冗長関節リーチング問題の不良設定性を自然解消する 重力補償つき制御法と書字ロボットへの応用

有本 卓*・橋口 宏衛*

A Control Scheme with Gravity Compensation Naturally Resolving the Ill-posedness
of Redundant Multi-joint Reaching and Its Application to Handwriting Robots

Suguru ARIMOTO* and Hiroe HASHIGUCHI*

In order to enhance dexterity in execution of robot tasks a surplus number of DOFs (Degrees of Freedom) is necessary for design of robotic mechanisms. In case of such redundant robots, it is said that a problem of inverse kinematics becomes ill-posed and therefore an extra performance index is indispensable to determine uniquely the inverse mapping from task space to joint space. This paper treats a problem of reaching tasks under the effect of gravity by a redundant robot arm or hand and shows that such ill-posedness of DOF redundancy can be resolved in a natural way by using a simpler task-space feedback with adequate dampings at joints and gravity compensation and without introducing any extra performance index. An application of the proposed method to control of hand-writing robots is also discussed.

Key Words: redundancy resolution, multi-joint reaching, ill-posed inverse kinematics,
gravity compensation, handwriting robots

1. はじめに

人間らしい運動を行ない、器用に作業するロボットの実現を目指し、人間の腕や手に似せてロボットアームを造ると、それは冗長自由度系になる。冗長自由度系に対しては、作業空間から関節空間への逆運動学が不良設定になり、作業を実現する制御系を設計するためには、人為的な動作指標を導入し、それを最小化して不良設定性を解消せねばならないとされてきた。しかし、人間は、複雑な計算を行なうことなく、自由自在に運動を生成し、器用な作業を行なう。この謎は Bernstein の問題と呼ばれ¹⁾、心理学や運動生理学ではさまざまな仮説が提案されてきたが、根本的な解決には至っていない²⁾。しかし、ごく最近、逆運動学を解かなくても、作業座標フィードバックによって冗長自由度系に対する逆運動学の不良設定性が自然に解消できることが、最も単純な水平面下に運動を限定した多関節リーチング問題について、初めて示された³⁾。また、冗長自由度をもつ書字ロボットについても、重力項が直接補償できれば、平面リーチング問題と同様に、ダンピング成形つき作業座標フィードバックが有効であることが、理論的⁴⁾、かつ実験的^{5),6)}にも示された。

本論文では、垂直平面下で回転する三つの関節（これらの関節軸は xy 平面にある）と z 軸まわりに回転する関節の四関節リーチング運動について、逆運動学や逆動力学を解かずに制御する自然な方法を提案し、その有効性を理論解析するとともに、シミュレーション結果を示す。また、提案の方法を書字ロボットの制御の応用し、その有効性をシミュレーションで明らかにする。

2. 重力下における冗長多関節リーチングとそのダイナミクス

Fig. 1 の模式図に示すような書字ロボットについて、ペン先を xy 平面の上のほうにある初期位置 $\mathbf{x}^0 (= (x^0, y^0, z^0))$ から xy 平面上の目標点 $\mathbf{x}_d (= (x_d, y_d, z_d = 0))$ にもっていき制御法を考える。ここに、当然であるが、 $z^0 > 0$ であり、制御開始から終了までペン先位置 $\mathbf{x} (= (x, y, z))$ の z は負にはならないし、ペンを含めたロボットのリンクの一部が xy 平面と接することが起こってはならない。ロボットの関節座標を $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3, q_4)^T$ にとると、Fig. 1 は形式的には Fig. 2 のように定式化できよう。このとき、ペン先の位置が xy 平面より上にある限り、ロボットの運動はラグランジュの運動方程式

$$H(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \left\{ \frac{1}{2}\dot{H}(\mathbf{q}) + S(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \right\} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{u} \quad (1)$$

に従う。ここに $H(\mathbf{q})$ は 4×4 の慣性行列であり、ラグランジアンを $L = K - P$ とすれば $K = (1/2)\dot{\mathbf{q}}^T H(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$

* 立命館大学理工学部ロボティクス学科 草津市野路東 1-1-1

* Department of Robotics, Ritsumeikan University, Kusatsu
(Received February 3, 2005)

(Revised August 1, 2005)

Fig. 1 Human handwriting

Fig. 2 A handwriting robot with four joints (four degrees of freedom)

であり, $g(q)$ は重力項である. なお, (1) 式の $S(q, \dot{q})$ は skew-symmetric である⁷⁾. つぎに, ペン先の位置 $x = (x, y, z)^T$ を q の成分で表わしておくと, つぎのようになる.

$$z = \phi(q) = l_1 + l_2 s_2 + l_3 s_{23} + l_4 s_{234} \quad (2)$$

$$x = \varphi(q_2, q_3, q_4) c_1, \quad y = \varphi(q_2, q_3, q_4) s_1 \quad (3)$$

ここに

$$\varphi = \sqrt{x^2 + y^2} = l_2 c_2 + l_3 c_{23} + l_4 c_{234} \quad (4)$$

であり, z は q_1 に無関係になることに注意しておきたい. なお, ここでは $s_{23} = \sin(q_2 + q_3)$, $c_2 = \cos q_2$, などと略記した. また, ポテンシャル関数は

$$P(q) = g\{(m_2 r_2 + m_3 l_2 + m_4 l_2) s_2 + (m_3 r_3 + m_4 l_3) s_{23} + m_4 r_4 s_{234}\} \quad (5)$$

と表わされ, 重力項は $g(q) = \{\partial P(q)/\partial q\}^T$ と表わされ, 各要素はつぎのようになる.

$$\begin{cases} g_1(q) = 0 \\ g_2(q) = g\{(m_2 r_2 + m_3 l_2 + m_4 l_2) c_2 + (m_3 r_3 + m_4 l_3) c_{23} + m_4 r_4 c_{234}\} \\ g_3(q) = g\{(m_3 r_3 + m_4 l_3) c_{23} + m_4 r_4 c_{234}\} \\ g_4(q) = g m_4 r_4 c_{234} \end{cases} \quad (6)$$

なお, r_i は第 i 関節の中心からリンク i の質量中心までの距離を表わし, g は重力定数を表わす.

3. 冗長関節リーチングの新しい制御法

冗長関節リーチングの制御には, 代表的な方法としてヤコビアン行列 $J(q)$ の擬似逆行列を用いる方法や, 人為的な動作指標を導入してそれを最小化することによって関節軌道を一意的に求める方法, あるいは, 制御入力

$$u = H(q)J(q)^+(\ddot{x}_d - \dot{J}(q)\dot{q}) + h(q, \dot{q}) + (I_4 - J^+(q)J(q))v \quad (7)$$

とする方法などが提案された. ここに (7) 式の $\ddot{x}$ は目標に向かう手先加速度軌道, $h(q, \dot{q})$ は慣性項以外のすべての非線形項の直接補償項であり, $J^+(q)$ は $J(q)$ の擬似逆行列, v は導入した動作指標の最小化から求める. なお, (7) 式の右辺の第四項は零化空間における制御と考えられるので, 手先のカルテシアン系内の運動には影響を与えないとされた. ここでは, これらの伝統的な方法とは全く異なって, 最も単純な制御法

$$u = -C\dot{q} - kJ^T(q)\Delta x + Y(q)\hat{\Theta} \quad (8)$$

を提案する. ここに k はスカラー値のゲイン, C はダンピングに関するゲイン行列, $\hat{\Theta}$ は重力項の未知パラメータ $\Theta = (m_2 s_2 + m_3 l_2 + m_4 l_2, m_3 s_3 + m_4 l_3, m_4 s_4)^T$ の推定量, $Y(q)$ は回帰子と呼ばれる 4×3 の行列

$$Y(q) = g \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ c_2 & c_{23} & c_{234} \\ 0 & c_{23} & c_{234} \\ 0 & 0 & c_{234} \end{pmatrix} \quad (9)$$

である. なお, $\hat{\Theta}(t)$ はつぎのように因果律を満たす更新則で実時間計算するとする.

$$\hat{\Theta}(t) = \hat{\Theta}(0) - \int_0^t \eta^{-1} Y^T(q(\tau)) s(\tau) d\tau \quad (10)$$

$$s(t) = \dot{q}(t) + C^{-1} k J^T(q(t)) \Delta x(t) \quad (11)$$

ここで, η はリグレッサゲインを表わすスカラー値である. (8) 式を (1) 式に代入し, つぎの閉ループダイナミクスを得る.

$$H\ddot{q} + \left(\frac{1}{2}\dot{H} + S\right)\dot{q} + C\dot{q} + kJ^T\Delta x - Y\Delta\Theta = 0 \quad (12)$$

ここに $\Delta\Theta = \hat{\Theta} - \Theta$ であり, H や S, J, Y が依存する従属変数 q や $\dot{q}$ の表記は, 混乱が起らない限り, 省略する.

始めに, $\Delta\dot{\Theta} = d\hat{\Theta}/dt = -\eta^{-1} Y^T s$ となることに注意して, (12) 式の両辺と $s (= \dot{q} + C^{-1} k J^T \Delta x)$ との内積をとると, つぎの式が成立する.

$$\frac{d}{dt} W = -\dot{q}^T C \dot{q} - k^2 \Delta x^T J C^{-1} J^T \Delta x + k h(J^T \Delta x, \dot{q}) \quad (13)$$

ここに

$$W = \frac{1}{2} \dot{q}^T H \dot{q} + k \|\Delta x\|^2 + \frac{\eta}{2} \|\Delta\Theta\|^2 + k \dot{q}^T H C^{-1} J^T \Delta x \quad (14)$$

$$h(J^T \Delta x, \dot{q}) = \dot{q}^T H C^{-1} J^T \Delta \dot{x} + \dot{q}^T \left\{ \left(\frac{1}{2} \dot{H} + S \right) C^{-1} J^T + H C^{-1} \dot{J} \right\} \Delta x \quad (15)$$

である。\$S\$ や \$\dot{H}\$, \$\dot{J}\$ は \$\dot{q}\$ について線形漸次, かつ \$\Delta \dot{x} = J \dot{q}\$ なので, \$h(J^T \Delta x, \dot{q})\$ は \$\dot{q}\$ についての2次形式で表わされる。ここで, 慣性行列 \$H(q)\$ を規定するロボットの物理パラメータを Table 1 に示しておく。\$H(q)\$ は対称正定であり, 各 \$ij\$ 成分は高々 \$10^{-4}\$ のオーダーであることがわかる。そこでダンピング係数 \$c_i\$ (対角行列 \$C\$ の第 \$i\$ 対角要素) を \$10^{-2}\$ のオーダーに取ったとしよう。また, \$J\$ の各成分は高々 \$10^{-1}\$ のオーダーである。このとき, 不等式

$$-k \dot{q}^T H C^{-1} J^T \Delta x \leq \frac{1}{8} \dot{q}^T H \dot{q} + 2k^2 \Delta x^T J C^{-1} H C^{-1} J^T \Delta x \quad (16)$$

が成立することに注目すれば

$$W \geq \frac{3}{8} \dot{q}^T H \dot{q} + \frac{\eta}{2} \|\Delta \theta\|^2 + k \Delta x^T \{I_3 - 2k J C^{-1} H C^{-1} J^T\} \Delta x \quad (17)$$

となることがわかり, \$C^{-1} H C^{-1}\$ のすべての固有値は1のオーダー以下なので, \$J C^{-1} H C^{-1} J^T\$ の三つの固有値は \$10^{-2}\$ のオーダーとなり, \$k \le 15.0\$ のとき, \$W\$ は \$\dot{q}\$, \$\Delta x\$, \$\Delta \theta\$ について正定になる。つぎに, ペン先 \$x\$ は \$t=0\$ のとき, 目標点 \$x_d\$ から高々 \$0.08\$ [m] 以上は離れていない場合を考えよう。このとき, \$h(J^T \Delta x, \dot{q})\$ の各項を吟味すると, それら各項は \$\|\dot{q}\|^2\$ の約 \$10^{-4}\$ 倍のオーダーであることがわかる。したがって, \$k \le 15.0\$ のとき,

$$kh(J^T \Delta x, \dot{q}) \leq \frac{1}{4} \dot{q}^T C \dot{q} \quad (18)$$

として良い。こうして

$$\frac{d}{dt} W \leq -\frac{3}{4} \dot{q}^T C \dot{q} - k^2 \Delta x^T J C^{-1} J^T \Delta x \quad (19)$$

となり, \$W\$ が \$\dot{q}\$, \$\Delta \theta\$, \$\Delta x\$ について正定なので \$\dot{q}\$, \$\Delta \theta\$, \$\Delta x\$ は有界である。すなわち, \$\dot{q}\$, \$\Delta \theta\$, \$\Delta x\$ の各ノルムはそれぞれある値を越えない。つぎに, 等号

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\beta \Delta \theta^T Y^T C^{-1} H \dot{q}) &= \beta \Delta \theta^T Y^T C^{-1} \{Y \Delta \theta - C s + \left(\frac{1}{2} \dot{H} - S\right) \dot{q}\} \\ &\quad + \beta (\Delta \theta^T Y^T + \Delta \theta^T \dot{Y}) C^{-1} H \dot{q} \\ &= \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\eta \beta}{2} \|\Delta \theta\|^2 \right\} + \beta \Delta \theta^T Y^T C^{-1} Y \Delta \theta \\ &\quad + \beta h(Y \Delta \theta, \dot{q}) \end{aligned} \quad (20)$$

が成立することに注目しよう。ここに \$h(Y \Delta \theta, \dot{q})\$ は \$h(J^T \Delta x, \dot{q})\$ の式で \$J^T \Delta x\$ を \$Y \Delta \theta\$ に置き換えて作られた。そこでスカラー関数 \$V\$ をつぎのように定義する。

$$\begin{aligned} V &= W + \frac{\eta \beta}{2} \|\Delta \theta\|^2 - \beta \Delta \theta^T Y^T C^{-1} H \dot{q} \\ &= \frac{1}{2} \dot{q}^T H \dot{q} + k \|\Delta x\|^2 + \frac{\eta(1+\beta)}{2} \|\Delta \theta\|^2 \\ &\quad + \dot{q}^T H C^{-1} \{k J^T \Delta x - \beta Y \Delta \theta\} \end{aligned} \quad (21)$$

Table 1 Link parameters

Mass [kg]	Inertia moment [kgm ²]	Link length [m]
$m_1 = 0.02409$	$I_{1z} = 0.040 \times 10^{-5}$	$l_1 = 0.010$
$m_2 = 0.04015$	$I_{2x} = I_{2y} = 0.870 \times 10^{-5}$	$l_2 = 0.050$
$m_3 = 0.04015$	$I_{3x} = I_{3y} = 0.870 \times 10^{-5}$	$l_3 = 0.050$
$m_4 = 0.02409$	$I_{4x} = I_{4y} = 0.201 \times 10^{-5}$	$l_4 = 0.030$

そこで, 不等式

$$-\beta \Delta \theta^T Y^T C^{-1} H \dot{q} \geq -\frac{1}{8} \dot{q}^T H \dot{q} - 2\beta^2 \Delta \theta^T Y^T C^{-1} H C^{-1} Y \Delta \theta \quad (22)$$

が成立することに注目し, (21) 式に (16), (22) 式を代入すると, 次式を得る。

$$\begin{aligned} \dot{V} &\geq \frac{1}{4} \dot{q}^T H \dot{q} + k \Delta x^T \{I_3 - 2k J C^{-1} H C^{-1} J^T\} \Delta x \\ &\quad + \frac{\eta(1+\beta)}{2} \Delta \theta^T \left\{ I_3 - \frac{4\beta^2}{\eta(1+\beta)} Y^T C^{-1} H C^{-1} Y \right\} \Delta \theta \end{aligned} \quad (23)$$

また, (19) 式の両辺から (20) 式の両辺をそれぞれ引くことにより, 式

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\frac{3}{4} \dot{q}^T C \dot{q} - k^2 \Delta x^T J C^{-1} J^T \Delta x \\ &\quad - \beta \Delta \theta^T Y^T C^{-1} Y \Delta \theta - \beta h(Y \Delta \theta, \dot{q}) \end{aligned} \quad (24)$$

を得る。\$\theta\$ の各成分は Table 1 から高々 \$10^{-3}\$ のオーダーであり, \$Y\$ の成分の絶対値は高々 \$10^1\$ のオーダーなので, \$h(Y \Delta \theta, \dot{q})\$ は \$\|\dot{q}\|^2\$ の \$10^{-4}\$ 倍のオーダーになる。こうして, \$\beta \le 1\$ である限り, \$\beta h(Y \Delta \theta, \dot{q})\$ の絶対値は \$(1/4) \dot{q}^T C \dot{q}\$ を越えない。こうして, (24) 式は不等式

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\frac{1}{2} \dot{q}^T C \dot{q} - k^2 \Delta x^T J C^{-1} J^T \Delta x \\ &\quad - \beta \Delta \theta^T Y^T C^{-1} Y \Delta \theta \end{aligned} \quad (25)$$

に帰着する。

(23) と (25) 式からつぎの結果が得られる。もし, \$\eta\$ を \$O(10^2)\$, \$\beta\$ を \$0.2\$ 以下に選べば, (23) 式の右辺の第三項は \$\Delta \theta\$ について正定になるので, \$V\$ は \$\dot{q}\$, \$\Delta x\$, \$\Delta \theta\$ について正定になる。したがって, \$J C^{-1} J^T\$ と \$Y^T C^{-1} Y\$ が正則性を失わない限り, \$\dot{q}\$, \$\Delta x\$, \$\Delta \theta\$ は2乗可積分になる。さらに, \$\dot{q}\$ の有界性から \$\dot{q}\$ や \$\Delta x\$, \$\Delta \theta\$ は一様連続になり, Barbalat の補題から, \$t \to \infty\$ のとき \$\dot{q}(t) \to 0\$, \$\Delta x(t) \to 0\$, \$\Delta \theta(t) \to 0\$ となることがわかる。しかし, \$\dot{q}\$ は2乗可積分であっても, \$\|\dot{q}\|\$ が時間区間 \$(0, \infty)\$ について可積分になるとは限らない。すなわち, Seraji⁸⁾ が主張するように, 冗長性に特有の self-motion が起こるかもしれない。そこで, ここで取り扱うシステムについては, self-motion が起こらないことを示す必要がある。この節の最後に, \$\gamma > 0\$ をパラメータとして, (21) と (25) 式から次式が得られることに注意しておく。

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\gamma V - \frac{1}{2} \dot{q}^T (C - \gamma \dot{H}) \dot{q} \\ &\quad - k \Delta x^T \{k J C^{-1} J^T - \gamma I_3\} \Delta x \end{aligned}$$

$$-\beta\Delta\Theta^T \left\{ Y^T C^{-1} Y - \frac{\gamma\eta(1+\beta)}{2\beta} I_3 \right\} \Delta\Theta \\ + \gamma\dot{q} H^{-1} C^{-1} \{ k J^T \Delta x - \beta Y \Delta\Theta \} \quad (26)$$

また、不等式

$$\begin{cases} \gamma k \dot{q}^T H C^{-1} J^T \Delta x \\ \leq (1/2) \gamma k \dot{q}^T H C^{-1} H \dot{q} + (\gamma k/2) \Delta x J C^{-1} J^T x \\ - \gamma \beta \dot{q}^T H C^{-1} Y \Delta\Theta \\ \leq 2\gamma \beta \dot{q}^T H C^{-1} H \dot{q} + (\gamma \beta/8) \Delta\Theta Y^T C^{-1} Y \Delta\Theta \end{cases} \quad (27)$$

に注意すると、(26) 式はつぎのように書き直せる。

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & -\gamma V - \frac{1}{2} \dot{q}^T \left\{ C - \gamma H - \gamma(k+4\beta) H C^{-1} H \right\} \dot{q} \\ & - k \Delta x \left\{ \left(k - \frac{\gamma}{2} \right) J C^{-1} J^T - \gamma I_3 \right\} \Delta x \\ & - \beta \Delta\Theta^T \left\{ \left(1 - \frac{\gamma\beta}{8} \right) Y^T C^{-1} Y - \frac{\gamma\eta(1+\beta)}{2\beta} I_3 \right\} \Delta\Theta \end{aligned} \quad (28)$$

4. 多様体上の安定性と可遷移性

冗長多関節リーチングでは、手先（ペン先）の目標位置 $x(q) = x_d$ を実現する姿勢を表す関節ベクトル q は無限にあり得て、状態空間 $(q, \dot{q}) \in R^8$ の中で 1 次元の多様体

$$M_1 = \{(q, \dot{q}) : x(q) = x_d, \dot{q} = 0\}$$

を構成する。そこで M_1 上にある一点 $(q^0, 0) \in M_1$ を指定したとき、三つの組 $\{q(t) = q^0, \dot{q}(t) = 0, \Delta\Theta(t) = 0\}$ は閉ループダイナミクスを表す (12) 式の一つの平衡解を表す。この平衡解の安定性をつぎのように定義しよう⁹⁾。

多様体上の安定性 任意の $\varepsilon > 0$ に対して、 ε に依存する三つの数 $\delta_0(\varepsilon) > 0$, $\delta_1(\varepsilon) > 0$, $\delta_2(\varepsilon) > 0$ が存在して、三つの式

$$\|q(0) - q^0\|_K \leq \delta_0(\varepsilon), \|\dot{q}(0)\|_K \leq \delta_1(\varepsilon), \|\Delta\Theta(0)\| \leq \delta_2(\varepsilon)$$

を満足する任意の初期条件 $(q(0), \dot{q}(0), \Delta\Theta(0))$ から出発した閉ループダイナミクス ((12) 式) の解軌道が、任意の $t \geq 0$ で領域

$$D_\varepsilon = \{(q, \dot{q}) : \|q(t) - q^0\|_K \leq \varepsilon, \|\dot{q}(t)\|_K \leq \varepsilon\}$$

にとどまり、かつ $t \rightarrow \infty$ のとき M_1 上のある一点に収束するとき、参照状態 $(q^0, 0)$ は多様体上安定であるという。

この定義で、関節ベクトル q や関節角速度ベクトル $\dot{q}$ のノルムはつぎのように定義する。

$$\|q - q^0\|_K = \left\{ \frac{1}{2} (q - q^0)^T H(q) (q - q^0) \right\}^{1/2} \quad (29)$$

$$\|\dot{q}\|_K = \left\{ \frac{1}{2} \dot{q}^T H(q) \dot{q} \right\}^{1/2} \quad (30)$$

ただし、 $\|\Delta x(t)\|$ や $\|\Delta\Theta(t)\|$ などは普通のユークリッドノルムを表わすとする。

なお、重力項のパラメータベクトル Θ が真値に十分近く推定できたときは、重力項 $g(q)$ は $-Y(q)\Theta$ によって簡単に計算できるので、制御入力を

$$u = -C\dot{q} - kJ^T(q)\Delta x + g(q) \quad (31)$$

Table 2 Initial conditions

Parameter [Unit]	Initial posture $q(0)$ [deg]			
Variable	q_1	q_2	q_3	q_4
Value	70.0	40.0	-30.0	-30.0

Table 3 Target conditions

Parameter [Unit]	Target position x_d [m]		
Variable	x_d	y_d	z_d
Value	-0.020	0.100	0.000

と定める。このとき、閉ループダイナミクスは、これを (1) 式に代入することにより、つぎようになる。

$$H\ddot{q} + \left\{ \frac{1}{2} \dot{H} + S + C \right\} \dot{q} + J^T k \Delta x = 0 \quad (32)$$

強可遷移性¹⁰⁾ 初期状態 $(q(0), \dot{q}(0) = 0)$ から出発した (32) 式の解 $(q(t), \dot{q}(t))$ が下記の不等式を満足しつつ、 $t \rightarrow \infty$ のとき M_1 上のある状態に収束するならば、その初期状態は self-motion を起こさずに M_1 に可遷移であるという（あるいは、単に M_1 に強可遷移であるという）。

$$l_i |q_i(t) - q_i(0)| \leq \alpha \pi \sqrt{k} \|\Delta x(0)\|, \quad i = 1, \dots, 4 \quad (33)$$

ここに α は 1 のオーダーであり、 l_i は Table 1 に示す各リンクの長さを表わす。

可遷移性 ある範囲の初期パラメータ推定誤差 $\Delta\Theta(0)$ のもとで、初期状態 $(q(0), 0)$ から出発した (12) 式の解 $(q(t), \dot{q}(t))$ がつぎの式を満足しつつ、 $t \rightarrow \infty$ のとき M_1 のある状態に収束するならば、 $(q(0), 0)$ は M_1 に可遷移であるという。

$$\|q(t) - q(0)\|_K \leq d\sqrt{k} \{\|\Delta x(0)\| + \mu\|\Delta\Theta(0)\|\} \quad (34)$$

ここに d は高々 $O(10^2)$ の正の定数であり、 $\mu = \sqrt{\eta/k}$, $q(t) - q(0)$ のノルムは (29) 式で $q = q(t)$, $q^0 = q(0)$ として定義するものとする。

ここでは、ペン先が Fig. 2 に示すような普通の姿勢から、ペン先が xy 平面を通り越すようなオーバーシュートすることなく（つまり、 $z < 0$ となることなく）、 xy 平面の点 $x_d = (x_d, y_d, 0)$ に遷移できるようなスチッフネス $k > 0$ とダンピング係数の組 $\{c_1, c_2, c_3, c_4\}$ がありうることを示そう。ただし、 x_d の原点 O からの距離はペンの角度 $q_0 (= q_2 + q_3 + q_4)$ が水平面と直角になるようなことはなく、ほぼ $45^\circ \sim 75^\circ$ にとれるような姿勢が実現できるようにしたい。すでに、人間の大人のリーチング運動や Table 1 に基づく書字ロボットについて解析したように⁴⁾、ダンピングゲイン行列 C は $t = 0$ のときの慣性行列 $H(0)$ の平方根行列のオーダーに取ると良いことが示されている³⁾。ここでは、第 4 リンクに相当するペンの慣性モーメントが比較的小さいことを考慮して、

$$c_1 = 0.02, c_2 = 0.035, c_3 = 0.012, c_4 = 0.004 \quad (35)$$

と選び、 $k = 15.0$ [Nms] としたときの数値シミュレーション結果を Fig. 3~12 に示す。ここに初期姿勢は Table 2

Fig. 3 Responses of x Fig. 4 Responses of y Fig. 5 Responses of z

Fig. 6 Movements of the robot

Fig. 7 Responses in xy plane Fig. 8 Responses in yz plane Fig. 9 Responses of Θ_1 and $\hat{\Theta}_1$ Fig. 10 Eigenvalues of $JC^{-1}J^T$ Fig. 11 Eigenvalues of $Y^T C^{-1} Y$

Fig. 12 Responses of the least eigenvalue

に、ペン先の目標点は **Table 3** で与えたが、重力項の未知パラメータ Θ の推定量ベクトルの初期値 $\hat{\Theta}(0)$ はそれぞれの真値の 80% の値を与え、また、 $r_i = l_i/2$ ($i = 2, 3, 4$) とした。Fig. 9 を除いて、Fig. 3 から Fig. 12 において “With Regressor” と記した軌跡が (12) 式の閉ループダイナミクスに基づいて得られたシミュレーション結果であり、“Direct” と称した軌跡は (32) 式の数値解である。Fig. 9 から、重力項の推定量 $\hat{\Theta}_i(t)$ はわずか 0.4 秒で真値に収束し、この初期段階の誤差がわずかに y の軌道に乱れを生じさせることが見える。また、Fig. 5 の z の軌道でわかるように、ペン先は途中で xy 平面を上から突き抜けることはなく（オーバーシュートが起こっていない）、 $z = 0$ (xy 平面）に指数関数的に収束していることがわかる。なお、Fig. 6～8 ではロボットの初期姿勢と $t \rightarrow \infty$ としたときの終了時の姿勢、および、ペン先の軌道のみが表わされており、途中でロボットの姿勢がどのように推移したかは表わしていない。言い換えれば、冗長自由度系に特有の self-motion⁸⁾ が起こっているかどうかこれらの数値結果からは明らかでない。そこで、可遷移性を理論的に保証しておくことが重要になる。

《定理 1》 (12) 式の閉ループダイナミクスについて、 $k = 15.0$ [Nms], $\eta = 100$ としかつ (35) 式のダンピング係数を与えたとき、Table 2 の初期条件 ($\dot{q}(0) = 0$ とする) から Table 3 への手先目標位置へのリーチングは可遷移である。ただし、運動中 3×3 の行列 $Y^T C^{-1} Y$ の最小固有値は 1.1×10^3 を下廻らず (Fig. 11, 12 参照)、 $\Delta\Theta(0)$ の各成分は Θ の対応する成分の真値の約 20% の誤差範囲にあるとする。

(証明) (28) 式で $\beta = 0.2$, $\gamma = 0.8 (= 4/5)$ とすれば、三つの $\{ \}$ の中味はそれぞれ正定行列になることがわかる。たとえば、 $JC^{-1}J^T$ の最小固有値は Fig. 10 から 0.06 以下になることはない。したがって、(28) 式より $\dot{V} \leq -(4/5)V$ となり、このことと $\dot{q}(0) = 0$ であることから、次式が成立する

$$V(t) \leq V(0)e^{-4t/5} \\ = k \{ \|\Delta x(0)\|^2 + \mu^2 \|\Delta\Theta(0)\|^2 \} e^{-4t/5} \quad (36)$$

他方、不等式 (23) の右辺の二つの括弧 $\{ \}$ の中味を吟味すると、 C はほぼ $H^{1/2}(q(0))$ を下廻らないように選んでいるので、 $k \leq 15$ のとき最初の $\{ \}$ の中味は非負定になることがわかる (Fig. 13 参照)。また、 $y = C^{-1} \{ kJ^T \Delta x - \beta Y \Delta\Theta \}$ とおき、不等式関係 $2|ab| \leq a^2 + b^2$ を適用することにより、不等式

$$V \geq \frac{1}{2}(\dot{q} + y)^T H(\dot{q} + y) + \frac{1}{2}y^T H y \\ + k\Delta x^T \{ I_3 - 2kJC^{-1}HC^{-1}J^T \} \Delta x \\ + \frac{\eta(1+\beta)}{2}\Delta\Theta \left\{ I_3 - \frac{4\beta^2}{\eta(1+\beta)}Y^T C^{-1}HC^{-1}Y \right\} \Delta\Theta \quad (37)$$

が成立することが示せる。右辺第 3 項は上で述べたように非負定であるが、第 4 項の $\{ \}$ の中は (23) 式と第二の $\{ \}$

Fig. 13 Transient responses

Fig. 14 Transient responses

Fig. 15 Transient responses

の中と同じであり, $\beta = 0.2$, $\eta = 100$ のとき非負定である (Fig. 14 参照). こうして, (36) と (37) 式からつぎの二つの不等式が成立する.

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \|H^{1/2}(\dot{q} + y)\| \leq V^{1/2}(t) \leq \sqrt{k} \{\|\Delta x(0)\| + \mu\|\Delta\Theta(0)\|\} e^{-2t/5} \quad (38)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \|H^{1/2}y\| \leq V^{1/2}(t) \leq \sqrt{k} \{\|\Delta x(0)\| + \mu\|\Delta\Theta(0)\|\} e^{-2t/5} \quad (39)$$

つぎに, ダンピング係数行列 C はほぼ $H(q(0))$ の平方根行列を近似するように選んだので, 運動中のどんな姿勢 q についても

$$r_m C \leq H^{1/2}(q) \leq r_M C \quad (40)$$

となるような正定数 r_m , r_M が存在する. 実際には, $C^{-1}H(q)C^{-1}$ の固有値の動きは Fig. 15 のようになり, r_m をなるべく大きく, r_M は小さく選べば, それらの比 r_M/r_m は $\sqrt{60}$ を越えることはない (Fig. 15 から $r_m = \sqrt{0.033}$, $r_M = \sqrt{1.8}$ と選べる). これらのことから, つぎの式が成立する.

$$\begin{aligned} \|q(t) - q(0)\|_K &= \left[\frac{1}{2} \{q(t) - q(0)\}^T H(q(t)) \{q(t) - q(0)\} \right]^{1/2} \\ &\leq \frac{r_M}{\sqrt{2}} \|C(q(t) - q(0))\| \\ &= \frac{r_M}{\sqrt{2}} \left\| \int_0^t C\dot{q}(\tau) d\tau \right\| \\ &\leq \frac{r_M}{\sqrt{2}r_m} \int_0^t \|H^{1/2}(q)\dot{q}\| d\tau \end{aligned} \quad (41)$$

そこで, $y = C^{-1}(kJ^T\Delta x - Y\Delta\Theta)$ とおくと, (38), (39) と (41) 式より,

$$\begin{aligned} \|q(t) - q(0)\|_K &\leq \frac{r_M}{\sqrt{2}r_m} \int_0^t \|H^{1/2}\{(\dot{q} + y) - (y)\}\| d\tau \\ &\leq \frac{r_M}{\sqrt{2}r_m} \int_0^t \{\|H^{1/2}(\dot{q} + y)\| + \|H^{1/2}y\|\} d\tau \\ &\leq \frac{2r_M}{r_m} \sqrt{k} \{\|\Delta x(0)\| + \mu\|\Delta\Theta(0)\|\} \int_0^t e^{-2\tau/5} d\tau \\ &\leq \frac{5r_M}{r_m} \sqrt{k} \{\|\Delta x(0)\| + \mu\|\Delta\Theta(0)\|\} \end{aligned} \quad (42)$$

ここに r_M/r_m は $\sqrt{60}$ を越えないので, $d = 5r_M/r_m$ とおくと, d は高々 $O(10^2)$ となって, (42) 式は (34) 式に一致し, 定理は証明された.

《定理 2》 (31) 式の制御則を用いた (32) 式の閉ループダイナミクスについて, Table 2 の初期条件から Table 3 への手先目標位置へのリーチングは強可遷移である (すなわち, ペン先は self-motion を起こすことなく M_1 に可遷移). ここに $k = 15.0$, $\eta = 100$ とする.

(証明) 始めに, 不等式

$$\begin{aligned} V &= W = \frac{1}{2} \dot{q}^T H \dot{q} + k \|\Delta x\|^2 + \dot{q}^T H C^{-1} k J^T \Delta x \\ &\geq k \Delta x^T \left\{ I_3 - \frac{k}{2} J C^{-1} H C^{-1} J^T \right\} \Delta x \\ &= \frac{3k}{4} \|\Delta x\|^2 + \frac{k}{4} \Delta x^T \{I_3 - 2k J C^{-1} H C^{-1} J^T\} \Delta x \\ &\geq \frac{3}{4} k \|\Delta x\|^2 \end{aligned} \quad (43)$$

が成立することから,

$$\sqrt{3k/4} \|\Delta x(t)\| \leq V^{1/2}(t) \leq \sqrt{k} \|\Delta x(0)\| e^{-2t/5} \quad (44)$$

となり, これより不等式

$$\|\Delta x(t)\| \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \|\Delta x(0)\| e^{-2t/5} \quad (45)$$

が成立することに注意する. つぎに, 閉ループダイナミクスの (32) 式の左側から C^{-1} を掛け, 区間 $(0, t)$ で積分すると ($\dot{q}(0) = 0$ であることに注意して),

$$\begin{aligned} &C^{-1}H(q(t))\dot{q}(t) + (q(t) - q(0)) \\ &+ \int_0^t k C^{-1} J^T(q(\tau)) \Delta x(\tau) d\tau \\ &= - \int_0^t C^{-1} \left(\frac{1}{2} \dot{H} + S \right) \dot{q} d\tau \end{aligned} \quad (46)$$

となることに注目する. ここでヤコビアン行列 $J(q)$ を $J = (J_1, \dots, J_4)$, $J_i = \partial x / \partial q_i$ ($i = 1, \dots, 4$) と表わせば, たとえば, $i = 4$ に対応して, 式

$$\begin{aligned} |q_4(t) - q_4(0)| &\leq k c_4^{-1} \int_0^t |J_4^T \Delta x| d\tau \\ &+ \|C^{-1}H(q(t))\dot{q}(t)\| + \int_0^t \left\| C^{-1} \left(\frac{1}{2} \dot{H} + S \right) \dot{q} \right\| d\tau \end{aligned} \quad (47)$$

が成立する. 他方, (17) 式から (今, $\Delta\Theta = 0$ と考えているので),

$$V = W \geq \frac{3}{8} \dot{q}^T H(q) \dot{q} \quad (48)$$

であり、このことと (40) 式から

$$\begin{aligned} \|C^{-1}H\dot{q}\| &\leq r_M \|H^{1/2}\dot{q}\| = \sqrt{8/3}r_M \sqrt{(3/8)\dot{q}^T H \dot{q}} \\ &\leq \sqrt{3}r_M V^{1/2}(t) \end{aligned} \quad (49)$$

となる。また、 $C^{-1}(\frac{1}{2}\dot{H}+S)\dot{q}$ は $\dot{q}$ の成分に関して2次式であり、係数は高々 $H^{1/2}(q)$ の最大固有値のオーダーなので、

$$\int_0^t \|C^{-1}(\frac{1}{2}\dot{H}+S)\dot{q}\| d\tau \leq \delta_0 \int_0^t \dot{q}^T C \dot{q} d\tau \quad (50)$$

であるような定数 $\delta_0 > 0$ が存在し、それは1のオーダーである。ここでは大きめに見積もって $\delta_0 = 5.0$ としておく。こうして (46) 式は

$$\begin{aligned} l_4 |q_4(t) - q_4(0)| &\leq \frac{l_4}{c_4} k \int_0^t \|J_4\| \|\Delta x\| d\tau \\ &+ l_4 \left\{ \sqrt{3}r_M V^{1/2}(t) + \delta_0 \int_0^t \dot{q}^T C \dot{q} d\tau \right\} \end{aligned} \quad (51)$$

となる。ここで $\|l_4\| \leq l_4$ であり、(25) 式から $(1/2)\dot{q}^T C \dot{q}$ の積分は $V(0) (= k\|\Delta x(0)\|^2)$ を越えないことに注意すれば、(45) 式から

$$\begin{aligned} l_4 |q_4(t) - q_4(0)| &\leq \frac{l_4^2}{c_4} k \frac{2}{\sqrt{3}} \|\Delta x(0)\| \int_0^t e^{-2\tau/5} d\tau \\ &+ l_4 (\sqrt{3}r_M V^{1/2}(0) + 2\delta_0 V(0)) \\ &\leq \frac{0.03^2 \sqrt{k}}{0.003} \cdot \frac{5}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{k} \|\Delta x(0)\| \\ &+ 0.03 (\sqrt{3} \cdot \sqrt{1.8} V^{1/2}(0) + 10.0 V(0)) \\ &= 1.5\sqrt{5} \cdot \sqrt{k} \|\Delta x(0)\| \\ &+ (0.1 + 0.3 V^{1/2}(0)) \sqrt{k} \|\Delta x(0)\| \\ &\leq (3.354 + 0.2) \cdot \sqrt{k} \|\Delta x(0)\| \end{aligned} \quad (52)$$

となり、 $i=4$ のときの (33) 式が $\alpha = (3.554)/\pi$ で成立し、 α は高々1のオーダーであることが示された。同様にして、 $i=1, 2, 3$ の (33) 式も示すことができるが、ここでは省略する。

ここでは、基本的な不等式をタイトにとるために、行列 $J C^{-1} J^T$ の最小固有値の下限や、 $J C^{-1} H C^{-1} J^T$ の最大固有値の上限の算出にシミュレーション結果を使った。全くシミュレーションを行なうことなく、(40) 式を満たす r_m, r_M を定め、上述の二つの行列の最小固有値、最大固有値を見積もることは可能である。しかし、その結果、定理2の証明で γ は小さく選ばなくてはならず、結果的に (33) 式を満たす α は大きめになってしまう。

5. 重力補償に関する考察

手書きロボットの目標点をずっと手前に取ると、ペンの水平面からの角度 ($q_2 + q_3 + q_4$) は $-\pi/2$ を越える瞬間が生じ、(9) 式の回帰子がランク落ちする。実際、初期姿勢とダンピング係数を同じにして、目標点だけを変えて行なったシミュレーション結果を Fig. 16, 17 に示す。この場合、ペン先は

Fig. 16 Responses of (x, y)

Fig. 17 Responses of (x, z)

Fig. 18 Responses of (x, z)

Fig. 19 Responses of $\hat{\Theta}_1$ and Θ

$z=0$ の平面を突き破ってオーバーシュートし、 $q_2 + q_3 + q_4$ は $-\pi/2$ を通り越している。その結果、 Y のランク落ちが起こり、持続的励起 (persistently exciting) の条件が満たされなくなる。実用的には、真下から手前に引いた所でペン書きすることはなく、また、指はペンの質量中心を支えるのが望ましいので、そのとき近似的に $s_4 = 0$ となり、重力項の第四成分 $g_4(q)$ は0に近く、無視できるようになる。

もし s_4 が無視できなければ、回帰子 Y を定数行列、未知パラメータをゆるやかに変動するベクトルとしてつぎのように設定することもできる。

$$Y = g \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Theta = \begin{pmatrix} \theta_1 c_2 \\ \theta_2 c_{23} \\ \theta_3 c_{234} \end{pmatrix} \quad (53)$$

そして Θ の推定量を (10) 式と同様に

$$\hat{\Theta}(t) = \hat{\Theta}(0) - \int_0^t \eta^{-1} Y^T s(\tau) d\tau \quad (54)$$

と設定してみる。このとき、同様にスカラー関数 V が定義できるが、その時間微分は (25) 式に対応して

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\frac{1}{2} \dot{q}^T C \dot{q} - k^2 \Delta x^T J C^{-1} J^T \Delta x \\ &\quad - \beta \Delta \Theta^T Y^T C^{-1} Y \Delta \Theta - \eta \dot{\Theta}^T \Delta \Theta \end{aligned} \quad (55)$$

となる。最後の項が余計に現れるが、これは右辺の第一項と第三項に余裕をもって繰り込めるので $\dot{V}$ は $\dot{q}$ 、 Δx 、 $\Delta \Theta$ に関して負定値となり、定理1が成立する。ここでは詳しい議論は省くが、(35) 式と同じダンピング係数を与えたときのシミュレーション結果を Fig. 18, 19 に示す。なお、図中の “Start from 50 %” は推定量の初期値 $\hat{\Theta}_i(0)$ を真値の50%として与えたときの結果を示し、ほかの0%, 100%も同様である。Fig. 18, 19 から、いずれの場合も xy 平面を

オーバーランすることなく目標点に収束するが、Fig. 6～10などと比べて、手先軌道は途中で少しぎくしゃくする。

6. おわりに

重力の影響下にある冗長関節ロボットについて、3次元リーチング運動を考察し、伝統的な方法とは異なるダンピング成形つき作業座標フィードバック制御法が十分な働きをすることをシミュレーションで示し、理論解析を行なった。ロボティクス¹¹⁾や運動生理学^{2), 12)}の多くの研究に見られるような、人為的な動作指標を導入し、その最小化によって逆運動学の不良設定性を解消する方法とは異なり、この方法は逆運動学や逆動力学を解く必要がない。しかし、冗長自由度系に特徴的に生起しうる“self-motion”がこの方法で完全に回避できていることを一般的に証明するのは困難である。ここでは目標点への収束性ととともに、持続的なself-motionがほぼ起こり得ないことを理論的に示し、全く起こり得ないことをシミュレーションで確かめた。

従来の手書きロボットの研究でも、冗長自由度の解消のためにさまざまなコスト関数が提案される一方^{13), 14)}、生理学の研究では冗長性が未制御多様体仮説によって解消されているとの仮説も唱えられている¹⁴⁾。本論文により、前の論文^{4), 5)}と合わせて、今までの漠然とした、あるいは人為的な冗長性の解消法とは異なり、単純かつ明解な方法でリーチングと手書き動作が実現できることが示されたことになる。

最後に、ベルンシュタインが主張したように、生体運動の巧みさは文脈依存的であり、一般的理論の構築は難しいと思えるが、本論文で提案した方法はほかの冗長自由度系の制御問題にも有効に機能すると考えている。

参考文献

- 1) N.A. ベルンシュタイン (工藤, 佐々木 (訳)): デクステリティ: 巧みさとその発達, 金子書房 (2003)
- 2) M.L. Latash: Neurophysiological Basis of Movement, Human Kinetics Pub., Champaign, IL (1998)
- 3) S. Arimoto, M. Sekimoto, H. Hashiguchi and R. Ozawa: Natural resolution of ill-posedness of inverse kinematics for redundant robots: A challenge to Bernstein's degrees-of-freedom problem, *Advanced Robotics*, **19**-4, 401/434 (2005)
- 4) S. Arimoto, H. Hashiguchi and R. Ozawa: A simple control method coping with a kinematically ill-posed inverse problem of redundant robots: analysis in case of a handwriting robot, *Asian J. of Control* **7**-2, 112/123 (2004)
- 5) H. Hashiguchi, S. Arimoto and R. Ozawa: Control of a handwriting robot with DOF redundancy based on feedback in task coordinates, *J. of Robotics and Mechatronics*, **16**-4, 381/387 (2004)
- 6) H. Hashiguchi, S. Arimoto and R. Ozawa: A sensory feedback method for a handwriting robot with D.O.F. redundancy, *Proc. of 2004 IEEE/RSJ Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems*, Sendai, Japan, 3918/3923 (2004)
- 7) S. Arimoto: Control Theory of Nonlinear Mechanical Systems: A Passivity-based and Circuit-theoretic Approach, Oxford Univ. Press, Oxford, UK (1996)

- 8) H. Seraji: Configuration control of redundant manipulators: Theory and Implementation, *IEEE Trans. on Robotics and Automation*, **5**, 472/490 (1989)
- 9) S. Arimoto: Intelligent control of multi-fingered hands, *Annual Review in Control*, **28**-1, 75/85 (2004)
- 10) S. Arimoto: A challenge to Bernstein's degrees-of-freedom problem in both cases of human and robotic multi-joint movements, *Proc. of NOLTA 2004*, Fukuoka, Japan, 1/14 (2004)
- 11) J. Lenarcic (ed.): Special Issue on Redundant Robots. *Laboratory Robotics and Automation*, **6**-1 (1991)
- 12) N. Hogan: An organizing principle for a class of voluntary movements, *J. Neurosci.*, **4**, 2745/2754 (1984)
- 13) V. Potkonjak, M. Popovic, M. Lazarevic and J. Sinanovic: Redundancy problem in writing: from human to anthropomorphic robot arm, *IEEE Trans. Systems, Man, and Cybernetics*, **28**-6, 790/805 (1998)
- 14) V. Potkonjak, S. Tzafestas, D. Kostic, G. Djoudjevic and M. Rasic: The handwriting problem, *IEEE Robotics and Automation Magazine*, March 2003, 35/46 (2003)
- 15) M.L. Latash: Approaches to analysis of handwriting as a task of coordinating a redundant motor system, *Human Movement Science*, **22**, 153/171 (2003)

[著者紹介]

有本 卓 (正会員)

1936年8月3日生。59年京都大学理学部数学科卒業、同年沖電気工業(株)、62年2月東京大学工学部助手、67年講師を経て、68年大阪大学基礎工学部助教授、73年3月同教授、88年東京大学工学部教授、97年3月同停年退職、同年4月より立命館大学理工学部教授、現在に至る。この間、制御理論、情報理論、ロボティクス、マシンインテリジェンスの研究に従事。工学博士。95～97年日本ロボット学会会長、83年IEEE Fellow、2000年IEICE Fellow。2000年IEEE Third Millennium Medal受賞。2000年4月紫綬褒章受章。

橋口 宏 衛 (学生会員)

2001年立命館大学理工学部ロボティクス学科卒業。2003年立命館大学院理工学研究科情報システム学専攻博士前期課程修了。現在は立命館大学院理工学研究科総合理工学専攻博士後期課程に在籍。ロボットハンド、ロボットアームの力学と制御に関する研究に興味を持つ。日本ロボット学会、IEEE各会員。