsilon^2 - \pi\varepsilon \sin \varepsilon + \frac{\pi^2}{2}(1 - \cos \varepsilon) \right\} \\ \lim_{\theta_{2U} \rightarrow \sin^{-1} \frac{\varepsilon}{\pi}} \|\Delta\alpha'_o(\varepsilon, \theta_{2U})\|^2 &= \rho^2 \left\{ \pi^2 - \frac{2\pi^2}{\varepsilon} \sin \varepsilon \Theta + \frac{2\pi^2}{\varepsilon^2}(1 - \cos \varepsilon)\Theta^2 \right\} \end{aligned}$$

ただし $\Theta := (\cos \theta_2 + \theta_2 \sin \theta_2)|_{\theta_2 = \sin^{-1}(\frac{\varepsilon}{\pi})}$ である. したがって, (27) 式より, $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$ において

$$\varepsilon^2 - \pi\varepsilon \sin \varepsilon + \frac{\pi^2}{2}(1 - \cos \varepsilon) < \varepsilon^2 \quad (28)$$

$$\pi^2 - \frac{2\pi^2}{\varepsilon} \sin \varepsilon \Theta + \frac{2\pi^2}{\varepsilon^2}(1 - \cos \varepsilon)\Theta^2 > \varepsilon^2 \quad (29)$$

が成り立つことを示せばよい.

$$1) \quad \|\Delta\alpha'_o(\varepsilon, \theta_{2L})\|^2 \leq (\rho\varepsilon)^2$$

(28) 式が成り立つ条件は以下になる.

$$\frac{\pi^2}{2}(1 - f(\varepsilon)) < 0 \quad (30)$$

ただし

$$f(\varepsilon) := \cos \varepsilon + \frac{2}{\pi} \varepsilon \sin \varepsilon \quad (31)$$

である. $f(\varepsilon)$ を ε に関して微分すると

$$f'(\varepsilon) = \left(\frac{2}{\pi} - 1 \right) \sin \varepsilon + \frac{2}{\pi} \varepsilon \cos \varepsilon \quad (32)$$

となる. ただし $f' := \frac{df}{d\varepsilon}$ であり, 以下本証明中では, 関数の右肩添え字 $\prime$ は ε に関する微分を表わす. $f'(\varepsilon) = 0$ より

$$\frac{2}{\pi - 2} \varepsilon = \tan \varepsilon \quad (33)$$

となる. $\frac{2}{\pi - 2} \varepsilon$, $\tan \varepsilon$ は単調増加関数であり, その傾きは

$$\left(\frac{2}{\pi - 2} \varepsilon \right)' \bigg|_{\theta_2=0, \frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi - 2} > 1, \quad \begin{cases} (\tan \varepsilon)'|_{\varepsilon=0} = 1 \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\tan \varepsilon)' = \infty \end{cases}$$

であることから, $f'(\varepsilon)$ は $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$ において $f'(\varepsilon^*) = 0$ となる点 ε^* を 1 つ持つ. つぎに, (31), (32) 式より, $\varepsilon = 0, \frac{\pi}{2}$ での $f'(\varepsilon)$, $f(\varepsilon)$ の値を調べると, $f(\varepsilon)$ の増減表は以下のようになる.

ε	0	...	ε^*	...	$\frac{\pi}{2}$
f'	0	+	0	-	$\frac{2}{\pi} - 1$
f	1	/	$f(\varepsilon^*)$	\	1

よって,

$$f(\varepsilon) > 1, \quad 0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$$

であり, (30) 式が成り立つので, (28) 式が成り立つ.

$$2) \quad (\rho\varepsilon)^2 \leq \|\Delta\alpha'_o\|^2(\varepsilon, \theta_{2U})$$

(29) 式が成り立つ条件は以下になる.

$$\begin{aligned} \frac{\pi^2}{\varepsilon^2} - \frac{2\pi^2}{\varepsilon^3} \sin \varepsilon \Theta + \frac{2\pi^2}{\varepsilon^4}(1 - \cos \varepsilon)\Theta^2 &= \frac{2\pi^2}{\varepsilon^4}(1 - \cos \varepsilon) \left\{ \Theta - \frac{\varepsilon \sin \varepsilon}{2(1 - \cos \varepsilon)} \right\}^2 \\ &\quad + \frac{\pi^2}{\varepsilon^2} \left\{ 1 - \frac{\sin^2 \varepsilon}{2(1 - \cos \varepsilon)} \right\} \\ &\geq g(\varepsilon) > 1 \end{aligned} \quad (34)$$

ただし

$$g(\varepsilon) := \frac{\pi^2}{\varepsilon^2} \left\{ 1 - \frac{\sin^2 \varepsilon}{2(1 - \cos \varepsilon)} \right\} \quad (35)$$

である. $g(\varepsilon)$ を ε に関して微分すると

$$\begin{aligned} g'(\varepsilon) &= -2 \frac{\pi^2}{\varepsilon^3} \left\{ 1 - \frac{\sin^2 \varepsilon}{2(1 - \cos \varepsilon)} \right\} \\ &\quad - \frac{\pi^2 \sin \varepsilon (2 \cos \varepsilon - 2 \cos^2 \varepsilon - \sin^2 \varepsilon)}{\varepsilon^2 2(1 - \cos \varepsilon)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\pi^2}{\varepsilon^2} \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \left(-2 + \frac{\sin^2 \varepsilon}{1 - \cos \varepsilon} \right) - \frac{\sin \varepsilon (2 \cos \varepsilon - \cos^2 \varepsilon - 1)}{2(1 - \cos \varepsilon)^2} \right\} \\ &= \frac{\pi^2}{\varepsilon^2} \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{-2 + 2 \cos \varepsilon + 1 - \cos^2 \varepsilon}{1 - \cos \varepsilon} \right) + \frac{1}{2} \sin \varepsilon \right\} \end{aligned}$$

$$= \frac{\pi^2}{\varepsilon^2} \left(-\frac{1 - \cos \varepsilon}{\varepsilon} + \frac{1}{2} \sin \varepsilon \right) \quad (36)$$

となる. $g'(\varepsilon) = 0$ より

$$\frac{\varepsilon}{2} = \frac{(1 - \cos \varepsilon)}{\sin \varepsilon} = \frac{2 \sin^2 \frac{\varepsilon}{2}}{2 \sin \frac{\varepsilon}{2} \cos \frac{\varepsilon}{2}} = \tan \frac{\varepsilon}{2} \quad (37)$$

となる. $\frac{1}{2}\varepsilon$, $\tan \frac{\varepsilon}{2}$ は単調増加関数であり, その傾きは

$$\left(\frac{1}{2}\varepsilon \right)' \bigg|_{\varepsilon=0, \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}, \quad \begin{cases} (\tan \frac{\varepsilon}{2})'|_{\varepsilon=0} = \frac{1}{2} \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\tan \frac{\varepsilon}{2})' = \infty \end{cases}$$

であることから, $g'(\varepsilon)$ は $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$ において $g'(\varepsilon) = 0$ となる点を持たない. 加えて, (36) 式より $g'(\frac{\pi}{2}) = 4(-\frac{2}{\pi} + \frac{1}{2}) < 0$ であることから, $g(\varepsilon)$ は単調減少関数である. したがって, (35) 式より

$$g(\varepsilon) > g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$$

であり, $g(\varepsilon) > 1$ である. よって (34) 式が成り立つので, (29) 式が成り立つ. $\square$

この定理 2 は, Fig. 4 のように, $(\|\Delta\alpha'_o\|, \Delta\psi)$ 平面の到達可能領域 Ω において, $-\frac{\pi}{2} < \Delta\psi < \frac{\pi}{2}$ の範囲で傾き $\pm \frac{1}{\rho}$ の直線が存在することを示している. すなわち, 到達可能領域 Ω における傾き $\pm \frac{1}{\rho}$ の直線上に移動するように, 閉軌道のパラメータ θ_1 , θ_2 を必ず選ぶことができる.

[注 1] (22) 式を満たす θ_1 , θ_2 を実際に求めるには, 定理 2 の証明より, (23) 式と (26) 式を解けば良く, 数値的に解く必要があるのは (25), (26) 式より

$$\frac{\varepsilon^2 - 2(\cos \theta_2 + \theta_2 \sin \theta_2)\varepsilon \sin \varepsilon + 2(\cos \theta_2 + \theta_2 \sin \theta_2)^2(1 - \cos \varepsilon)}{\sin^2 \theta_2} = \varepsilon^2 \quad (38)$$

Fig. 4 Two lines with fixed-length interval in reachable area

Fig. 5 Reachable area by the iteration of two closed paths

のみであることに注意されたい。(38)式は解の存在が保証された1変数(\$\theta_2\$)の非線形方程式であり,(27)式より,(38)式の左辺と右辺の差は\$\theta_{2L}, \theta_{2U}\$において正負逆の値をとるため,二分法¹²⁾により数値的に安定して解を求めることができる。

4. 到達のための回数を保証したパラメータ決定アルゴリズム

本節では,目標状態への到達に要する閉軌道の繰り返しの回数が保証されるようなパラメータ決定アルゴリズムについて考える。前提として,補題2より,\$\varphi\$は(17)式のように決定し,\$\theta_1, \theta_2\$については,定理2より, Fig. 4にある直線上を常に移動するように決定する。したがって以下では,直線上をどのように移動しながら目標点に到達したら良いかを考える。

移動の仕方について, Fig. 5の\$(\|\Delta\alpha'_0\|, \Delta\psi)\$平面上の実線で囲まれた領域\$\Omega^2\$を用いて考える。Fig. 5では,説明の便宜上,\$\|\Delta\alpha'_0\|\$軸の負の領域も示してあり,この負の領域は,(17)式の\$\varphi\$に\$\pi\$を加えることで実現できる。以降では説明の簡単化のため,\$\|\Delta\alpha'_0\|, \Delta\psi\$の座標を\$x, y\$で表わし,\$(\|\Delta\alpha'_0\|, \Delta\psi)\$平面を\$(x, y)\$平面と呼ぶ。斜交座標系\$(X, Y)\$は,傾き\$\frac{1}{\rho}\$の直線方向を\$X\$軸,傾き\$-\frac{1}{\rho}\$の直線方向を\$Y\$軸としている。また,\$l\$は直線上で移動できる長さ

Fig. 6 Scheme for the Algorithm

の最大量であり, Fig. 4より

$$l := \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\rho^2 + 1} \right) c, \quad 0 < c < 1 \quad (39)$$

である。

まず, Fig. 5に示すように,目標点\$A\$が領域\$\Omega^2\$の内側にある場合を考える。この場合,はじめに現在位置\$O\$から\$X\$軸に沿って\$O'\$に移動し,つぎに移動後の座標系の\$Y'\$軸上に沿って移動することで,\$A\$に到達することができる。すなわち,領域\$\Omega^2\$は2回の閉軌道により到達できる領域を表わしている。

つぎに,目標点が領域\$\Omega^2\$の外にある場合の目標点への到達の仕方を Fig. 6を用いて説明する。図中,現在位置は\$(x, y)\$平面の原点\$O\$,目標点は\$(\|\alpha_0\|, \psi)\$平面の原点である。斜交座標系\$(X, Y)\$の破線の間隔は Fig. 5の\$l\$を単位長さとしている。現在位置\$O\$から到達可能領域\$\Omega^2\$の端点に移動することを考えると, Fig. 6の破線の交点上を移動することになる。したがって,交点上の移動をたかだか有限回繰り返すことにより,領域\$\Omega^2\$内に目標点を移動させることができ,その後は先ほど述べたように,2回の移動で目標点に到達できる。移動の回数\$N\$は,初期状態における斜交座標\$(X, Y)\$で表わした目標値を\$(X[0], Y[0])\$とすれば,

$$N = \text{int}(|X[0]|) + \text{int}(|Y[0]|) + 2 \quad (40)$$

与えられる。なお,\$\text{int}(\cdot)\$は引数の整数部を表わす。(40)式の\$\text{int}(|X[0]|) + \text{int}(|Y[0]|)\$は, Fig. 6の目標点を含む破線で囲まれたひし形の領域のうち,初期値から最も近い交点\$P\$に到達するための回数である。

以上を実現するような閉軌道のパラメータ\$\theta_1, \theta_2, \varphi\$を決定するアルゴリズムを以下に示す。なお,\$k\$は閉軌道の繰り返しの回数であり,直交座標\$(x, y)\$で表わした\$k\$回目の閉軌道開始時における目標点の座標を\$(x[k], y[k])\$とする。

【閉軌道のパラメータ決定のアルゴリズム】

1) 直交座標 (x, y) で表われた目標点 $(x[k], y[k])$ を斜交座標 (X, Y) での目標点 $(X_d[k], Y_d[k])$ に変換する.

$$\begin{bmatrix} X[k] \\ Y[k] \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} x[k] \\ y[k] \end{bmatrix}, \quad T := \frac{1}{\pi} \begin{bmatrix} \frac{1}{\rho} & 1 \\ -\frac{1}{\rho} & 1 \end{bmatrix} \quad (41)$$

2) $(X[k], Y[k])$ より, k ステップでの目標点 $(X_d[k], Y_d[k])$ を以下の式を用いて計算する.

$$\begin{bmatrix} X_d[k] \\ Y_d[k] \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} \text{sgn}(X[k]) \min(c, |X[k]|) \\ 0 \end{bmatrix} & (|X[k]| \geq |Y[k]|) \\ \begin{bmatrix} 0 \\ \text{sgn}(Y[k]) \min(c, |Y[k]|) \end{bmatrix} & (|X[k]| < |Y[k]|) \end{cases} \quad (42)$$

3) 斜交座標 (X, Y) で表わした k ステップでの目標点 $(X_d[k], Y_d[k])$ を直交座標 (x, y) での目標点 $(x_d[k], y_d[k])$ に変換し, この目標点へ移動するような $\theta_1[k], \theta_2[k]$ を, 以下の式を解いて決定する.

$$\theta_1[k] = -\frac{y_d[k]}{\sin(\theta_2[k])} \quad (43)$$

$$\frac{\begin{Bmatrix} y_d[k]^2 \\ -2(\cos \theta_2[k] + \theta_2[k] \sin \theta_2[k]) y_d[k] \sin y_d[k] \\ +2(\cos \theta_2[k] + \theta_2[k] \sin \theta_2[k])^2 (1 - \cos y_d[k]) \end{Bmatrix}}{\sin^2 \theta_2[k]} = x_d[k]^2 \quad (44)$$

ただし

$$\begin{bmatrix} x_d[k] \\ y_d[k] \end{bmatrix} := T^{-1} \begin{bmatrix} X_d[k] \\ Y_d[k] \end{bmatrix} \quad (45)$$

である.

4) 得られた $(\theta_1[k], \theta_2[k])$ より, 以下の式を解いて $\varphi[k]$ を求める.

$$R_\varphi(\varphi[k]) \frac{\Delta \alpha'_o(\theta_1[k], \theta_2[k])}{\|\Delta \alpha'_o(\theta_1[k], \theta_2[k])\|} = -\frac{\alpha_o[k]}{\|\alpha_o[k]\|} \quad (46)$$

ステップ 2) の (42) 式の場合分けは, 斜交座標系の X 軸と Y 軸のうち, 目標点に近づく軸を選択するものである. ここで $\text{sgn}(X_d[k]) \min(c, |X_d[k]|)$, $\text{sgn}(Y_d[k]) \min(c, |Y_d[k]|)$ は, 目標点が移動可能な幅の上限 c を越える場合は c だけ移動し, c を越えない場合は Fig.5 のように 2 回で目標点へと移動するように移動幅を選択するものである. なお, (43), (44), (46) 式は, それぞれ前節の (23), (38), (17) 式に対応している.

上記アルゴリズムにおいて, (44) 式以外はすべて解析的に解を求めることができる. (44) 式から $\theta_2[k]$ を求める際には数値計算による解の探索が必要であるが, これについては, 注 1 で述べたように困難なく計算可能である.

[注 2] 本手法では, 文献 4) のように, 閉軌道を繰り返すたびに $\tilde{\eta}[k]$ のみを用いて閉軌道のパラメータを決定してるの

Fig. 7 Trajectory of α_o and ψ on α_o plane

Fig. 8 Shift of $(\|\alpha_o\|, \psi)$ on $(\|\Delta \alpha'_o\|, \Delta \psi)$ plane

で, 閉軌道の開始時刻をサンプル時刻とした離散時間フィードバックのような構成になっている. そのため, 外乱や誤差などに強いことが期待できる.

5. シミュレーション

前節で示したアルゴリズムの有効性を数値シミュレーションにより確認する. 半径は $\rho = 1$ とし, 接触点の初期位置の設定は, $\alpha_f = [0 \ 0]^T [\text{rad}]$, $\alpha_o = [3 \ 3.5]^T [\text{m}]$, $\psi = \frac{\pi}{2} [\text{rad}]$ とした. また, 1 回の閉軌道の最大移動幅は $c = 0.7$ とした. この場合, (40) 式より, 目標点到達に要する閉軌道の回数は $N = 5$ である.

Fig. 7, 8 にシミュレーション結果を示す. Fig. 7 は α_o 平面における α_o の軌道が示されており, 図中丸印と矢印は, それぞれ 1 回の閉軌道を行なったときの α_o と ψ の値を示している. Fig. 8 は $(\|\Delta \alpha'_o\|, \Delta \psi)$ 平面 $((x, y)$ 平面) における閉軌道ごとの現在位置の移動のようすを丸印で表わした

ものであり、斜線が前節のアルゴリズムにおける斜交座標系 (X, Y) 、太線で囲まれた領域が Ω^2 である。Fig. 7 からわかるように、5回の閉軌道により α_o, ψ とともに原点へと到達している。閉軌道による移動の仕方については、Fig. 8 を見るとわかるように、3回までは移動できる範囲内で最も大きく移動している。そして、3回の閉軌道により2回の閉軌道で到達できる領域 Ω^2 に到達してからは、移動幅の大きさを調節して、2回の繰り返しにより到達している。なお、Fig. 7 において、 k ステップ目の閉軌道を行なったときの移動先である o が原点と初期位置を結ぶ直線上にあるのは、(17) 式の φ により α_o 平面上の最短経路を選択していることに対応している (Fig. 3 参照)。

6. おわりに

本研究では、文献4)で提案した単一種類の閉軌道を用いて、目標状態への到達に要する閉軌道の繰り返しの回数が保証された接触点のレギュレーションを実現するための閉軌道のパラメータ決定アルゴリズムを提案した。はじめに、接触状態を特徴付ける平面において、1回の閉軌道により到達可能な領域として、原点(現在の接触点位置)で交差する有限な長さを持つ2本の直線が存在することを示した。つぎに、このことを利用したアルゴリズムについて述べた。基本的なアイデアは、閉軌道を繰り返すことにより、上記で述べた直線上を移動しながら目標点に到達しようというものである。本手法に必要な数値探索法は、解の存在が保証された1変数の非線形方程式を解くだけで良いので、二分法¹²⁾などにより解を確実に得ることができる。最後に、手法の有効性を数値シミュレーションにより確認した。

今後の課題は、今回の問題設定である球と平面を一般形状に拡張すること、および本手法のロバスト性の考察である。なお、本研究では文献4)と同様に6関節2本指ロボットハンドによる転がり接触での対象物の把握・操りを想定し、対象物の位置・姿勢と接触点の運動が独立に扱えるとしたため、接触点の運動のみを考えた。しかしながら、ロボットハンドの自由度がより少ない場合では、対象物の位置・姿勢と接触点の運動が干渉しあう。このような問題設定での対象物と接触点のレギュレーション法を考えることも、今後の課題である。

参考文献

- 1) 吉川恒夫：器用なメカニカルハンド，日本ロボット学会誌，18-6, 763/766 (2000)
- 2) 中村仁彦：非ホロノミックロボットシステム (第1-5回)，日本ロボット学会誌，11-4-7 (1993), 12-2 (1994)
- 3) 吉川 恒夫：把持と操りの基礎理論 (第1-3回)，日本ロボット学会誌，13-7-9 (1995)
- 4) 中島，長瀬，早川：2指ハンドによる転がり接触を用いた対象物の把握・操りと接触点の制御，計測自動制御学会論文集，40-1, 70/79 (2004)
- 5) D. J. Montana : The Kinematics of Contact and Grasp, *International Journal Conference on Robotics Research*, 7-3, 17/32 (1988)
- 6) R. W. Brockett : Asymptotic stability and feedback stabilization, *Differential Geometric Control Theory*, 27 181/191 (1983)
- 7) R. M. Murray, Z. Li and S. S. Sastry : *A Mathematical Introduction to ROBOTIC MANIPULATION*, CRC Press (1994)
- 8) 水野，三平，古賀，石川：転がりをを用いた球体の姿勢制御，日本ロボット学会誌，16-1, 118/123 (1998)
- 9) 清田，三平：時間軸状態制御形によるドリフト項を持たない非ホロノミックシステムの安定化，システム制御情報学会論文誌，12-11, 647/654 (1999)
- 10) Z. Li and J. Canny : Motion of two rigid bodies with rolling constraint, *IEEE Trans. Robot. Automat.*, 6-1, 62/72 (1990)
- 11) A. Bicchi and R. Sorrentino : Dexterous manipulation through rolling, in *Proc. IEEE Int. Conf. Robot. Automat.*, 452/257 (1995)
- 12) 宮下 精二：応用数学基礎講座7 数値計算，朝倉書店 (2002)
- 13) 中島，長瀬，早川：有限回の閉軌道の繰り返しを用いた平面を転がる球の接触点の制御，SICE 第31回制御理論シンポジウム資料，25/30 (2002)
- 14) A. Nakashima, K. Nagase and Y. Hayakawa : Control of Contact Points of Two-Fingered Robot Hand with Manipulating an Object, in *Proc. ICASE/SICE Joint Workshop* 120/125 (2002)

[著者紹介]

中島 明 (学生会員)

2002年名古屋大学大学院工学研究科電子機械工学専攻博士前期課程修了。同年，同大学大学院工学研究科電子機械工学専攻博士後期課程に進学し現在に至る。多指ハンドロボットによる把握・操りの制御，非ホロノミックシステムの制御の研究に従事。

長瀬 賢二 (正会員)

1998年名古屋大学大学院工学研究科博士後期課程修了。同年名古屋大学工学研究科助手。振動の制御，ロボットの制御などの研究に従事。日本機械学会，日本ロボット学会などの会員 (工学博士)。

早川 義一 (正会員)

1979年名古屋大学大学院博士後期課程修了。同年名古屋大学工学部助手，講師，助教授を経て，1996年同教授。システム制御理論，ロボット工学の研究に従事。システム制御情報学会などの会員 (工学博士)。