分布定数 port-Hamilton 系における外乱の構造分解

西 田 豪*・山 北 昌 毅*

Disturbance Structure Decomposition for Distributed Parameter port-Hamiltonian Systems

Gou NISHIDA* and Masaki YAMAKITA*

In this paper, a structure decomposition of disturbances for distributed parameter port-Hamiltonian systems is presented. The distributed parameter port-Hamiltonian system is defined by a Stokes-Dirac structure. The Stokes-Dirac structure has been extended to a structure of the distributed energy that is exchanged on the internal domain besides the supplied energy through the boundary. On the other hand, if the system exists on a contractible region: in other words, it has the same homotopy type as a one point, then the de Rham cohomology of contractible manifolds is trivial. Then any differential form on a contractible region can be decomposed into an exact form and a dual exact form. As a result, these forms correspond to the boundary energy structure and the distributed energy structure, respectively. First, we show that any disturbance can be decomposed into a boundary energy structure and a distributed energy structure. Next, the system representation is given through the decomposition. Finally, one physical example is presented.

Key Words: Hamiltonian systems, distributed parameter systems, algebraic/geometric methods, modeling

1. はじめに

Hamilton 系は、多くの分野で議論されてきた表現形式である¹³⁾。制御の分野では、主に受動性の観点から、port-Hamilton 系として現在までに盛んに研究されてきた^{2), 3)}。この port-Hamilton 系において、入出力のパワー保存接続の性質は、Dirac 構造⁴⁾と呼ばれる幾何学的構造により表現できる。

また、この Dirac 構造の特殊な場合である Stokes-Dirac 構造を用いて、port-Hamilton 系の表現は分布定数系へ拡張されている¹⁾。Stokes-Dirac 構造は、ある領域とその境界における微分形式を用いて定義される。この Stokes-Dirac 構造という名前は、微分積分の基本定理やベクトル解析における Gauss の定理などを、多様体上の微分形式を用いて一般的に表現された Stokes の定理¹⁵⁾に基づいている。この構造を用いて、内部領域のエネルギーの変化がその境界から与えられるパワーに等しいという、パワー保存性が表現できる。この Stokes-Dirac 構造を用いて、いくつかの物理系が分布定数 port-Hamilton 系として定式化され報告されている^{1), 6)~8), 11)}。しかし、特定の物理系に対する個別的なモデリング手法の提案が主であるといえる。

一方、理論的枠組み構築の視点における Stokes-Dirac 構造に対する数学的拡張に関して、いくつかの結果が得られている。文献 1) において、すでにいくつかの拡張が提案されている。また、Timoshenko 梁の定式化において、Hodge star 作用素をもちいた特殊な Stokes-Dirac 構造が導入されている⁸⁾。この特殊な構造は、高階 Stokes-Dirac 構造として一般化されている¹¹⁾。最近では、微分作用素行列の形式的随伴性を用いて、一般の多変数偏微分方程式系に対する表現が提案されている⁹⁾。しかし、Stokes-Dirac 構造を満たさない系を含む場合など、より一般の系に関する統一的な議論には、まだ研究の余地があるといえる。

本稿では、Stokes-Dirac 構造を用いて表現された分布定数 port-Hamilton 系が、外乱を含む場合について考察する。

Stokes-Dirac 構造を用いて表現される分布定数 port-Hamilton 系は、領域内部でのエネルギー変化を境界上だけで評価することができるという、エネルギーに関する境界制御が可能となる。しかし、もしこのようなエネルギー保存系に対して、その性質を満たさない外乱が存在する場合、もしくは、本来系に保存的な性質を満たさない部分系が存在する場合、その構造を把握することができれば、不必要な外乱を抑制するための具体的な制御手法への有益な手掛りとなりうる。

実際に、この外乱の構造は、Stokes-Dirac 構造を満たす境界エネルギー構造と、それを満たさない分布エネルギー構造によって表わされる。後者の定義は、文献 1) における 2 つの空間 Z, S に対する分布エネルギー構造の定義を、単一

* 東京工業大学大学院理工学研究科 機械制御システム専攻
東京都目黒区大岡山 2-12-1

* Dept. of Mechanical and Control Engineering, Tokyo Institute of Technology, Meguroku Oookayama 2-12-1, Tokyo
(Received February 3, 2005)
(Revised June 10, 2005)

の空間 Z に対する構造に限定したものである。

また、ここで考察する外乱は、一般に Stokes-Dirac 構造に対する定義であるが、本稿では、応用で重要と思われる分布定数 port-Hamilton 系について特に注目し述べる。

微分形式は、本来の役割のひとつとして、偏微分方程式を表現するために用いられる。Stokes-Dirac 構造は、微分形式を用いて定義されることから、あるクラスの偏微分方程式系と関係していることが推察される。実際に、これらは物理学における古典場の方程式¹⁶⁾と関連していることがわかってきた¹²⁾。本稿では、可縮な空間、すなわち、Euclid 空間と同相な空間における分布定数 port-Hamilton 系に対し、Stokes-Dirac 構造を満たさない分布エネルギー構造が加わったクラスに限定して考察を行なう。しかし、議論をこのクラスに限定したとしても、上記の理由から、モデルの記述の汎用性は十分保たれるものと考えられる。

本稿の概要は以下のとおりである。

まず最初に、ある条件のもとで与えられた任意の外乱は、境界制御が可能な境界エネルギー構造と、そうでない分布エネルギー構造に一意に分解できることを示す。その条件とは、考える系が可縮な領域であることである。可縮な多様体は、1 点 $\mathbb{R}^0$ と等しいホモトピー型をもつ。同じホモトピー型をもつ多様体の de Rham コホモロジーは互いに同型であり、可縮な場合自明なものとなる。また、向き付けられたコンパクトな Riemann 多様体上の任意の k 形式は、完全形式、双対完全形式、調和形式の和に一意的に分解され、これは Hodge 分解と呼ばれている¹⁵⁾。このとき、de Rham コホモロジー類は、ただ 1 つの調和形式によって代表される。よって、可縮な多様体上の k 形式全体の空間は、 $k > 0$ において、完全形式、双対完全形式の直和によって表わされることになる。分解された完全形式は境界制御が可能な境界エネルギー構造に、双対完全形式が境界上の積分によって評価が不可能な分布エネルギー構造にそれぞれ対応している。

つぎに、この構造分解を用いて、系の具体的な表現を与える。一般の場合を考えると、系は複数のエネルギー対を含む多変数の表現となる。ここで、このエネルギー対は、積によってパワーを与える入出力変数の組であり、境界ポートと呼ばれる。多変数系において Stokes-Dirac 構造は、対応するポートに関して標準の Stokes-Dirac 構造に分解して考えることができる¹¹⁾。よって、最小の構造である標準の Stokes-Dirac 構造に関して任意の外乱を考えた場合、前述の境界エネルギー構造を表わす作用素行列は一般に非対角となり、分布エネルギー構造は対角行列によって表わされることを示す。

最後に、この構造分解の概念を説明するための例を示す。これは、よく知られた物理系のひとつ、Maxwell 方程式である。ここでは、説明のため本来系に存在する分布構造を外乱とみなしている。

本稿の構成は以下のようになっている。まず 2 節で、必要な数学的基礎事項がまとめられている。また 3 節では、分布定数 port-Hamilton 系に対して、境界制御による境界可安定性について議論し、本稿の問題設定を行なう。そして 4 節において、主要な結果として、外乱構造の一意的な分解、および、系の具体的な表現が示される。5 節では、本稿が主張する分解に対する簡単な例題が与えられる。最後に、結論と今後の課題が述べられる。

2. 準備

ここでは、本稿で必要となる数学的基礎事項を定義する。また、通常用いられる慣用的な記法や概念は、以下では特に注意することなく用いることとする。これらについては、文献 15) などに詳しく述べられている。

なお以下では、 M を n 次元 C^∞ 多様体とする。また、 M 上の k 形式全体を $\Omega^k(M)$ と書くことにする。

2.1 微分形式と de Rham コホモロジー

$\Omega^k(M)$ を考えると、外微分作用素と呼ばれる線形写像

$$d: \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M) \quad (1)$$

が定義される。 k 形式 $\omega \in \Omega^k(M)$ は、 $d\omega = 0$ となるとき閉形式といい、 $\omega = d\theta$ となる $(k-1)$ 形式 θ が存在するとき完全形式という。 $d \circ d = 0$ であるから、すべての完全形式は閉形式である。 M 上の閉じた k 形式全体を $Z^k(M)$ 、完全な k 形式全体を $B^k(M)$ と書く。すなわち、

$$Z^k(M) = \text{Ker}(d: \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)), \quad (2)$$

$$B^k(M) = \text{Im}(d: \Omega^{k-1}(M) \rightarrow \Omega^k(M)) \quad (3)$$

である。これらはいずれも、 $\Omega^k(M)$ の線形部分空間である。

【定義】 商空間

$$H_{DR}^k(M) = Z^k(M)/B^k(M) \quad (4)$$

を M 上の k 次元 de Rham コホモロジー群という。

k 次微分形式とは、 M の余接バンドル T^*M の k 次外積べきバンドル $\Lambda^k T^*M$ の切断である。すなわち $\Omega^k(M) = \Gamma(\Lambda^k T^*M)$ である。任意の整数 k ($0 \leq k \leq n$) に対して、 $\Lambda^k T_p^*M$ と $\Lambda^{n-k} T_p^*M$ の次元は一致する。

【定義】 M に Riemann 計量が入っており、さらに向き付けられている場合には、それらに依存してある自然な同型

$$*: \Lambda^k T_p^*M \simeq \Lambda^{n-k} T_p^*M \quad (5)$$

が各点 $p \in M$ に対して定まる。これを、Hodge star 作用素と呼ぶ。点 $p \in M$ を動かすことで、線形写像

$$*: \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{n-k}(M) \quad (6)$$

が定義される。また、 $*1 \in \Omega^n(M)$ は体積形式とよばれ、 $v_M := *1$ と書く。

【定義】 M を Riemann 多様体とすると、線形写像

$$\delta = (-1)^k *^{-1} d * = (-1)^{n(k+1)+1} * d * \quad (7)$$

が定義される。作用素 δ は余微分作用素と呼ばれる。これは、 M に境界がない場合に、外微分 d の随伴作用素となっている。この定義からただちに $\delta \circ \delta = 0$ であることがわかる。

【定義】 Riemann 多様体 M に対して定義される、線形作用素

$$\Delta = d\delta + \delta d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^k(M) \quad (8)$$

を Laplace-Beltrami 作用素という。また、 $\Delta\omega = 0$ となる微分形式 $\omega \in \Omega^k(M)$ を調和形式という。

2.2 Stokes-Dirac 構造と分布定数 port-Hamilton 系

Hamilton 系で記述された物理系同士のポート接続表現を考える。各系を接続している信号は、互いの積がパワーを定義するようなフローとエフォートと呼ばれる2種類の変数によって定義される。これは、電気系では電流と電圧、機械系では速度と力に相当する。パワー保存接続は、フローとエフォートを通じてこれらの接続構造に流入する全エネルギーが零であると定義される。このパワー保存接続は、Dirac 構造⁴⁾によって定式化することができる。

以下では、この Dirac 構造の特別なクラスである Stokes-Dirac 構造を定義し、これを用いて分布定数 port-Hamilton 系の表現を導入する¹⁾。また、分布定数系に対して、境界を通じて交換されるエネルギーのほかに、領域全体を通じて分布的に作用するエネルギーを考えることができる。これは、境界上での積分で評価できない量となっており、通常の境界エネルギー構造と区別して分布エネルギー構造と呼ぶ。ここでは、この両構造をまとめた定義を述べる。

【定義】 $\mathcal{F}$ と $\mathcal{E}$ を線形空間とし、つぎの双線形作用 $\langle | \rangle : \mathcal{F} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{C}$ をペアリングとしてもつと考える。

$$\langle e | f \rangle \in \mathbb{C}, \quad f \in \mathcal{F}, e \in \mathcal{E}. \quad (9)$$

このペアリングの対称化によって、 $\mathbb{C}$ に値をもつ、 $\mathcal{F} \times \mathcal{E}$ 上の対称双線形形式 $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ が定義できる。

$$\langle\langle (f^1, e^1), (f^2, e^2) \rangle\rangle := \langle e^1 | f^2 \rangle + \langle e^2 | f^1 \rangle. \quad (10)$$

【定義】 $\mathcal{F}$ と $\mathcal{E}$ をペアリング (9) をもつ線形空間とする。双線形形式 (10) に関する直交補空間を $\perp$ によって表す。関係 $\mathbb{D} = \mathbb{D}^\perp$ であるような線形部分空間 $\mathbb{D} \subset \mathcal{F} \times \mathcal{E}$ を Dirac 構造と呼ぶ。

【定義】 M を $(n-1)$ 次元の境界 ∂M をもつ n 次元のなめらかな多様体とする。 $\theta \in \Omega^k(M)$ と $\lambda \in \Omega^{n-k}(M)$ の間につぎのペアリングが定義できる。

$$\langle \lambda | \theta \rangle := \int_M \lambda \wedge \theta. \quad (11)$$

以上より、エネルギー変数とその双対エネルギー変数の空間として、つぎのような線形空間 $\mathcal{F}$ とその双対空間として線形空間 $\mathcal{E}$ を考える。

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &:= \Omega^p(M) \times \Omega^q(M) \times \Omega^{n-p}(\partial M) \\ &\quad \times \Omega^p(M) \times \Omega^q(M), \\ \mathcal{E} &:= \Omega^{n-p}(M) \times \Omega^{n-q}(M) \times \Omega^{n-q}(\partial M) \\ &\quad \times \Omega^{n-p}(M) \times \Omega^{n-q}(M), \quad (12) \end{aligned}$$

ここで、 $p+q=n+1$ とする。今、 $\psi_f := (f_p, f_q, f_b, \bar{f}_p, \bar{f}_q) \in \mathcal{F}$ 、および、 $\psi_e := (e_p, e_q, e_b, \bar{e}_p, \bar{e}_q) \in \mathcal{E}$ と定義する。また、つぎで与えられる双線形形式を考える。

$$\begin{aligned} &\langle\langle (\psi_f^1, \psi_e^1), (\psi_f^2, \psi_e^2) \rangle\rangle \\ &:= \int_M (e_p^1 \wedge f_p^2 + e_q^1 \wedge f_q^2 + e_b^2 \wedge f_p^1 + e_q^2 \wedge f_q^1) \\ &\quad + \int_M (\bar{e}_p^1 \wedge \bar{f}_p^2 + \bar{e}_q^1 \wedge \bar{f}_q^2 + \bar{e}_p^2 \wedge \bar{f}_p^1 + \bar{e}_q^2 \wedge \bar{f}_q^1) \\ &\quad + \int_{\partial M} (e_b^1 \wedge f_b^2 + e_b^2 \wedge f_b^1), \quad (13) \end{aligned}$$

ここで、上線のついたエネルギー変数 $\bar{f}, \bar{e}$ は分布エネルギー変数を表わしている。よって、分布エネルギー構造を含む Stokes-Dirac 構造は以下ようになる。

【定理 2.1】¹⁾ つぎの $\mathcal{F} \times \mathcal{E}$ の線形部分空間 $\mathbb{D}$ を定義する。

$$\begin{aligned} \mathbb{D} &= \left\{ (\psi_f, \psi_e) \in \mathcal{F} \times \mathcal{E} \mid \right. \\ &\quad \begin{bmatrix} f_p \\ f_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & (-1)^r d \\ d & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_p \\ e_q \end{bmatrix} + G \begin{bmatrix} \bar{f}_p \\ \bar{f}_q \end{bmatrix}, \\ &\quad \begin{bmatrix} f_b \\ e_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_p|_{\partial M} \\ e_q|_{\partial M} \end{bmatrix}, \left. \begin{bmatrix} \bar{e}_p \\ \bar{e}_q \end{bmatrix} = -G^* \begin{bmatrix} e_p \\ e_q \end{bmatrix} \right\}, \quad (14) \end{aligned}$$

ここで、 $|_{\partial M}$ は境界 ∂M への制限を表わし、 $r := pq+1$ とする。また、線形写像 $G : \Omega^p(M) \times \Omega^q(M) \rightarrow \Omega^p(M) \times \Omega^q(M)$ は、双対写像 $G^* : \Omega^{n-p}(M) \times \Omega^{n-q}(M) \rightarrow \Omega^{n-p}(M) \times \Omega^{n-q}(M)$ をもち、 $\langle e | Gf \rangle = \langle G^*e | f \rangle$ を満たすとする。もし、分布エネルギー変数 $(\bar{f}_p, \bar{f}_q, \bar{e}_p, \bar{e}_q)$ が零であれば、 $\mathbb{D} = \mathbb{D}^\perp$ となり、(14) 式は通常の Stokes-Dirac 構造となる。

(注意 2.1) ここで、文献 1) の (43) 式では、多様体 Z と S に関する線形写像 G とその双対 G^* が定義されている。(14) 式では、 M に関する外乱を扱うため、同じ多様体 M だけの定義に限定してある。前者は、異なる空間との領域内部でのエネルギー交換を表現できるが、後者では単に領域に分布して存在するエネルギー構造を表わしている。

つぎに、Stokes-Dirac 構造を用いて分布定数 port-Hamilton 系を定義する¹⁾。

Hamilton 密度 $\mathcal{H}(\alpha_p, \alpha_q, x) : \Omega^p(M) \times \Omega^q(M) \times M \rightarrow \Omega^n(M)$ を考えることで、系の全エネルギー $\mathcal{H} \in \mathbb{R}$ が定義

できる.

$$\mathcal{H} := \int_M \mathcal{H}, \quad (15)$$

ここで, $\mathcal{H}$ を時間関数と考え軌道に沿って評価すると, 任意の時刻 t における内部エネルギーの変化分としてつぎを得る.

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \int_M \left(\delta_p \mathcal{H} \wedge \frac{\partial \alpha_p}{\partial t} + \delta_q \mathcal{H} \wedge \frac{\partial \alpha_q}{\partial t} \right), \quad (16)$$

ここで, 微分形式 $\partial \alpha_\bullet / \partial t$ はエネルギー変数の時間微分であり, フローを表わす. また, $\delta_\bullet \mathcal{H}$ は, 総エネルギー $\mathcal{H}$ の $\alpha_\bullet$ による変分微分であり, エフォートを表わす. これらのフローとエフォートは, つぎの設定によって Dirac 構造と結合される.

$$f_p = -\frac{\partial \alpha_p}{\partial t}, f_q = -\frac{\partial \alpha_q}{\partial t}, e_p = \delta_p \mathcal{H}, e_q = \delta_q \mathcal{H}. \quad (17)$$

このとき, (14) 式のエネルギー平衡はつぎのようになる.

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \int_M e_b \wedge f_b + \int_M (\bar{e}_p \wedge \bar{f}_p + \bar{e}_q \wedge \bar{f}_q). \quad (18)$$

なお, 実際には, 系 (14) に対して (17) を代入したものが分布定数 port-Hamilton 系を意味するが, 以下の記述においては, 単に (14) を参照して分布定数 port-Hamilton 系を指すこととする.

3. 問題設定

本節では, 最初に分布定数 port-Hamilton 系における, 境界からの制御に対する, ある可安定性について述べる. そして, 具体的な問題設定が与えられる.

3.1 境界制御と境界可安定性

(14) 式において, f_b を境界からの制御入力, e_b を境界上で観測される出力と解釈すると, 分布定数 port-Hamilton 系は, 系全体のエネルギーの変化を境界ポート変数から制御する, 境界制御系と考えることができる¹⁾. この境界制御の利点の1つは, 系の安定化のために境界ポート変数のみを用いればよいという性質である. しかし, もし系に分布エネルギー構造が存在すれば, エネルギー平衡 (18) はその内部状態にも依存してしまう. この性質を考慮して以下を定義する.

[定義] (境界可安定系) 系 (14) を考える. もし分布エネルギー構造 $(\bar{f}_p, \bar{f}_q, \bar{e}_p, \bar{e}_q)$ が存在せず, すべての境界ポート変数が制御入力および観測出力として利用可能とする. このとき, 系は境界可安定である.

このような系に対する, 境界制御手法のひとつはダンピングゲインジェクションである^{5), 8)}. これは, 境界上のすべてのエフォートとそれと対応するフローに負のゲインをかけて接続することで実現できる. 結果として, エフォートとフローはともに平衡状態に収束することになる. このとき系は, ある Lyapunov の意味で安定になる^{8, p.763)}. また, ここで, すべての境界ポート変数が制御入力および観測出力と

して利用可能であれば, 問題設定より系の Hamiltonian が既知であることから, これは従来の非線形系における漸近可検出性に相当する^{17, p.78)}.

つぎに, 系 (14) において, 分布エネルギー構造が境界エネルギー変数によって構成され散逸的である, すなわち, つぎの場合を考える.

$$\begin{bmatrix} \bar{f}_p \\ \bar{f}_q \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} R_p & 0 \\ 0 & R_q \end{bmatrix} G^* \begin{bmatrix} e_p \\ e_q \end{bmatrix}, \quad (19)$$

ここで, 写像 $R_p: \Omega^{n-p}(M) \rightarrow \Omega^p(M)$, $R_q: \Omega^{n-q}(M) \rightarrow \Omega^q(M)$ は

$$\int_M e_p \wedge R_p(e_p) \geq 0, \quad \int_M e_q \wedge R_q(e_q) \geq 0 \quad (20)$$

を満たす. このとき, 系に分布エネルギー構造が存在しても, 系は同じく平衡状態に対して漸近安定となる. これは, 従来の零状態可検出性の概念に相当する^{17, p.209)}.

一方, 一般的な分布エネルギー構造の場合は, 流入と散逸の間のエネルギー平衡によって平衡状態が決定される.

ここで注意すべき点として, 本節で議論している境界制御とは, 制御入力によって内部状態を任意の分布に配置するということを意味しているのではない. 実際には, 系を偏微分方程式系としてみた場合, 制御入力によってある境界条件が与えられることになり, その境界値問題の解として与えられる内部状態を系がとることになる. このとき, 平衡状態は初期状態にかかわらず境界条件によって決定されることになる. よって, 結論として, 平衡状態を基準とした境界からのエネルギー平衡に関してのみ議論していることになる. この意味において, 系の内部状態の制御としては, たとえば, あらかじめ解析によって計算された解などに対して設計された境界条件を, 平衡入力として考えることになる.

つぎに系に外乱が加わる場合について考える. 外乱除去のためのある種のマッチング条件を考え, これを定義する.

[定義] (境界可安定外乱) 系 (14) を考える. すべての外乱は可観測であると仮定する. もし, 境界における外乱 ω の影響が, 境界制御によって境界可安定となるならば, ω は境界可安定外乱と呼ぶ.

3.2 問題の定式化

ここでは, 本稿の取り扱う問題を定義する.

一般的に, 多変数系に対する Stokes-Dirac 構造は, 作用素の線形性により, 通常の Stokes-Dirac 構造 (14) に分解して考えることができる. よって, 問題設定として最小単位の構造について外乱を考える.

[定義] Z を, なめらかな n 次元多様体とし $(n-1)$ 次元のなめらかな境界 ∂Z をもつとする. もし, Stokes-Dirac 構造 (14) に対して外乱 $\omega_p \in \Omega^p(Z)$, $\omega_q \in \Omega^q(Z)$ を考えるならば, 分布定数 port-Hamilton 系は以下のように定義する

ことができる。

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} f_p \\ f_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & (-1)^r d \\ d & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_p \\ e_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_p \\ \omega_q \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} f_b \\ e_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_p|_{\partial Z} \\ e_q|_{\partial Z} \end{bmatrix}, \end{cases} \quad (21)$$

ここで, $r = pq + 1$ である。また, (21) はひとつの Stokes-Dirac 構造のみを含むと仮定する。

系 (21) において, フロー f_p, f_q は系の構造を, そしてエフォート $e_p|_{\partial Z}, e_q|_{\partial Z}$ は境界上のポート変数, すなわちこれらは入力と出力を定義している。

この定義は, 考察の対象となる分布定数 port-Hamilton 系がすでに与えられ, この系が外乱をもつ場合を考える。この外乱は, フローと同じ形式をもつ微分形式であると考えている。ここで, エフォートに対する外乱を考えると, 後で定理 4.2 で述べるように, これは常に境界可安定外乱となる。よって, エフォートに対する外乱を含むより広い状況としてフローに対する外乱を考える。

また, この設定では, 外乱にはエネルギー変数という以上の具体的な意味は与えられていない。制御における観点から, たとえば, 動的な摂動や, 仮想的に追加されたエネルギー構造などと解釈することができる。

以下の節では, (21) について議論を進めていく。

4. 主要な結果

前述の定義に基づき, ここでは, 可縮な空間では与えられた外乱が唯一に分解できることを示す。すなわち, すべての外乱は, 境界エネルギー構造と分布エネルギー構造からなるということである。もし系に境界エネルギー構造のみが存在するとすれば, それは境界可安定系である。

4.1 可解性

外乱 ω_p, ω_q を単に ω と書くことにする。

[補題 4.1] もし, Z_c が n 次元の可縮な領域であるならば, 外乱 $\omega \in \Omega^k(Z_c)$ は $k > 0$ に対して以下のように一意的に分解される。

$$\omega = d\theta + \delta\lambda, \quad (22)$$

ここで, $\theta \in \Omega^{k-1}(Z_c)$ であり, $\lambda \in \Omega^{k+1}(Z_c)$ である。また, δ は余微分作用素である。

(証明) まず最初に, Hodge 分解¹⁵⁾ より, M 上で, 任意の k 形式は, 調和形式, 完全形式, 双対完全形式の和として一意的に分解される。すなわち,

$$\Omega^k(M) = \mathbb{H}^k(M) \oplus d\Omega^{k-1}(M) \oplus \delta\Omega^{k+1}(M) \quad (23)$$

となる。ここで, $\mathbb{H}^k(M) = \{\omega \in \Omega^k(M); \Delta\omega = 0\}$ は M 上の調和 k 形式の全体であり, Δ は Laplace-Beltrami 作用素である。この定理から $\omega \in \Omega^k(Z_c)$ の一意的な分解

$$\omega = \omega_H + d\theta + \delta\lambda \quad (24)$$

が与えられる。ここで, $\theta \in \Omega^{k-1}(Z_c)$ であり, $\lambda \in \Omega^{k+1}(Z_c)$, また, $\omega_H \in \Omega^k(Z_c)$ を調和形式とする。

もし, Z_c が可縮であれば, すなわち, Z_c が一点 $\mathbb{R}^0$ と同じホモトピー型をもつならば, Poincaré の補題¹⁵⁾ により, 可縮な多様体の de Rham コホモロジー群は

$$H_{DR}^k(Z_c) = \begin{cases} \mathbb{R}, & k = 0; \\ 0, & k > 0 \end{cases} \quad (25)$$

となる。Hodge の定理¹⁵⁾ により, 写像 $\mathbb{H}^k(Z_c) \rightarrow H_{DR}^k(Z_c)$ は同型である。よって, $k > 0$ に対して, $\mathbb{H}^k(Z_c) \simeq H_{DR}^k(Z_c) = 0$ となる。Hodge 分解より明らかに $\omega \in \Omega^k(Z_c)$ は $k > 0$ に対して $\omega = d\theta + \delta\lambda$ と書くことができる。■

この関係の概略を以下の図式に示す。

$$\begin{array}{ccc} \theta & 0 & \in \Omega^{k-1}(Z_c) \\ \downarrow d & \uparrow \delta & \\ \omega = d\theta + \delta\lambda + \frac{\omega_H}{=0} & \in \Omega^k(Z_c) & \\ \downarrow d & \uparrow \delta & \\ 0 & \lambda & \in \Omega^{k+1}(Z_c) \end{array} \quad (26)$$

補題 4.1 より, ただちに以下の結果を得ることができる。

《定理 4.2》可縮な領域における (21) を考える。(22) 式において, $d\theta$ は境界エネルギー構造に対応している。

(証明) (22) 式において, 外乱 $\omega_p = d\theta$ を考える。このとき, 新しくエフォート $\bar{e}_q := e_q + (-1)^r \theta$ を定義すれば, (21) は再び Stokes-Dirac 構造であるとみなせる。これは $\omega_q = d\theta$ としても同様である。■

《定理 4.3》可縮な領域における (21) を考える。(22) 式において, $\delta\lambda$ は分布エネルギー構造に対応している。

(証明) 構造 $\delta\lambda$ は, 境界 $\Omega^{k-1}(Z_c)$ 上の積分によって評価することができない。なぜなら, (26) から明らかに, $\lambda \in \Omega^{k+1}(Z_c)$ は境界 $\Omega^{k-1}(Z_c)$ 上で消えてしまうからである。ゆえに, 構造 λ は本質的に, 境界制御によって影響を受けることがない。実際に, エネルギー平衡は

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{H}}{dt} &= - \int_Z [e_p \wedge (f_p + \delta\lambda_p) + e_q \wedge (f_q + \delta\lambda_q)] \\ &= \int_{\partial Z} e_b \wedge f_b + \int_Z (e_p \wedge \delta\lambda_p + e_q \wedge \delta\lambda_q) \end{aligned} \quad (27)$$

となり, (18) と一致する。■

4.2 系の表現

前節では, ある分布定数 port-Hamilton 系に対する外乱について考察した。ここでは, 外乱構造の表現をより一般化するため, (21) におけるエフォート $e_p = e_q = 0$ の場合も含めて考える。すなわち, この場合, ある可縮な空間上にエネルギー流が存在するとき, これは境界エネルギー構造と分布エネルギー構造に一意に分解されるという表現を与える。

《定理 4.4》可縮な領域 Z_c 上の分布定数 port-Hamilton 系 (21) を考える。系 (21) の外乱 $\omega = [\omega_p \ \omega_q]^T$ は, $k > 0$

に対して、一般につきのように書くことができる。

$$\begin{bmatrix} \omega_p \\ \omega_q \end{bmatrix} = \Gamma_b \begin{bmatrix} d\theta_p \\ d\theta_q \end{bmatrix} + \Gamma_d \begin{bmatrix} \delta\lambda_p \\ \delta\lambda_q \end{bmatrix}, \quad (28)$$

ここで、 $d\theta_p \in \Omega^q(Z)$, $d\theta_q \in \Omega^p(Z)$ は境界エネルギー変数、 $\delta\lambda_p \in \Omega^p(Z)$, $\delta\lambda_q \in \Omega^q(Z)$ は分布エネルギー変数、 Γ_b は非対角な実数要素のみをもつ行列であり、 Γ_d は実数要素をもつ対角行列である。以下、非対角な実数要素のみをもつ行列を非対角行列と呼ぶ。

(注意 4.1) ここで、(28) の構造を導入する理由について述べる。後に命題 4.8 で示すように、多変数系に拡張した場合にも (28) の構造が成り立つ。すなわち、一般に境界エネルギー構造と分布エネルギー構造は、 Γ_b, Γ_d に相当する係数行列の構造により判別できることになるからである。

(注意 4.2) ここで、(14) における分布エネルギー構造は、双対写像をもつ G として定義される。よって、文献 1) のように G は形式を変換する作用素として定義されるなら、分布エネルギー変数として任意の形式を用いることができる。注意 2.1 でも述べたように、このとき、この分布エネルギー構造は、領域 Z 内部における異なる領域 S とのエネルギー交換を表現している^{1), 6)~8)}。しかし、(28) ではある微分形式の分解から生じる構造を議論しているため、構造 Γ_d は実数行列であると定義している。この制限は単に問題設定によるものである。

定理 4.4 の証明のための準備を以下に示す。

[補題 4.5] 可縮な領域における (21) を考える。このとき、系 (21) の外乱 ω が完全形式である、すなわち、(28) において $\delta\lambda = 0$ であり、また、 Γ_b が非対角行列であるとき、かつこのときに限り、境界エネルギー構造となる。

(証明) 系 (21) に対する、外乱を ω とする。もし、 ω が完全形式なら、 $\omega = d\theta$ である。このとき (21) は一般に以下のように書ける。

$$\begin{bmatrix} f_p \\ f_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & (-1)^r d \\ d & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_p \\ e_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\theta_p \\ d\theta_q \end{bmatrix}, \quad (29)$$

ここで、 g_{ij} , $(i, j = 1, 2)$ は実数値関数とする。

まず、対角要素 γ_{11} と γ_{22} が零であると仮定すると、(29) は以下のように変形できる。

$$\begin{bmatrix} f_p \\ f_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & (-1)^r d \\ d & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_p + \gamma_{21} \theta_p \\ e_q + (-1)^r \gamma_{12} \theta_q \end{bmatrix}. \quad (30)$$

(30) 式において、 $\tilde{e}_p := e_p + \gamma_{21} \theta_p$, $\tilde{e}_q := e_q + (-1)^r \gamma_{12} \theta_q$ と考えれば、Stokes-Dirac 構造となる。またこのとき、境界構造は以下のように定義できる。

$$\begin{bmatrix} \tilde{f}_b \\ \tilde{e}_b \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{e}_p|_{\partial Z_c} \\ \tilde{e}_q|_{\partial Z_c} \end{bmatrix}. \quad (31)$$

つぎに、 γ_{11} と γ_{22} が零でない場合を考える。問題設定より、外乱は一意的な分解により得られているので、非対角要素 γ_{12}, γ_{21} と対角要素 γ_{11}, γ_{22} のどちらかの組み合わせが零となる。よって、つぎの構造

$$\begin{bmatrix} f_p \\ f_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & (-1)^r d \\ d & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_p \\ e_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma_{11} & 0 \\ 0 & \gamma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\theta_p \\ d\theta_q \end{bmatrix} \quad (32)$$

が、適当な境界ポートとともに Stokes-Dirac 構造を満たすかどうか調べればよい。(32) 式の第 1 項は Stokes-Dirac 構造を満たすことから、今、第 2 項のみに注目する。

線形部分空間の 2 つの組 $\psi_d^1 := (f_p^1, f_q^1, \theta_p^1, \theta_q^1, f_b^1, e_b^1)$, $\psi_d^2 := (f_p^2, f_q^2, \theta_p^2, \theta_q^2, f_b^2, e_b^2)$ を考える。まず $\psi_d^1 \in \mathbb{D}$ とし、 $\psi_d^2 \in \mathbb{D}$ となるものを考える。構造 (32) を (13) に代入することによって、(13) の右辺は以下ようになる。

$$\int_{Z_c} (\gamma_{11} \theta_p^1 \wedge d\theta_p^2 + \gamma_{22} \theta_q^1 \wedge d\theta_q^2 + \gamma_{11} \theta_p^2 \wedge d\theta_p^1 + \gamma_{22} \theta_q^2 \wedge d\theta_q^1) + (-1)^p \int_{\partial Z_c} (\theta_q^1 \wedge \theta_p^2 + \theta_q^2 \wedge \theta_p^1). \quad (33)$$

よって、すべての θ が零になるとき、かつそのときに限り、(33) は零に等しくなる。なぜなら、いま ω は完全形式であると仮定しているので $\omega = d\theta$ は零でない。ゆえに、Dirac 構造を満たさない。このことは、対角構造 $\gamma_{11} d\theta_p$ と $\gamma_{22} d\theta_q$ が境界可制御な構造とは独立なものであることを意味している。よって、対角要素 γ_{11} と γ_{22} は零であれば、(29) が境界可制御である。 ■

(注意 4.3) 補題 4.5 では、外乱が既知であることを仮定した。しかし、実際問題としてダンピングインジェクションを適用する場合、外乱が境界エネルギー構造に属することのみわかっていれば、系は平衡状態に対して境界可安定となる。なぜなら、外乱が境界エネルギー構造に属する場合、外乱はエフォートの摂動として考えることができるからである。

[補題 4.6] 逆に、もし、 Γ_b の対角要素 γ_{11}, γ_{22} が零でないような、すなわち、(33) のような構造の外乱が系に実際に存在していると仮定する。このとき、定義より $d\theta$ を与える θ が存在する。よって、2 つの線形空間

$$\begin{aligned} \mathcal{F}' &:= \Omega^{p-1}(Z_c) \times \Omega^{q-1}(Z_c) \times \Omega^{n-p+1}(\partial Z_c), \\ \mathcal{E}' &:= \Omega^{n-p+1}(Z_c) \times \Omega^{n-q+1}(Z_c) \times \Omega^{n-q+1}(\partial Z_c) \end{aligned} \quad (34)$$

を考えると、これは、 $(f'_p, f'_q, e'_p, e'_q, f'_b, e'_b) \in \mathcal{F}' \times \mathcal{E}'$ として定義された別の Stokes-Dirac 構造に対する外乱としてつぎのように考えることができる。

$$\begin{bmatrix} f'_p \\ f'_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & (-1)^s d \\ d & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e'_p \\ e'_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma_{11} & 0 \\ 0 & \gamma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_p \\ \theta_q \end{bmatrix}, \quad (35)$$

ここで、 $s = pq - n + 1$, $f_p = df'_p$, $f_q = df'_q$ である。

(証明) 実際に、(35) の両辺に d をかけると、(33) が得られる。 ■

(注意 4.4) つぎで述べるように、補題 4.6 における θ は分布エネルギー構造に対応している。しかし、1つの Stokes-Dirac 構造に対する外乱について考えるという仮定に反することになる。よって、結果として、対角要素 γ_{11} と γ_{22} は、 $d\theta$ の外乱構造から分離して議論することができる。

$d\theta$ に関する構造に関しては上で述べたので、 $\delta\lambda$ に関する構造について考える。

[補題 4.7] 可縮な領域における (21) を考える。もし、 $\delta\lambda$ が存在するならば、 Γ_d は対角行列である。

(証明) 系 (21) は、一般に以下のような形となる。

$$\begin{bmatrix} f_p \\ f_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & (-1)^r d \\ d & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_p \\ e_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\lambda_p \\ \delta\lambda_q \end{bmatrix}. \quad (36)$$

(36) 式の両辺に d をかけることによって、以下を得る。

$$\begin{bmatrix} df_p \\ df_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\delta\lambda_p \\ d\delta\lambda_q \end{bmatrix}. \quad (37)$$

いま、非対角要素 γ_{12} と γ_{21} のみが存在すると仮定する。2つの線形空間

$$\begin{aligned} \mathcal{F}'' &:= \Omega^{p+1}(Z_c) \times \Omega^{q+1}(Z_c) \times \Omega^{n-p-1}(\partial Z_c), \\ \mathcal{E}'' &:= \Omega^{n-p-1}(Z_c) \times \Omega^{n-q-1}(Z_c) \times \Omega^{n-q-1}(\partial Z_c) \end{aligned} \quad (38)$$

を定義し、 $f_p'' = df_p$, $f_q'' = df_q$ とおくと、補題 4.6 と同様に、(37) は、 $(f_p'', f_q'', e_p'', e_q'', f_b'', e_b'') \in \mathcal{F}'' \times \mathcal{E}''$ における Stokes-Dirac 構造に対する、境界エネルギー構造としての外乱と考えることができる。

$$\begin{bmatrix} f_p'' \\ f_q'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & (-1)^t d \\ d & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_p'' \\ e_q'' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\delta\lambda_p \\ d\delta\lambda_q \end{bmatrix}, \quad (39)$$

ここで、 $t = pq + n + 1$ である。しかし、注意 4.4 と同様の議論より、いま (21) はあるひとつの Stokes-Dirac 構造についてのみ考慮しているので、もし、このような非対角構造が存在するならば、別の Stokes-Dirac 構造における外乱として定義されるべきである。さらに、これは定理 4.3 より、本来考えている系の境界エネルギー構造には影響を与えない。よって、一般性を失うことなく $\gamma_{12} = \gamma_{21} = 0$ として考えることができる、すなわち、つぎのようになる。

$$\begin{bmatrix} f_p \\ f_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & (-1)^r d \\ d & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_p \\ e_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma_{11} & 0 \\ 0 & \gamma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\lambda_p \\ \delta\lambda_q \end{bmatrix}, \quad (40)$$

ここで、 $\bar{f}_p = \delta\lambda_p$, $\bar{f}_q = \delta\lambda_q$, および

$$\begin{bmatrix} \bar{e}_p \\ \bar{e}_q \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \gamma_{11} & 0 \\ 0 & \gamma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_p \\ e_q \end{bmatrix} \quad (41)$$

を定義する。すると、これは、分布エネルギー構造 (14) に一致していることがわかる。■

(定理 4.4 の証明) 補題 4.1 より、外乱 ω の完全な部分 $d\theta$

と双対完全な部分 $\delta\lambda$ への分解を得る。つぎに、 Γ_b と Γ_d の行列構造の詳細は、補題 4.5 と、補題 4.6、そして、補題 4.7 から得られる。以上より、主要な構造分解 (28) が与えられることが示された。■

また、この構造は以下のように多変数系へ拡張できる。

[命題 4.8] ある整数 $m > 0$ に対して、以下のような外乱を含む多変数系を一般的に考えることができる。

$$\begin{cases} F = A \cdot E + G \cdot F_d + \Gamma_b \cdot \Theta + \Gamma_d \cdot \Lambda, \\ \begin{bmatrix} F_b \\ E_b \end{bmatrix} = B \cdot E, \quad E_d = -G^* \cdot E, \end{cases} \quad (42)$$

ここで、エネルギー変数は以下のように定義する。

$$F = [f_1, \dots, f_{2m}]^T, \quad E = [e_1, \dots, e_{2m}]^T, \quad (43)$$

$$F_b = [f_{b,1}, \dots, f_{b,m}]^T, \quad E_b = [e_{b,1}, \dots, e_{b,m}]^T, \quad (44)$$

$$F_d = [\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_{2m}]^T, \quad E_d = [\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_{2m}]^T, \quad (45)$$

$$\Theta = [d\theta_1, \dots, d\theta_{2m}]^T, \quad \Lambda = [\delta\lambda_1, \dots, \delta\lambda_{2m}]^T. \quad (46)$$

また、各行列は $2m \times 2m$ 行列であり、境界エネルギー構造として、非対角作用素行列 A は系が本来もつ基本構造を、実数値行列 B が境界ポートを表わしている。そして、対角作用素行列 G で分布エネルギー構造を定義している。また、 G^* は、 G に対する双対作用素を表わしている。系に加わる外乱として、非対角実数値行列 Γ_b で境界エネルギー構造に対するもの、対角実数値行列 Γ_d で分布エネルギー構造に対する外乱を表わしている。

(証明) 3.2 節において述べたように、Stokes-Dirac 構造に含まれる作用素の線形性から、多変数系は最小単位の Stokes-Dirac 構造に分割して考えられるという議論より直ちに成り立つ。■

5. 適用例

本節では、前述の構造分解を説明するための物理系に対する分解例を与える。ここでは、説明のために、境界構造に属さない構造、すなわち、分布構造を外乱と考えている。

5.1 Maxwell の方程式

Maxwell の方程式の分布定数 port-Hamilton 系としての定式化はすでに示されている¹⁾。ここでは、連続の方程式

$$dJ = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (47)$$

を導入することにより、その分布エネルギー構造について述べる。ここで、 $J \in \Omega^2(Z)$ は電流密度、 $\rho \in \Omega^3(Z)$ は電荷密度とする。 Z を境界 ∂Z をもつ 3 次元多様体とする。 Z における電磁場を考える。エネルギー変数は、電束密度 $D \in \Omega^2(Z)$ と磁束密度 $B \in \Omega^2(Z)$ として定義する。また、双対エネルギー変数は、電場 $E \in \Omega^1(Z)$ と磁場の強さ $H \in \Omega^1(Z)$ と定義される。

全エネルギーは

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \int_Z (E \wedge D + H \wedge B) \quad (48)$$

であり, これより $\delta_D \mathcal{H} = E$, $\delta_B \mathcal{H} = H$ と定義されることがわかる.

Maxwell の方程式は以下のように書くことができる.

$$-\begin{bmatrix} \partial_t D \\ \partial_t B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -d \\ d & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_D \mathcal{H} \\ \delta_B \mathcal{H} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (49)$$

$$\begin{bmatrix} f_b \\ e_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_D \mathcal{H}|_{\partial Z} \\ \delta_B \mathcal{H}|_{\partial Z} \end{bmatrix}, \quad (50)$$

$$e_d = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_D \mathcal{H} \\ \delta_B \mathcal{H} \end{bmatrix}, \quad (51)$$

$$-\begin{bmatrix} \partial_t \rho \\ d \partial_t B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (52)$$

ここで, $dD = \rho$ であり, $\partial_t = \partial/\partial t$ とする. 以上より, (52) 式は (47) であるが, これは (49) の左辺に d をかけた式に等しいことがわかる.

一方, (21) に d をかけることにより以下を得る.

$$\begin{bmatrix} df_p \\ df_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & 0 \\ 0 & \gamma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\delta\lambda_p \\ d\delta\lambda_q \end{bmatrix}. \quad (53)$$

すなわち, (52) と (53) の構造が一致していることがわかる.

6. おわりに

本稿では, 分布定数 port-Hamilton 系の外乱構造に対する分解について述べた.

ここでは, 可縮な領域であるという仮定をおいて議論を進めた. もし, より大域的な構造を意識して, 系の境界における複数のエネルギー流入出を陽に扱う場合には, もっと一般的な位相的状况を考える必要がある. これは, Hodge の定理により不変量となる次元に関する情報を, 多様体の形を調べるために用いることを意味する. これらの大域的な状況に対する取り組みについては今後の課題である.

また, 特定のベクトル場などに対する, より具体的な状況に対する構造分解には, 可縮であるという限定的な仮定のもとで, 外微分作用素の対として, ある積分の作用を与えるホモトピー作用素を定義して議論することが必要となってくる. これについても, 現在研究中である.

参考文献

- 1) A.J. van der Schaft and B.M. Maschke: Hamiltonian formulation of distributed-parameter systems with boundary energy flow, *J. of Geometry and Physics*, **42**, 166/194 (2002)
- 2) A.J. van der Schaft: Port-controlled Hamiltonian Systems: Towards a Theory for Control and Design of Nonlinear Physical Systems, 計測と制御, **39-2**, 91/98 (2000)
- 3) 藤本健治: ハミルトニアンシステムの制御, 計測と制御, **39-2**, 99/104 (2000)

- 4) T. Courant: Dirac manifolds, *Trans. American Math. Soc.*, 319, 631/661 (1990)
- 5) H. Rodríguez, A.J. van der Schaft and R. Ortega: On Stabilization of Nonlinear Distributed Parameter Port-Controlled Hamiltonian Systems via Energy-Shaping, *Proc. IEEE Conf. on Deci. and Cont.*, Florida, 131/136 (2001)
- 6) D. Eberard and B.M. Maschke: An extension of port Hamiltonian systems with boundary energy flow to irreversible systems: the example of heat conduction, *Proc. NOLCOS*, Stuttgart, 257/262 (2004)
- 7) R. Lopezlena and J.M.A. Scherpen: On distributed Port-Hamiltonian process systems, *Proc. NOLCOS*, Stuttgart, 1253/1258 (2004)
- 8) A. Macchelli and C. Melchiorri: Modeling and control of the Timoshenko beam. The distributed port Hamiltonian approach, *SIAM J. on Control and Optimization*, **43-2**, 743/767 (2004)
- 9) A. Macchelli, A.J. van der Schaft and C. Melchiorri: Port Hamiltonian Formulation of Infinite Dimensional Systems I. Modeling, *Proc. IEEE Conf. on Deci. and Cont.*, Bahamas, 3762/3767 (2004)
- 10) G. Nishida and M. Yamakita: Disturbance Structure Decomposition for Distributed-Parameter Port-Hamiltonian Systems, *Proc. IEEE Conf. on Deci. and Cont.*, Bahamas, 2082/2087 (2004)
- 11) 西田, 山北: 高階 Stokes-Dirac 構造, 計測自動制御学会論文集, **41-7**, 572/579 (2005)
- 12) G. Nishida and M. Yamakita: Formal Distributed Port-Hamiltonian Representation of Field Equations, *Proc. IEEE Conf. on Deci. and Cont.*, Seville (2005)
- 13) V.I. Arnol'd: *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer-Verlag (1978)
- 14) A.J. van der Schaft: *L₂-Gain and Passivity Techniques in Nonlinear Control*, 2nd ed., Springer-Verlag (2000)
- 15) S. Morita: *Geometry of Differential Forms*, A.M.S. (2001)
- 16) 木村, 菅野: 微分形式による解析力学, 改訂増補版, 吉岡書店 (1996)
- 17) 井村順一: システム制御のための安定論, コロナ社 (2000)

[著者紹介]

西田 豪 (学生会員)

1997 年, 東京都立科学技術大学工学部電子システム工学科卒業. 99 年, 東京工業大学大学院理工学研究科修士課程制御工学専攻修了. 同年, 住友重機械工業(株)勤務. 2002 年, 同社退職. 2005 年, 東京工業大学大学院理工学研究科修士課程機械制御システム専攻修了. 現在に至る. 非線形制御理論の研究に従事. 工学博士. IEEE などの会員.

山北 昌毅 (正会員)

1990 年, 東京工業大学理工学研究科修士課程制御工学専攻修了. 同年, 同大学工学部助手. 93 年, 豊橋技術科学大学工学部講師. 95 年, 東京工業大学工学部助教授. 2001 年, 同大学大学院理工学研究科助教授. 現在に至る. 制御工学とロボット工学の研究に従事. 工学博士. 日本ロボット学会, IEEE などの会員.