線形放物系の境界安定化に関する新しい代数的方法[†]

南部 隆 夫*

A New Algebraic Method of Boundary Stabilization for a Class of Linear Parabolic Systems[†]

Takao NAMBU*

We study stabilization of a class of linear parabolic boundary control systems. The control system in this paper admits a Riesz basis corresponding to a pair of coefficient linear differential operators $(\mathcal{L}, \tau)$. The problem has been extensively studied by several authors. Most important is how we cope with the boundary control terms. We propose a new algebraic method of stabilization, which is regarded as the third algebraic one by the same author. An advantage is that this method is a little simpler and more readable than the existing ones, since the argument is based on a system of differential equations with no boundary input. Thus the argument owns some property in common with the one in finite-dimensional control systems.

Key Words: Algebraic boundary stabilization, linear parabolic systems with mixed boundaries, compensator design

1. はじめに

線形放物形分布定数系の安定化は、文献 1), 3), 7)~11) 等に見られる。とくに境界観測 - 境界制御機構のもとでの安定化では、境界制御問題をいかにして同等な分布制御問題に変換するかが大きな key である。文献 1), 9) では、非有界楕円型作用素に付随する Riesz 基底が存在する場合の安定化を、制御プラントと同一構造をもつ安定化補償器 (identity compensator) を、7), 8), 10) では、より一般的で対応する Riesz 基底を必ずしももたない楕円型作用素の場合に、制御プラントと独立した構造をもつ安定化補償器 (generalized compensator) を、それぞれ設計している。また、11) では、観測・制御にかかわる非有界性の処理のため、微分方程式を通常の L^2 -空間を含む超関数 (線形汎関数) の空間にシフトすることにより、「レギュラー線形系 (RLS)」という概念を提案している。観測・制御における写像を L^2 -空間より弱いトポロジーをもつ空間に設定して、本来の非有界性を弱い設定のもとでの有界性に読み替え、統一した一般論を展開している。しかしながら、本来の非有界性が消えたわけではない。

文献 7), 8) では、第 3 種境界作用素の場合に、楕円型作用素の分数べきを経由する状態変数変換による方法により、

安定化を考察している。しかしながら、分数べきの構造は一般に複雑であり²⁾、この方法では方程式の適切性 (well posedness) に関して限界があることが、10) で指摘された。文献 9) では、仮想的な無限次元補償器を導入して、2 通りの代数的な方法で安定化を達成した。本論文では、新しい代数的観点から、より簡単な安定化構造の設計を提案する。そのヒントになるのは、10) における 2 階微分方程式に対する安定化の考察である。

Ω を m -次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^m$ の有界領域、 $\Gamma = \partial\Omega$ を十分滑らかな $(m-1)$ -次元境界とする。本文で考察する制御系は、つぎのように記述される：

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{L}u = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+^1 \times \Omega, \\ \tau u = \sum_{k=1}^M \langle v, \rho_k \rangle_{\mathbb{R}^\ell} h_k & \text{on } \mathbb{R}_+^1 \times \Gamma, \\ \frac{dv}{dt} + B_1 v = \sum_{k=1}^N \langle u, w_k \rangle_{\Gamma} \xi_k & \text{in } \mathbb{R}_+^1, \\ u(0, \cdot) = u_0(\cdot) & \text{in } \Omega, \quad v(0) = v_0. \end{cases} \quad (1)$$

方程式 (1) において、制御プラントは状態変数 $u(t, \cdot)$ をもち、偏微分作用素対 $(\mathcal{L}, \tau)$ により特徴づけられる。状態変数 $v(t)$ をもつ微分方程式は、 $\mathbb{R}^\ell$ における動的補償器を表わし、次元 ℓ は後ほど決められる。作用素対 $(\mathcal{L}, \tau)$ は、つぎのように与えられる：

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u &= - \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + c(x)u, \\ \tau u &= \alpha(\xi)u + (1 - \alpha(\xi)) \frac{\partial u}{\partial \nu}. \end{aligned} \quad (2)$$

ここで、 $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$, $1 \leq i, j \leq m$, $x \in \bar{\Omega}$ であり；

[†] 愛媛大学における微分方程式セミナー (第 27 回, 松山市) にて発表 (2004・9)

* 神戸大学工学部応用数学教室 神戸市灘区六甲台町 1-1

* Department of Applied Mathematics, Faculty of Engineering, Kobe University, Nada, Kobe

(Received April 22, 2004)

(Revised September 24, 2004)

$0 \leq \alpha(\xi) \leq 1$, $\alpha(\xi) \neq 1$; $\nu(\xi) = (\nu_1(\xi), \dots, \nu_m(\xi))$ は $\xi \in \Gamma$ における外向き単位法線を表わす。また, $\partial u / \partial \nu = \sum_{i,j=1}^m a_{ij}(\xi) \nu_i(\xi) \partial u / \partial x_j|_{\Gamma}$ である。空間 $L^2(\Omega)$, $L^2(\Gamma)$ における内積は, それぞれ $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Omega}$, $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Gamma}$ により与えられ, $\|\cdot\|$ は $L^2(\Omega)$ または $L^2(\Gamma)$ のノルムを表わす。汎関数

$$\langle u, w_k \rangle_{\Gamma}, \quad 1 \leq k \leq N, \quad w_k \in L^2(\Gamma) \quad (3)$$

は, 制御プラントの出力を表わす。アクチュエータ h_k については, 少々粗い設定であるが $h_k \in C^{2+\omega}(\Gamma)$, $0 < \omega < 1$ と仮定する。

文献 9), 10) におけるのと同様に, 本文では, $[h_k, w_k$ が与えられたとき, 任意の初期値をもつ方程式 (1) の状態 $(u(t, \cdot), v(t))$ が $t \rightarrow \infty$ とともに指数関数的に 0 に収束するようにフィードバック則: 次元 ℓ , 行列 B_1 , ベクトル ξ_k , ρ_k を決める] ことを目的とする。境界作用素 τ において $0 \leq \alpha(\xi) < 1$ または $\alpha(\xi) \equiv 1$ の場合には, L の定義域 $\mathcal{D}(L)$ は $\mathcal{D}(L) = \{u \in H^2(\Omega); \tau u = 0 \text{ on } \Gamma\}$ としてめいりように記述されるが, 本文における第 1, 3 種が混在する場合には $\mathcal{D}(L)$ が上記のように与えられるかどうかは不明であり, 次節で述べるようにやや迂遠な定義が必要になる。

2. 準備

作用素 L の正確な記述から始める。前開作用素 $\hat{L}$ を,

$$\hat{L}u = Lu,$$

$$\mathcal{D}(\hat{L}) = \{u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega}); Lu \in L^2(\Omega), \tau u = 0\}$$

と定め, $\hat{L}$ の $L^2(\Omega)$ における閉包 (closure) を L とする。 L の定義域 $\mathcal{D}(L)$ は, つぎのような関数列 $\{u_n\} \subset \mathcal{D}(\hat{L})$ が存在するような u からなる:

$$u_n \rightarrow u, \quad \{\hat{L}u_n\}: L^2(\Omega) \text{ における収束列}, \quad n \rightarrow \infty.$$

もちろん, $Lu = \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{L}u_n$ であり, Lu は近似列 $\{u_n\}$ の選び方によらない。よく知られているように, L はコンパクトなリゾルベント $(\lambda - L)^{-1}$ をもつ自己共役作用素であり, 固有値, 固有関数のペア: $\{\lambda_i, \varphi_{ij}\}$ が存在する⁵⁾:

- (i) $\sigma(L) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$, $\lambda_1 < \dots < \lambda_i < \dots \rightarrow \infty$;
- (ii) $(\lambda_i - L)\varphi_{ij} = 0$, $i \geq 1$, $1 \leq j \leq m_i$, $(m_i < \infty)$;
- (iii) 関数系 $\{\varphi_{ij}\}$ は, $L^2(\Omega)$ における完全正規直交系になる。したがって, 各 $u \in L^2(\Omega)$ は一意に

$$u = \sum_{i,j} u_{ij} \varphi_{ij}, \quad u_{ij} = \langle u, \varphi_{ij} \rangle_{\Omega}$$

と Fourier 級数展開される。

また, 扇状集合 $\bar{\Sigma} - a$ ($\bar{\Sigma} = \{\lambda \in \mathbb{C}; \theta_0 \leq |\arg \lambda| \leq \pi\}$, $0 < \theta_0 < \pi/2$, $a > -\lambda_1$) を選べば $\sigma(L) \subset (\bar{\Sigma} - a)^c$ であり, とくに減衰評価

$$\|(\lambda - L)^{-1}\| \leq \frac{\text{const}}{1 + |\lambda|}, \quad \lambda \in \bar{\Sigma} - a$$

が成り立つ。したがって, $-L$ は解析半群 e^{-tL} , $t > 0$ の無限小生成素になる。 P_{λ_i} を, L の固有値 λ_i に対応する

射影作用素とする。すなわち, $u = \sum_{i,j} u_{ij} \varphi_{ij}$ に対して, $P_{\lambda_i} u = \sum_{j=1}^{m_i} u_{ij} \varphi_{ij}$ とする。

$\lambda_1 \leq 0$ と仮定する。整数 K を $\lambda_K \leq 0 < \lambda_{K+1}$ となるように選び, $P_K = P_{\lambda_1} + \dots + P_{\lambda_K}$ とおけば, P_K も射影作用素である。有限次元空間 $P_K L^2(\Omega)$ は L に関して不変部分空間であり, L の $P_K L^2(\Omega)$ 上への制限 $L|_{P_K L^2(\Omega)}$ は, 正規直交基底 $\{\varphi_{ij}; 1 \leq i \leq K, 1 \leq j \leq m_i\}$ にしたがって, 対角行列 $A = \text{diag}(\lambda_1 I_{m_1}, \dots, \lambda_K I_{m_K})$ と同一視される。

境界 Γ に対する単位の分解と仮定: $h_k \in C^{2+\omega}(\Gamma)$ より, 一意ではない拡張作用素 R が存在して,

$$Rh \in C^{2+\omega}(\bar{\Omega}), \quad Rh|_{\Gamma} = \frac{\partial}{\partial \nu} Rh \Big|_{\Gamma} = h$$

とできる^{4), 5)}。このとき明らかに, Γ 上で $\tau Rh = h$ である。実数 c が $c > -\lambda_1$ であれば, 境界値問題:

$$(c + L)u = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad \tau u = h \quad \text{on } \Gamma$$

は一意的な解 $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ をもつ^{4), 5)}。解は c に依存する Green 関数 $G(x, y)$ を構成することにより積分表現できるが, $G(x, y)$ の構成法から c は実数に限られていることに注意する。また, 上記の解 u は $u = Rh - L_c^{-1}(c + L)Rh$ と表現できる。 $\lambda \in \rho(L)$ に対しては, 解 u の表現において $-c$ を λ で置きかえた関数

$$N_{\lambda} h = Rh - (\lambda - L)^{-1}(\lambda - L)Rh$$

は λ の解析関数であり, とくに $\lambda = -c$ の場合には真の解になることに注意する。

w_k, h_k については, $N \times m_i$ 可観測行列, $m_i \times M$ 可制御行列を, それぞれつぎのように定義する:

$$W_i = \begin{pmatrix} \langle w_k, \varphi_{ij} \rangle_{\Gamma}; & k \downarrow 1, \dots, N \\ & j \rightarrow 1, \dots, m_i \end{pmatrix}, \quad (4)$$

$$H_i = \begin{pmatrix} \langle h_k, \varphi_{ij} \rangle_{\Gamma}; & j \downarrow 1, \dots, m_i \\ & k \rightarrow 1, \dots, M \end{pmatrix}, \quad i \geq 1.$$

《定理 1》⁷⁾⁻⁹⁾ 制御プラントの観測データ (3) にかかわる作用素 C を

$$C = - \sum_{k=1}^N \langle \cdot, w_k \rangle_{\Gamma} \xi_k, \quad \xi_k \in L^2(\Omega)$$

により与える。可観測性: $\text{rank } W_i = m_i$, $1 \leq i \leq K$ を仮定すれば, 評価:

$$\|e^{-t(L-C)}\| \leq \text{const } e^{-\lambda_{K+1} t}, \quad t \geq 0 \quad (5)$$

を満たす $\xi_k \in P_K L^2(\Omega)$, $1 \leq k \leq N$ を設計できる。

注意 最終的に設計される制御系 (1) における各ベクトル ξ_k は, 定理 1 の $\xi_k = \sum_{i,j} \xi_{ij}^k \varphi_{ij}$ の Fourier 係数 $\{\xi_{ij}^k\}$ から得られる。

関数 $y_k \in L^2(\Omega)$, $1 \leq k \leq M$ に対して, 境界作用素 τ_f

を $\tau_f u = \tau u - \sum_{k=1}^M \langle u, y_k \rangle_{\Omega} h_k$ と定め、作用素 $\hat{F}$ を

$$\begin{aligned} \hat{F}u &= \mathcal{L}u, \quad u \in \mathcal{D}(\hat{F}), \\ \mathcal{D}(\hat{F}) &= \{u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega}); \mathcal{L}u \in L^2(\Omega), \\ &\quad \tau_f u = 0 \text{ on } \Gamma\} \end{aligned} \quad (6)$$

と定義する。つぎの定理は文献 10), 命題 5 に対応する。境界作用素 τ において $0 \leq \alpha(\xi) < 1$, あるいは $\alpha(\xi) \equiv 1$ の場合には証明は比較的容易であるが, 本文のような混合境界値問題の場合には, より注意深い考察が必要である。

《定理 2》(i) 作用素 $\hat{F}$ は, $L^2(\Omega)$ において閉包 F をもち, その定義域 $\mathcal{D}(\hat{F})$ は, $L^2(\Omega)$ において稠密である。 $-F$ は, 解析半群 e^{-tF} , $t > 0$ の無限小生成素になる。

(ii) 可制御性: $\text{rank } H_i = m_i$, $1 \leq i \leq K$ を仮定すれば,

$$\|e^{-tF}\| \leq \text{const } e^{-\lambda_K + 1} t, \quad t \geq 0 \quad (7)$$

を満たす $y_k \in P_K L^2(\Omega)$, $1 \leq k \leq M$ を設計できる。

証明 (i) $\lambda \in \rho(L)$ に対して, 作用素 T_λ を

$$\begin{aligned} z &= T_\lambda u = u - \sum_{k=1}^M \langle u, y_k \rangle_{\Omega} N_\lambda h_k \\ &= u - (N_\lambda h_1 \dots N_\lambda h_M) \langle u, \mathbf{y} \rangle_{\Omega}, \quad u \in L^2(\Omega), \end{aligned}$$

と定める。 $\langle u, \mathbf{y} \rangle_{\Omega}$ は, $(\langle u, y_1 \rangle_{\Omega} \dots \langle u, y_M \rangle_{\Omega})$ の転置を表わす。閉包 F の存在を示すには, つぎの命題が成り立つことが必要かつ十分である:

$$\begin{aligned} u_n \in \mathcal{D}(\hat{F}) \rightarrow 0 \quad \text{かつ} \quad \hat{F}u_n \rightarrow y, \quad n \rightarrow \infty \\ \Rightarrow y = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

$c > -\lambda_1$ なる定数 c に対して, $\lambda = -c$ とおく。 $u \in \mathcal{D}(\hat{F})$ であれば, $z = T_{-c}u \in \mathcal{D}(\hat{L})$ であり,

$$\hat{L}_c z = \mathcal{L}_c z = \mathcal{L}_c u = \hat{F}_c u$$

となることに注意しよう。(8)における関数列 $\{u_n\}$ をとる。 $z_n = T_{-c}u_n \rightarrow 0$; $\hat{L}_c z_n = \mathcal{L}_c z_n \rightarrow y + c \cdot 0 = y$; かつ L は閉作用素であるから, $y = 0$ がしたがう。 T_λ の逆作用素の存在を示すために, 行列 Φ_λ を

$$\Phi_\lambda = \left(\langle N_\lambda h_k, y_j \rangle_{\Omega}; \begin{matrix} k \rightarrow 1, \dots, M \\ j \downarrow 1, \dots, M \end{matrix} \right) \quad (9)$$

により与える。このとき, $\Phi_\lambda \rightarrow 0$, $\lambda \in \bar{\Sigma} - a \rightarrow \infty$ となることを示す。 Φ_λ における指標 j, k を省略して, まず $y \in \mathcal{D}(\Omega) = C_0^\infty(\Omega)$ と仮定する。Green の公式により,

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}N_{-c}h, y \rangle_{\Omega} - \langle N_{-c}h, \mathcal{L}y \rangle_{\Omega} \\ = -\langle (N_{-c}h)_\nu, y \rangle_{\Gamma} + \langle N_{-c}h, y_\nu \rangle_{\Gamma} \end{aligned}$$

である。したがって,

$$\langle N_{-c}h, y \rangle_{\Omega} = \frac{1}{-c} \langle N_{-c}h, \mathcal{L}y \rangle_{\Omega}, \quad c > -\lambda_1$$

となる。この関係式において, $-c$ を $\lambda \in \rho(L)$ で置きかえれば, 両辺は λ の解析関数になることに注意する。解析接続により, 結局

$$\langle N_\lambda h, y \rangle_{\Omega} = \frac{1}{\lambda} \langle N_\lambda h, \mathcal{L}y \rangle_{\Omega}, \quad \lambda \in \rho(L)$$

を得る。 $N_\lambda h = Rh - (\lambda - L)^{-1}(\lambda - \mathcal{L})Rh$ は, $\lambda \rightarrow \infty$ の際に有界であるから, $\langle N_\lambda h, y \rangle_{\Omega} \rightarrow 0$, $\lambda \rightarrow \infty$ がわかる。一般の $y \in L^2(\Omega)$ に対しても, y に収束する $\mathcal{D}(\Omega)$ の近似列を導入して, $\langle N_\lambda h, y \rangle_{\Omega} \rightarrow 0$ が示される。

a を大きく選んでおけば, $(1 - \Phi_\lambda)^{-1}$ が $\bar{\Sigma} - a$ において存在する。したがって, 有界な逆 T_λ^{-1} が存在して,

$$\begin{aligned} T_\lambda^{-1}z &= z + (N_\lambda h_1 \dots N_\lambda h_M)(1 - \Phi_\lambda)^{-1} \langle z, \mathbf{y} \rangle_{\Omega}, \\ z &\in L^2(\Omega), \quad \lambda \in \bar{\Sigma} - a \end{aligned}$$

となる。結局, T_λ と T_λ^{-1} は, $\bar{\Sigma} - a$ において解析的であることがわかった。

与えられた $c \geq a$ と $f \in L^2(\Omega)$ に対して, 境界値問題:

$$(c + F)u = f \quad (10)$$

を考える。 $z = L_c^{-1}f \in \mathcal{D}(L)$, $u = T_{-c}^{-1}z = T_{-c}^{-1}L_c^{-1}f$ とおけば, $z_n \rightarrow z$ かつ $\hat{L}z_n \rightarrow Lz$ となる関数列 $\{z_n\} \subset \mathcal{D}(\hat{L})$ を見つけられる。 $\langle u_n, \mathbf{y} \rangle_{\Omega} = (1 - \Phi_{-c})^{-1} \langle z_n, \mathbf{y} \rangle_{\Omega}$, $u_n = T_{-c}^{-1}z_n$ となることに注意する。 $u_n \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$; $\mathcal{L}u_n \in L^2(\Omega)$; かつ $\tau_f u_n = 0$ であるから,

$$\begin{aligned} u_n &\in \mathcal{D}(\hat{F}); \quad u_n \rightarrow T_{-c}^{-1}z = u; \quad \text{かつ} \\ (c + \hat{F})u_n &= \mathcal{L}_c u_n = \hat{L}_c z_n \rightarrow L_c z \end{aligned}$$

がわかる。したがって u は $\mathcal{D}(F)$ に属し, $F_c u = L_c z = f$ である。

(10) の解の一意性: $F_c u = 0$ とする。 F の閉性から, $u_n \rightarrow u$, $\hat{F}u_n \rightarrow Fu$ なる関数列 $\{u_n\} \subset \mathcal{D}(\hat{F})$ を見出す。 $z_n = T_{-c}u_n$ とおけば,

$$\begin{aligned} z_n &\in \mathcal{D}(\hat{L}); \quad z_n \rightarrow T_{-c}u; \quad \text{かつ} \\ \hat{L}_c z_n &= \mathcal{L}_c z_n = \hat{F}_c u_n \rightarrow F_c u \end{aligned}$$

となる。したがって $T_{-c}u \in \mathcal{D}(L)$ であり, $L_c T_{-c}u = F_c u = 0$ である。これより, $T_{-c}u = 0$ あるいは $u = 0$ がしたがう。結局, 有界な逆 F_c^{-1} が存在して, $T_{-c}^{-1}L_c^{-1}$ である。同じことであるが,

$$(-c - F)^{-1} = T_{-c}^{-1}(-c - L)^{-1}, \quad c \geq a$$

である。作用素 $T_\lambda^{-1}(\lambda - L)^{-1}$ は $\bar{\Sigma} - a$ において解析的である。したがって, 実軸 $(-\infty, -a]$ 上のリゾルベント $(-c - F)^{-1}$ は, 扇状集合 $\bar{\Sigma} - a \cap T_\lambda^{-1}(\lambda - L)^{-1}$ として解析接続される。この拡張は, F のリゾルベントにほかならない。まとめると, $\bar{\Sigma} - a \subset \rho(F)$ であり, 表現:

$$(\lambda - F)^{-1} = T_\lambda^{-1}(\lambda - L)^{-1} \text{ in } \bar{\Sigma} - a \quad (11)$$

が得られる。この表現により,

$$\|(\lambda - F)^{-1}\| \leq \frac{\text{const}}{1 + |\lambda|}, \quad \lambda \in \bar{\Sigma} - a$$

であるから, $-F$ は解析半群 e^{-tF} , $t > 0$ の無限小生成素になる。

$\mathcal{D}(F)$ の稠密性と (ii) の評価 (7) の証明は, 10), 命題 5 と同様に遂行される。 Q.E.D.

3. 主要結果

入力 $f_k(t)$ をもつ境界制御系:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} + \mathcal{L}u &= 0 \quad \text{in } \mathbb{R}_+^1 \times \Omega, \\ \tau u &= \sum_{k=1}^M f_k(t) h_k \quad \text{on } \mathbb{R}_+^1 \times \Gamma, \\ u(0, \cdot) &= u_0 \quad \text{in } \Omega \end{aligned} \quad (12)$$

を考える. du/dt は, $L^2(\Omega)$ における微分を表わし, $f_k(t)$ は後ほど補償器の出力として設計する. 安定化を考える際には, 一般性を損なわずに $0 \in \rho(L)$ と仮定してよい. 境界フィードバック効果を打ち消すために, 自然な考えとして新しい状態変数 $q(t, \cdot)$ を

$$q(t, \cdot) = u(t, \cdot) - \sum_{k=1}^M f_k(t) N_0 h_k, \quad (13)$$

により導入する. 当面 $f_k(t)$ が C^1 級であると仮定すれば, q に関する微分方程式が得られる:

$$\frac{dq}{dt} + Lq = - \sum_{k=1}^M f'_k(t) N_0 h_k, \quad q(0, \cdot) = q_0. \quad (14)$$

本文の新しい着想は, 補償器を (12) ではなく, 状態変数 q をもつ (14) に基づいて設計することにある. 正規直交基底 $\{\varphi_{ij}\}$ の存在を考慮して, (14) に対応する補償器は, 状態変数 $v(t, \cdot)$ をもつ (14) と同じ空間 $L^2(\Omega)$ における微分方程式として設計する. 直積空間 $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ における制御系は, 形式上

$$\begin{cases} \frac{dq}{dt} + Lq = - \sum_{k=1}^M f'_k(t) N_0 h_k, \\ \frac{dv}{dt} + (L - C)v = -Cq - \sum_{k=1}^M f'_k(t) N_0 h_k, \\ q(0, \cdot) = q_0, \quad v(0, \cdot) = v_0 \end{cases} \quad (15)$$

で与えられる.

文献 9) においては, 状態 v をもつ補償器を 2 通りの代数的方法で構成した. 入力項は, (19) で後ほど設定するように $f_k(t) = \langle v(t), \rho_k \rangle_\Omega$ であるので, 第 2 節の T_{-c} と同様に $c > 0$ を大きく選び, $L^2(\Omega)$ 上の作用素 S_{-c} を $S_{-c}u = u - \sum_{k=1}^M \langle u, \rho_k \rangle_\Omega N_{-c} h_k$ と定義する. このとき 9) では, 補償器を

(i) $\|u - S_{-c}^{-1}v\| \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty$, または

(ii) $\|S_{-c}u - v\| \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty$

となるように設計した. とくに (i) においては当初, 補償器は状態 $\tilde{v} = S_{-c}^{-1}v$ をもつ微分方程式で, 境界条件: $\tau \tilde{v} = \sum_{k=1}^M \langle \tilde{v}, \rho_k \rangle_\Omega h_k$ を満たすものとして設定されている. 状態 $(u, \tilde{v}) = (u, S_{-c}^{-1}v)$ の安定化の後, 補償器は変数 $v = S_{-c}\tilde{v}$ をもつ有限次元微分方程式に変換され, 結局, (u, v) の安定化を達成することができる. (ii) の機構においては $\tilde{u} = S_{-c}u$ において, 状態 $(\tilde{u}, v)$ をもつ制御系を構成する. この際 $\tau v = 0$, すなわち $v \in \mathcal{D}(L)$ であるが, 安定化

達成のために, 複雑な境界条件を満たす作用素をもつ微分方程式系を経由しなければならない. (i), (ii) は同等な評価であるが, 基礎となる制御系の記述が, とくに境界入力項が異なる.

一方, 本文のアプローチは, 第 3 番目の代数的方法と位置づけられ, $\|q - v\| \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$ となるように設計される. 当初から斉次境界条件 $\tau q = 0, \tau v = 0$ を満たす制御系に基づいているため, 比較的フィードバック制御則の構成と理解が容易になる. その観点では, 状態 $\tilde{u}$ をもつ別の制御プラントに変換する (ii) と共通するが, 境界条件の点では, 本文のほうが容易である.

本題にもどろう. 定理 2 における y_k , 定理 1 における ξ_k を用いて, 行列 G_1, G_2 を, それぞれ

$$\begin{aligned} G_1 &= \left(\langle N_0 h_i, y_j \rangle_\Omega; \begin{matrix} i \rightarrow 1, \dots, M \\ j \downarrow 1, \dots, M \end{matrix} \right), \\ G_2 &= \left(\langle \xi_i, y_j \rangle_\Omega; \begin{matrix} i \rightarrow 1, \dots, N \\ j \downarrow 1, \dots, M \end{matrix} \right), \end{aligned} \quad (16)$$

と定義する. 定理 2, (ii) において, 必要ならば $y_1, \dots, y_M \in P_K L^2(\Omega)$ を少し修正することにより, $\det(1 - G_1) \neq 0$ と仮定してよい. ここで $M \times M$ 行列 Θ を, $\Theta = (1 - G_1)^{-1}$ と定めれば, $(1 + \Theta G_1)^{-1} \Theta = 1$ である. $\Theta|_{(i,j)} = \theta_{ij}$ とし,

$$\zeta_i = \sum_{j=1}^M \theta_{ij} y_j \in P_K L^2(\Omega), \quad 1 \leq i \leq M,$$

あるいは, ベクトル形式で $\zeta = \Theta y$ とおく. $M \times 1$ ベクトル値関数 $g(q, v)$ を,

$$g(q, v) = (1 - G_1) (\Theta G_2 \langle q, w \rangle_\Gamma - \langle v, L\zeta \rangle_\Omega - \Theta G_2 \langle v, w \rangle_\Gamma) \quad (17)$$

により定める. (17) 式において, $\langle q, w \rangle_\Gamma$ は $(\langle q, w_1 \rangle_\Gamma, \dots, \langle q, w_N \rangle_\Gamma)$ の転置を表わす. ほかの記号も同様である.

制御系 (15) において, $f'(t)$ を $g(q, v)$ で置きかえれば,

$$\begin{cases} \frac{dq}{dt} + Lq = - (N_0 h_1 \dots N_0 h_M) g(q, v), \\ \frac{dv}{dt} + (L - C)v = -Cq - (N_0 h_1 \dots N_0 h_M) g(q, v), \\ q(0, \cdot) = q_0, \quad v(0, \cdot) = v_0 \end{cases} \quad (18)$$

を得る. 状態 $(q(t), v(t))$ をもつ (18) が, 本文の基本的な方程式であり, これが出発点になる. 関数 $g(q, v)$ が L に従属することに注意すれば, 方程式 (18) は, 明らかに $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ において適切である. つぎの定理は, 本文の主要結果である:

【定理 3】 (i) 制御プラントのパラメータ: $L|_{P_K L^2(\Omega)}$, $\{w_1, \dots, w_N\}$, $\{h_1, \dots, h_M\}$ に関してそれぞれ可観測性, 可制御性:

$$\text{rank } W_i = m_i, \quad \text{rank } H_i = m_i, \quad 1 \leq i \leq K$$

を仮定し, 定理1, 定理2, (ii) でそれぞれ述べた関数 ξ_k , $y_k \in P_K L^2(\Omega)$ を選ぶ. 制御系 (18) において, 関数 $u(t, \cdot)$ を

$$u(t, \cdot) = q(t, \cdot) + \sum_{k=1}^M f_k(t) N_0 h_k, \quad (19)$$

$$f_k(t) = \langle v(t), \zeta_k \rangle_\Omega, \quad 1 \leq k \leq M$$

により定めれば, (u, v) は微分方程式系:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + \mathcal{L}u = 0, & \tau u = \sum_{k=1}^M \langle v, \zeta_k \rangle_\Omega h_k, \\ \frac{dv}{dt} + (L - C)v = \sum_{k=1}^N \langle u, w_k \rangle_\Gamma \xi_k + \sum_{k=1}^M \langle v, \zeta_k \rangle_\Omega C N_0 h_k \\ \quad - (N_0 h_1 \dots N_0 h_M) \tilde{g}(u, v), \\ u(0, \cdot) = u_0, \quad v(0, \cdot) = v_0 \end{cases} \quad (20)$$

の解であり, $r: 0 < \forall r < \lambda_{K+1}$ に対して, 減衰評価:

$$\|u(t, \cdot)\| + \|v(t)\| \leq \text{const } e^{-rt} (\|u_0\| + \|v_0\|), \quad t \geq 0 \quad (21)$$

を満たす. ここで, $\tilde{g}(u, v)$ はつぎのように与えられる:

$$\tilde{g}(u, v) = g(u - (N_0 h_1 \dots N_0 h_M) \langle v, \zeta \rangle_\Omega, v).$$

(ii) $P_n, n \geq 1$ を, 射影作用素 $\sum_{i=1}^n P_{\lambda_i}$ とする. n を大きく選び, (20) 式に小さい摂動を加えることにより, 空間 $L^2(\Omega) \times P_n L^2(\Omega)$ における微分方程式系:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + \mathcal{L}u = 0, & \tau u = \sum_{k=1}^M \langle v, \zeta_k \rangle_\Omega h_k, \\ \frac{dv}{dt} + (L - C_n)v = \sum_{k=1}^N \langle u, w_k \rangle_\Gamma \xi_k \\ \quad + \sum_{k=1}^M \langle v, \zeta_k \rangle_\Omega C N_0 h_k \\ \quad - (P_n N_0 h_1 \dots P_n N_0 h_M) \tilde{g}_n(u, v), \\ u(0, \cdot) = u_0, \quad v(0, \cdot) = v_0 \end{cases} \quad (22)$$

が得られ, (22) の解 $(u, v) \in L^2(\Omega) \times P_n L^2(\Omega)$ は, 評価 (21) を満たす. ここで,

$$\begin{aligned} C_n v &= - \sum_{k=1}^N \langle P_n v, w_k \rangle_\Gamma \xi_k, \\ g_n(q, v) &= (1 - G_1) (\Theta G_2 \langle q, w \rangle_\Gamma \\ &\quad - \langle v, L \zeta \rangle_\Omega - \Theta G_2 \langle P_n v, w \rangle_\Gamma), \\ \tilde{g}_n(u, v) &= g_n(u - (N_0 h_1 \dots N_0 h_M) \langle v, \zeta \rangle_\Omega, v) \end{aligned} \quad (23)$$

である.

証明 (i) 微分方程式系 (18) において差 $q - v$ を取れば,

$$\frac{d}{dt}(q - v) + (L - C)(q - v) = 0, \quad q(0) - v(0) = q_0 - v_0 \quad (24)$$

を満たす. すなわち, $q(t) - v(t) = e^{-t(L-C)}(q_0 - v_0), t \geq 0$ となる. したがって, 定理1により

$$\|q(t) - v(t)\| \leq \text{const } e^{-\lambda_{K+1}t} \|q_0 - v_0\|, \quad t \geq 0$$

が成り立つ. したがって, $f_k(t)$ の定義 (19) により,

$$\begin{aligned} & |f_i(t) - \langle q(t), \zeta_i \rangle_\Omega| \\ &= \left| f_i(t) - \langle u(t), \zeta_i \rangle_\Omega \right. \\ &\quad \left. + (\langle N_0 h_1, \zeta_i \rangle_\Omega \dots \langle N_0 h_M, \zeta_i \rangle_\Omega) \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_M(t) \end{pmatrix} \right| \\ &\leq \text{const } e^{-\lambda_{K+1}t} (\|q_0\| + \|v_0\|), \quad t \geq 0, \quad 1 \leq i \leq M, \end{aligned}$$

あるいはベクトル形式で,

$$\begin{aligned} & |\mathbf{f}(t) - \Theta \langle u(t), \mathbf{y} \rangle_\Omega + \Theta G_1 \mathbf{f}(t)| \\ &\leq \text{const } e^{-\lambda_{K+1}t} (\|q_0\| + \|v_0\|), \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

が成り立つ. ここで, $\mathbf{f}(t)$ はベクトル $(f_1(t) \dots f_M(t))$ の転置を表わす. $\Theta = (1 - G_1)^{-1}$ であるから,

$$\begin{aligned} & |\mathbf{f}(t) - \langle u(t), \mathbf{y} \rangle_\Omega| \\ &\leq \text{const } e^{-\lambda_{K+1}t} (\|q_0\| + \|v_0\|), \quad t \geq 0 \end{aligned} \quad (25)$$

が成り立つ. 同様な計算により,

$$\begin{aligned} & |\mathbf{f}'(t) - \langle u_t(t), \mathbf{y} \rangle_\Omega| \\ &\leq \text{const } t^{-1/4-\epsilon} e^{-\lambda_{K+1}t} (\|q_0\| + \|v_0\|), \quad t > 0 \end{aligned} \quad (26)$$

が得られる. ところで, $\mathbf{f}'(t)$ の定義と (18) における v の方程式より

$$\mathbf{f}'(t) + \langle (L - C)v, \zeta \rangle_\Omega = \Theta G_2 \langle q, w \rangle_\Gamma - \Theta G_1 \mathbf{g}(q, v)$$

であるが, この関係式より容易に,

$$\mathbf{f}'(t) = \langle v_t, \zeta \rangle_\Omega = \mathbf{g}(q, v), \quad t > 0 \quad (27)$$

が成り立つことがわかる.

関数 $\varphi_i, 1 \leq i \leq M$ を,

$$\varphi_i = \sum_{j=1}^M c_{ij} N_0 h_j, \quad \begin{pmatrix} c_{i1} \\ \vdots \\ c_{iM} \end{pmatrix} = (1 - G_1)^{-1} \mathbf{e}_i \quad \mathbf{e}_i|_j = \delta_{ij}$$

により与える. ここで, δ_{ij} は, Kronecker's delta を表わす. このとき, $\varphi_i \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ であり, φ_i は境界値問題:

$$\mathcal{L}\varphi_i = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad \tau_f \varphi_i = h_i \quad \text{on } \Gamma, \quad 1 \leq i \leq M$$

の一意な解になる. 関数 $p(t, \cdot)$ を

$$\begin{aligned} p(t) &= u(t) - (\varphi_1 \dots \varphi_M) (\mathbf{f}(t) - \langle u(t), \mathbf{y} \rangle_\Omega) \\ &= u(t) - \sum_{k=1}^M (f_k(t) - \langle u(t), y_k \rangle_\Omega) \varphi_k \end{aligned}$$

と定めれば, 明らかに $p(t) \in \mathcal{D}(F)$ であり,

$$\frac{dp}{dt} + Fp = -(\varphi_1 \dots \varphi_M) (\mathbf{f}'(t) - \langle u_t(t), \mathbf{y} \rangle_\Omega),$$

あるいは

$$\begin{aligned} p(t) &= e^{-tF} p(0) - \int_0^t e^{-(t-s)F} (\varphi_1 \dots \varphi_M) \\ &\quad \times (\mathbf{f}'(s) - \langle u_s(s), \mathbf{y} \rangle_\Omega) ds \end{aligned}$$

が成り立つことがわかる。評価 (26) により、直ちにつぎの評価を得る：

$$\|p(t)\| \leq \text{const } e^{-rt}, \quad 0 < r < \lambda_{K+1}, \quad t \geq 0.$$

評価 (25) を考慮すれば、つぎの評価：

$$\|u(t)\| + \|v(t)\| \leq \text{const } e^{-rt} (\|u_0\| + \|v_0\|), \quad t \geq 0,$$

すなわち (21) を得る。関係式 (27) により、制御系 (18) は (15) に書きかえることができる。したがって、 (u, v) が満たす方程式は (20) であることがわかる。

(ii) (18) 式の補償器 (v の微分方程式) を有限次元系にもち込むために、(18) に小さい摂動を加える。摂動を受けた方程式は、

$$\begin{cases} \frac{dq}{dt} + Lq = -(N_0 h_1 \dots N_0 h_M) g_n(q, v), \\ \frac{dv}{dt} + (L - C_n)v = -Cq \\ \quad - (P_n N_0 h_1 \dots P_n N_0 h_M) g_n(q, v), \\ q(0, \cdot) = q_0, \quad v(0, \cdot) = v_0 \end{cases} \quad (28)$$

と書ける。ここで、 C_n, g_n は (23) で与えられる。この摂動は、非有界な項： $\langle Q_n v, w_k \rangle_\Gamma$ を含む。しかしながら、つぎの意味で「小さい」ことがわかる：

$$|\langle Q_n L_c^{-1/2} v, w_k \rangle_\Gamma| \leq \frac{\text{const}}{(\lambda_{n+1} + c)^{1/4-\epsilon}} \|v\|, \quad 0 < \epsilon < \frac{1}{4}.$$

したがって、(28) の安定性は、 $n \geq K$ が十分大きい限り、ほとんど影響されない。結局、(28) の解 (q, v) は、減衰評価：

$$\|q(t)\| + \|v(t)\| \leq \text{const } e^{-rt} (\|u_0\| + \|v_0\|), \quad t \geq 0$$

を満たす。減衰係数 $r > 0$ は、少し修正されたものになる。摂動を受けた制御系 (28) においては、文献 7)~10) におけるのと同様に、 $v_0 \in P_n L^2(\Omega)$ である限り、 $v(t) \in P_n L^2(\Omega)$ 、 $t \geq 0$ が示される。その意味で、(28) における v の方程式は、有限次元空間 $P_n L^2(\Omega)$ における方程式と見なすことができる。

(18) におけるのと同様に、(28) において $f(t) = \langle v(t), \zeta \rangle_\Omega$ とおけば、関係式：

$$f'(t) = g_n(q, v), \quad t > 0$$

が成り立つことがわかる。したがって、

$$u(t, \cdot) = q(t, \cdot) + (N_0 h_1 \dots N_0 h_M) \langle v(t), \zeta \rangle_\Omega$$

とおけば、状態 (u, v) をもつ微分方程式系は、(22) として記述される。(22) において v の方程式を $\mathbb{R}^\ell$ 、 $\ell = m_1 + \dots + m_n$ における方程式に書きかえれば、最終的に (1) の表現になる。

4. おわりに

状態 $u(t, \cdot)$ 、入力 $f_k(t)$ をもつ制御系において、境界制御： $\tau u(t, \xi) = \sum_{k=1}^M f_k(t) h_k(\xi)$ を行なう際、新しい状態変数： $q(t, \cdot) = u(t, \cdot) - \sum_{k=1}^M f_k(t) N_c h_k$ をもつ制御系を構成し、これに基づいて安定化フィードバック機構を設計できた。こ

の方法は、従来提案されている 2 通りの方法に続く第 3 番目の代数的方法であり、境界条件の処理において、より考察が簡単になった。文献 10) でも述べたが、非斉次境界条件を打ち消す方法として、楕円型作用素 L が作用する空間を通常より弱い超関数の空間にシフト、あるいは平行移動する抽象的な方法¹¹⁾があるが、本文の展開は、これに比べはるかに制御空間の構造を理解しやすいと思われる。

参考文献

- 1) R. F. Curtain: Finite dimensional compensators for parabolic distributed systems with unbounded control and observation, *SIAM J. Control Optim.* **22**, 255/276 (1984)
- 2) D. Fujiwara: Concrete characterization of the domain of fractional powers of some elliptic differential operators of the second order, *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.* **43**, 82/86 (1967)
- 3) J. S. Gibson and A. Adamian: Approximation theory for linear quadratic-Gaussian optimal control of flexible structures, *SIAM J. Control Optim.* **29**, 1/37 (1991)
- 4) D. Gilbarg and N. S. Trudinger: Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, 2nd ed., Springer-Verlag, New York (1983)
- 5) 伊藤清三: 拡散方程式, 紀伊国屋数学叢書 17, 1979.
- 6) D. G. Luenberger: Observers for multivariable systems, *IEEE Automatic Control* **AC-11**, 190/197 (1966)
- 7) T. Nambu: On stabilization of partial differential equations of parabolic type: Boundary observation and feedback, *Funkcial. Ekvac.* **28**, 267/298 (1985)
- 8) 南部隆夫: 線形放物系に対する安定化補償器, システム/制御/情報 **38**, 666/673 (1994)
- 9) T. Nambu: An algebraic method of stabilization for a class of boundary control systems of parabolic type, *J. Dynamics and Differential Equations* **13**, 59/85 (2001)
- 10) 南部隆夫: 第 1 種境界条件をもつ線形放物系に対する境界安定化, *SICE Trans.* **40**, 80/87 (2004)
- 11) G. Weiss and R. F. Curtain: Dynamic stabilization of regular linear systems, *IEEE Trans. Automat. Control* **AC-42**, 4/21 (1997)
- 12) W. M. Wonham: On pole assignment in multi-input controllable linear systems, *IEEE Trans. Automat. Control* **AC-12**, 660/665 (1967)

[著者紹介]

南部 隆夫 (正会員)

熊本大学助教授、教授を経て、現在、神戸大学教授 (工学部)。Postdoctoral scholar (University of California, Los Angeles), Fulbright scholar (University of Maryland, Baltimore), British Council scholar (University of Warwick), visiting associate professor (Texas A & M University), visiting professor (University of Minnesota)。日本数学会会員。