有界外乱のもとでの不確かなシステムのミニマックス推定[†]

北 村 亘*・藤 崎 泰 正**

Minimax Estimation of Uncertain Systems in the Presence of Bounded Disturbance[†]

Wataru KITAMURA* and Yasumasa FUJISAKI**

Minimax estimation is considered for a single-input single-output discrete-time uncertain system in the presence of bounded disturbance. The given regressors are divided into two sets which have small and large amplitudes respectively, where the amplitude ranges are assumed to be exclusive each other. Then, the nominal parameter of the system is estimated so that the maximal output error is minimized. The bounds of the disturbance and the parameter uncertainty are also estimated by using the output errors for these two sets. For this minimax estimation, the estimation errors are evaluated when the regressors of each set are persistently exciting. Furthermore, probabilistic estimation errors are derived when the regressors of each set are persistently exciting and periodic and have the same amplitude, and the disturbance and the parameter uncertainty are random variables which take their extreme values with a probability. The result implies that the errors converge to zero as the number of samples tends to infinity.

Key Words: minimax estimation, uncertain systems, bounded disturbance

1. はじめに

未知な大きさをもつ有界外乱のもとでシステムパラメータを同定するとき、ミニマックス推定が用いられる^{1)~3)}。この推定によれば、入出力データに矛盾しないシステムパラメータの推定値が得られるだけでなく、有界外乱の大きさの上界をも推定できる。また、回帰ベクトルが持続的励振条件を満たしかつ外乱が最悪値近傍をとる確率が0でなければ、推定値はサンプル数の増加とともに真値へ収束する⁴⁾。しかし、従来研究では、有界外乱のみを考察の対象としており、システムパラメータの不確かさが存在する場合は解析されていない。この場合、システムパラメータの不確かさの影響は、出力誤差に、回帰ベクトルの大きさに依存してあらわれるため、従来のアルゴリズムを直接用いることはできない。

本論文では、未知な大きさをもつ有界外乱のもとで、不確かなシステムに対するミニマックス推定について考える。ここでは、システムパラメータだけでなく、有界外乱と有界なパラメータ不確かさの大きさの上界をも同定する方法を提案する。システムパラメータに関しては、出力誤差の最大

値を最小化して同定する。また、外乱とパラメータ不確かさの大きさの上界は、大きさのほぼ等しい回帰ベクトルをそれぞれ集めた2組の入出力データを用い、求まるシステムパラメータの推定値により決まる2種類の出力誤差から算出する。このミニマックス推定法の性能を評価するために、回帰ベクトルが持続的励振条件を満たすと仮定し、推定誤差の上界を導出する。さらに、回帰ベクトルが周期的で持続的励振条件を満たし、入出力データのそれぞれの組では回帰ベクトルの大きさが一定で、外乱とパラメータ不確かさが最悪値近傍をとる確率が0でないと仮定し、推定誤差の上界を信頼度付きで求める。そして、これらの条件のもとでは、サンプル数を増やせば推定誤差が0に収束することを示す。以上の結果は、システムパラメータの不確かさがなかった場合でも、推定誤差の定量的な評価を与えるという点で、推定値の真値への収束性のみを議論している従来研究⁴⁾より詳細なものである。

2. ミニマックス推定

対象システムは、1入力1出力の離散時間線形システム

$$y_i = \phi_i^T(\theta + \eta_i) + v_i \quad (1)$$

であるとする。ここで、下付き添字 i は時刻を表わす。また、 $y_i \in \mathbb{R}$ はシステムの出力、 $\phi_i \in \mathbb{R}^m$ は回帰ベクトル、 $\theta \in \mathbb{R}^m$ は同定すべきシステムパラメータの公称値であり、 $v_i \in \mathbb{R}$ は外乱、 $\eta_i \in \mathbb{R}^m$ はパラメータの不確かさである。

[†] 第4回制御部門大会で一部発表(2004・5)

* 神戸大学 大学院 自然科学研究科 システム機能科学専攻

** 神戸大学 工学部 情報知能工学科

* Graduate School of Science and Technology, Kobe University

** Department of Computer and Systems Engineering, Kobe University

(Received April 26, 2004)

(Revised November 1, 2004)

これら外乱とパラメータの不確かさは有界であり、

$$|v_i| \leq \epsilon, \quad \|\eta_i\|_2 \leq \delta \quad (2)$$

とする。ただし、上界 ϵ や δ は未知であるとする。なお、 $\|\bullet\|_2$ は l_2 ノルム

$$\|\eta_i\|_2 \doteq (\eta_i^T \eta_i)^{1/2}$$

を表わす。

本論文における同定問題とは、与えられた入出力データ $\{y_i, \phi_i\}$ に基づいて、システムパラメータ θ および外乱とパラメータ不確かさの大きさの上界 ϵ, δ の推定値を求めることである。以下では、これら推定値をミニマックス推定の枠組みで決定することを考える。

対象システム (1) にパラメータの不確かさが存在しない場合、システムパラメータ θ のミニマックス推定値は $\hat{\theta} \doteq \arg \min_{\theta} \max_i |y_i - \phi_i^T \theta|$ となり、出力誤差の最大値 $\max_i |y_i - \phi_i^T \hat{\theta}|$ を外乱の大きさの上界 ϵ の推定値とできる^{1)~3)}。しかし、パラメータの不確かさが存在する場合、外乱とパラメータの不確かさの大きさの上界 ϵ, δ の推定値の両方を求める必要があり、出力誤差の最大値が 1 つ与えられただけでは決定できない。

そこで ϵ, δ の推定値の両方を決定するために、入出力データ $\{y_i, \phi_i\}$ を 2 組に分ける。これら 2 組を区別するため、一方を $\{y_i^{(1)}, \phi_i^{(1)}\}$ 、もう一方を $\{y_i^{(2)}, \phi_i^{(2)}\}$ と表記する。ただし、この分類は、 l_2 ノルムで測った回帰ベクトルの大きさで行ない、

$$\begin{aligned} a_1 &\leq \|\phi_i^{(1)}\|_2 \leq b_1, \\ a_2 &\leq \|\phi_i^{(2)}\|_2 \leq b_2, \end{aligned} \quad (3)$$

$$0 < a_1 \leq b_1 < a_2 \leq b_2 < \infty$$

であるとする。また、これら入出力データ $\{y_i^{(1)}, \phi_i^{(1)}\}, \{y_i^{(2)}, \phi_i^{(2)}\}$ は、それぞれ N_1, N_2 組得られているとする。

このとき、 θ の推定値 $\hat{\theta}$ は、入出力データの組ごとにミニマックス推定を用いれば、

$$\hat{\theta}_j \doteq \arg \min_{\theta} \max_i |y_i^{(j)} - (\phi_i^{(j)})^T \theta|, \quad j = 1, 2 \quad (4)$$

と決まる。このときの出力誤差の最大値を

$$e_j \doteq \max_i |y_i^{(j)} - (\phi_i^{(j)})^T \hat{\theta}_j|, \quad j = 1, 2 \quad (5)$$

と定義し、 ϵ, δ の推定値 $\hat{\epsilon}, \hat{\delta}$ を、

$$\hat{\epsilon} \doteq \frac{b_2 e_1 - b_1 e_2}{b_2 - b_1} \quad (6)$$

$$\hat{\delta} \doteq \frac{e_2 - e_1}{b_2 - b_1} \quad (7)$$

と決める。本論文で提案するのは、(4), (6), (7) 式を用いる同定法である。次章以降では、これら推定値 $\hat{\theta}_j, \hat{\epsilon}, \hat{\delta}$ と真の値 θ, ϵ, δ との誤差について考察し、上記のように推定値を決めることの妥当性を検証する。

なお、 θ の推定値 $\hat{\theta}_j$ は、線形計画問題

$$\begin{aligned} \min_{\theta, \nu_j} \quad & \nu_j \\ \text{s.t.} \quad & |y_i^{(j)} - (\phi_i^{(j)})^T \theta| \leq \nu_j, \quad \forall i = 1, 2, \dots, N_j \end{aligned} \quad (8)$$

に帰着して求めることができる。

3. 推定誤差の確定的評価

この章では、推定誤差の上界を明らかにする。

まず、以下⁵⁾を定義する。

【定義 1】 ある $n \in \mathbb{N}$ とある正の定数 α, β が存在し、任意の $i_0 \in \mathbb{N}$, $1 \leq i_0 \leq N - n + 1$ について

$$\alpha^2 I \leq \sum_{i=i_0}^{i_0+n-1} \phi_i \phi_i^T \leq \beta^2 I \quad (9)$$

が成り立つとき、回帰ベクトル ϕ_i , $i = 1, 2, \dots, N$ は持続的励振 (persistently exciting, PE) 条件を満たすという。ここで、 $\mathbb{N}$ は自然数の集合を表わし、 $A \leq B$ は $B - A$ が準正定であることを意味する。

回帰ベクトル ϕ_i は確定的であっても、確率的であっても PE 条件を満たし得る。この条件を満たすとき、(8) 式において、任意の ν_j に対して $\hat{\theta}$ の取り得る範囲が有界になり、推定誤差 $\theta - \hat{\theta}_j$ も有界になる。

以下では、2 組の回帰ベクトル $\phi_i^{(1)}, \phi_i^{(2)}$ がそれぞれ PE 条件 (9) を満足するとする。一般に、PE 条件を満足する 2 組の回帰ベクトルの PE 性の指標 (n, α, β) は異なるので、 $\phi_i^{(1)}$ に対する指標を (n_1, α_1, β_1) 、 $\phi_i^{(2)}$ に対するものを (n_2, α_2, β_2) とする。また、簡単化のため $N_j = \ell_j n_j$ とする。ここで、 ℓ_j は定数である。

このとき、以下の定理を得る。

《定理 1》 システム (1) において、 $\phi_i^{(1)}, \phi_i^{(2)}$ が確定的かつ PE 条件を満足するとする。このとき

$$\|\theta - \hat{\theta}_j\|_2 \leq \frac{2\sqrt{n_j}}{\alpha_j} (\epsilon + b_j \delta), \quad j = 1, 2 \quad (10)$$

が成り立つ。

(証明) どちらの回帰ベクトルの組を考えても証明は同手順であるので、以下では j を 1 または 2 に固定する。まず、 $\phi_i^{(j)}$ をまとめて

$$\Phi_N^j \doteq \begin{bmatrix} (\phi_1^{(j)})^T \\ (\phi_2^{(j)})^T \\ \vdots \\ (\phi_{N_j}^{(j)})^T \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N_j \times m}$$

と記述する。これらは PE 条件 (9) を満たすことから

$$(\Phi_N^j)^T \Phi_N^j = \sum_{i=1}^{\ell_j n_j} \phi_i^{(j)} (\phi_i^{(j)})^T \geq \alpha_j^2 \ell_j I$$

となるので

$$\|(\Phi_N^j)^T \Phi_N^j\|_2^{-1} (\Phi_N^j)^T \|_2 \leq \frac{1}{\alpha_j \sqrt{\ell_j}} \quad (11)$$

となる。ここで $\|\bullet\|_{i2}$ は l_2 誘導ノルム

$$\|A\|_{i2} \doteq \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \sqrt{\lambda(AA^T)}$$

を表わし、 $\bar{\lambda}(AA^T)$ は実行列 A に対する AA^T の最大固有値を表わす。さて、ミニマックス推定が (4) 式で行なわれることに注意すれば、

$$\begin{aligned} |y_i^{(j)} - (\phi_i^{(j)})^T \hat{\theta}_j| &\leq \max_i |y_i^{(j)} - (\phi_i^{(j)})^T \hat{\theta}_j| \\ &= \min_{\theta} \max_i |y_i^{(j)} - (\phi_i^{(j)})^T \theta| \\ &\leq \max_i |y_i^{(j)} - (\phi_i^{(j)})^T \theta| \end{aligned} \quad (12)$$

が成り立つ。また (1), (2), (3) 式より

$$\begin{aligned} |y_i^{(j)} - (\phi_i^{(j)})^T \theta| &= |v_i + (\phi_i^{(j)})^T \eta_i| \\ &\leq \epsilon + \delta b_j \end{aligned} \quad (13)$$

であるので、(12), (13) 式より

$$\begin{aligned} |y_i^{(j)} - (\phi_i^{(j)})^T \hat{\theta}_j| &\leq \max_i |y_i^{(j)} - (\phi_i^{(j)})^T \theta| \\ &\leq \epsilon + \delta b_j \end{aligned} \quad (14)$$

となる。これら (13), (14) 式より、任意の $i = 1, 2, \dots, N$ について

$$\begin{aligned} |(\phi_i^{(j)})^T (\theta - \hat{\theta}_j)| &= |y_i^{(j)} - (\phi_i^{(j)})^T \hat{\theta}_j - \{y_i^{(j)} - (\phi_i^{(j)})^T \theta\}| \\ &\leq |y_i^{(j)} - (\phi_i^{(j)})^T \hat{\theta}_j| + |y_i^{(j)} - (\phi_i^{(j)})^T \theta| \\ &\leq 2(\epsilon + \delta b_j) \end{aligned} \quad (15)$$

が成立することがわかる。よって

$$\|\Phi_N^j (\theta - \hat{\theta}_j)\|_2 \leq 2\sqrt{\ell_j n_j} (\epsilon + \delta b_j)$$

がいえ、(11) 式を用いれば、

$$\begin{aligned} \|\theta - \hat{\theta}_j\|_2 &\leq \|(\Phi_N^j)^T \Phi_N^j\|^{-1} (\Phi_N^j)^T \| \Phi_N^j (\theta - \hat{\theta}_j) \|_2 \\ &\leq \frac{2\sqrt{n_j}}{\alpha_j} (\epsilon + \delta b_j) \end{aligned} \quad (16)$$

を得る。□

定理1より、本論文で提案するミニマックス推定では、 θ の推定誤差の上界は ϵ, δ に関して線形であることがわかる。したがって、 $\epsilon = \delta = 0$ のときは、 $\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_2 = \theta$ であり、妥当な推定法となっていることが確認できる。

なお、外乱とパラメータの不確かさが存在するときの $\{y_i, \phi_i\}$ に整合するシステムパラメータの集合 (メンバシップ集合) の直径については、文献6) の定理1で議論されており、サンプル数が増加しても直径が0にならないような $\{y_i, \phi_i\}$ の組の例が示されている。本論文の定理1における θ の推定誤差の上界もサンプル数に依存しないものであり、文献6) で示された性質と整合している。

さらに、上界 ϵ, δ の推定誤差について、つぎの定理を得る。

《定理2》 システム (1) において、 $\phi_i^{(1)}, \phi_i^{(2)}$ が確定的かつ PE 条件を満足するとする。このとき

$$-\frac{b_1(\epsilon + b_2\delta)}{b_2 - b_1} \leq \epsilon - \hat{\epsilon} \leq \frac{b_2(\epsilon + b_1\delta)}{b_2 - b_1} \quad (17)$$

$$-\frac{\epsilon + b_1\delta}{b_2 - b_1} \leq \delta - \hat{\delta} \leq \frac{\epsilon + b_2\delta}{b_2 - b_1} \quad (18)$$

となる。

(証明) (12) 式と (13) 式を用いれば、出力誤差 e_j は、

$$\begin{aligned} e_j &= \max_i |y_i^{(j)} - (\phi_i^{(j)})^T \hat{\theta}_j| \\ &\leq \max_i |y_i^{(j)} - (\phi_i^{(j)})^T \theta| \\ &\leq \epsilon + \delta b_j, \quad j = 1, 2 \end{aligned} \quad (19)$$

である。つまり、

$$0 \leq e_j \leq \epsilon + \delta b_j, \quad j = 1, 2$$

である。したがって、

$$\begin{aligned} \hat{\epsilon} &\geq -\frac{b_1 e_2}{b_2 - b_1} \geq -\frac{b_1(\epsilon + \delta b_2)}{b_2 - b_1} \\ \hat{\epsilon} &\leq \frac{b_2 e_1}{b_2 - b_1} \leq \frac{b_2(\epsilon + \delta b_1)}{b_2 - b_1} \\ \hat{\delta} &\geq -\frac{e_1}{b_2 - b_1} \geq -\frac{\epsilon + \delta b_1}{b_2 - b_1} \\ \hat{\delta} &\leq \frac{e_2}{b_2 - b_1} \leq \frac{\epsilon + \delta b_2}{b_2 - b_1} \end{aligned}$$

である、これらを用いて $\epsilon - \hat{\epsilon}, \delta - \hat{\delta}$ を評価すれば、定理の結果を得る。□

定理2より、 ϵ, δ の推定誤差の上界も、 θ の推定誤差と同様、 ϵ, δ について線形であることがわかる。

4. 推定誤差の確率的評価

本章では、推定誤差の上界と下界について確率的評価を行なう。最初に、外乱⁴⁾とパラメータ不確かさ⁶⁾について、以下の定義を導入する。

【定義2】 外乱 v_i は $|v_i| \leq \epsilon$ を満たす確率変数であるとする。このとき、任意の $\rho > 0$ 、任意の i について、ある $p_v(\rho) > 0$ が存在し

$$\text{Prob}\{-\epsilon \leq v_i \leq -(\epsilon - \rho)\} \geq p_v(\rho)$$

$$\text{Prob}\{\epsilon - \rho \leq v_i \leq \epsilon\} \geq p_v(\rho)$$

がともに成り立つとき、上界 ϵ は密着性 (tightness) をもつという。なお、 $\text{Prob}\{\bullet\}$ は事象 $\bullet$ が起こる確率である。

【定義3】 パラメータの不確かさ η_i は $\|\eta_i\|_2 \leq \delta$ を満たす確率変数であるとする。このとき、任意の $\mu > 0$ 、任意の i 、任意の ϕ_i について、ある $p_\eta(\mu) > 0$ が存在し

$$\text{Prob}\{-\delta \|\phi_i\|_2 \leq \phi_i^T \eta_i \leq -(\delta - \mu) \|\phi_i\|_2\} \geq p_\eta(\mu)$$

$$\text{Prob}\{(\delta - \mu) \|\phi_i\|_2 \leq \phi_i^T \eta_i \leq \delta \|\phi_i\|_2\} \geq p_\eta(\mu)$$

がともに成り立つとき、上界 δ は密着性をもつという。

定義2, 3では、外乱とパラメータの不確かさについて確

率的な性質を定義しており、密着性は、最悪値近傍をとる確率が 0 ではないことを意味する。

このとき、つぎの補題⁶⁾が知られている。

[補題 1] 外乱 v_i , パラメータの不確かさ η_i が独立な確率変数であり、それらの上界 ϵ , δ が密着性をもつとき、

$$\begin{aligned} \text{Prob}\{-(\epsilon + \delta\|\phi_i\|_2) \leq v_i + \phi_i^T \eta_i \\ \leq -(\epsilon - \rho) - (\delta - \mu)\|\phi_i\|_2\} \\ \geq p_v(\rho)p_\eta(\mu) > 0 \\ \text{Prob}\{\epsilon - \rho + (\delta - \mu)\|\phi_i\|_2 \leq v_i + \phi_i^T \eta_i \leq \epsilon + \delta\|\phi_i\|_2\} \\ \geq p_v(\rho)p_\eta(\mu) > 0 \end{aligned}$$

が成立する。

この補題は、上界 ϵ と δ がともに密着性をもてば、 $v_i + \phi_i^T \eta_i$ の大きさの上界 $\epsilon + \delta\|\phi_i\|_2$ もまた密着性をもつことを意味している。

以下では、簡単化のため、回帰ベクトル $\phi_i^{(j)}$ は n_j ($n_j \geq m$) 周期的かつ $N_j = \ell_j n_j$ であるとする。つまり、

$$\phi_{i_p + kn_j}^{(j)} = \phi_{i_p}^{(j)}$$

$i_p = 1, 2, \dots, n_j$, $k = 0, 1, 2, \dots, \ell_j - 1$, $\ell_j \geq 1$ とする。さらに、回帰ベクトルの大きさについて、 $a_j = b_j$, $j = 1, 2$ であると仮定する。なお、回帰ベクトル $\phi_{i_p}^{(1)}$, $\phi_{i_p}^{(2)}$ が PE 条件を満たすとき、一般性を失うことなく (9) 式で $n = n_j$ とすることができ、

$$\alpha_j^2 I \leq (\Phi_n^j)^T \Phi_n^j, \quad j = 1, 2 \quad (20)$$

を満たす α_j が存在する。ここで

$$\Phi_n^j \doteq \begin{bmatrix} (\phi_1^{(j)})^T \\ (\phi_2^{(j)})^T \\ \vdots \\ (\phi_{n_j}^{(j)})^T \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_j \times m}$$

である。

このとき、 θ の推定誤差について以下の結果を得る。

《定理 3》 システム (1) において、 $\phi_i^{(1)}$, $\phi_i^{(2)}$ が確定的、周期的かつ PE 条件を満足し、 $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$ であるとする。また、 v_i と η_i が独立な確率変数であり、これらの上界が密着性をもつとする。このとき、 θ の推定誤差は

$$\text{Prob}\left\{\|\theta - \hat{\theta}_j\|_2 \leq \frac{\sqrt{n_j}}{\alpha_j}(\rho + b_j \mu)\right\} \geq c_{p_j}, \quad j = 1, 2 \quad (21)$$

と信頼度付きで評価できる。ここで、 c_{p_j} は

$$c_{p_j} \leq \left\{1 - 2(1 - p_v(\rho)p_\eta(\mu))^{\ell_j}\right\}^{n_j}, \quad j = 1, 2 \quad (22)$$

を満たす正の定数である。

(証明) 証明の手順は、 $j = 1, 2$ と同様であるので、以下では j が 1 または 2 に固定されていると考える。まず、 i_p

を固定する。(1) 式より、

$$\begin{aligned} (\phi_{i_p}^{(j)})^T(\theta - \hat{\theta}_j) \\ = y_{i_p + kn_j}^{(j)} - (\phi_{i_p}^{(j)})^T \hat{\theta}_j - \{v_{i_p + kn_j} + (\phi_{i_p}^{(j)})^T \eta_{i_p + kn_j}\} \end{aligned}$$

と表わせる。ここで $\hat{\theta}_j$ が (4) 式により得られるとき、(14) 式より、任意の k について

$$-(\epsilon + \delta b_j) \leq y_{i_p + kn_j}^{(j)} - (\phi_{i_p}^{(j)})^T \hat{\theta}_j \leq \epsilon + \delta b_j$$

となる。このとき、

$$\begin{aligned} \epsilon - \rho + (\delta - \mu)\|\phi_{i_p}^{(j)}\|_2 \leq v_{i_p + kn_j} + (\phi_{i_p}^{(j)})^T \eta_{i_p + kn_j} \\ \leq \epsilon + \delta\|\phi_{i_p}^{(j)}\|_2 \end{aligned} \quad (23)$$

を満たす k_u が存在すれば、 $\|\phi_{i_p}^{(j)}\|_2 = b_j$ とあわせて

$$(\phi_{i_p}^{(j)})^T(\theta - \hat{\theta}_j) \leq \rho + \mu b_j$$

を得る。一方、

$$\begin{aligned} -\epsilon - \delta\|\phi_{i_p}^{(j)}\|_2 \leq v_{i_p + k_l n_j} + (\phi_{i_p}^{(j)})^T \eta_{i_p + k_l n_j} \\ \leq -(\epsilon - \rho) - (\delta - \mu)\|\phi_{i_p}^{(j)}\|_2 \end{aligned} \quad (24)$$

を満たす k_l が存在すれば、同様に、

$$-(\rho + \mu b_j) \leq (\phi_{i_p}^{(j)})^T(\theta - \hat{\theta}_j)$$

となる。よって、このような k_u と k_l がともに存在すれば

$$|(\phi_{i_p}^{(j)})^T(\theta - \hat{\theta}_j)| \leq \rho + \mu b_j \quad (25)$$

がいえ。このことから、ある固定した i_p について

$$\begin{aligned} \text{Prob}\left\{|(\phi_{i_p}^{(j)})^T(\theta - \hat{\theta}_j)| \leq \rho + \mu b_j\right\} \\ \geq 1 - 2(1 - p_v(\rho)p_\eta(\mu))^{\ell_j} \end{aligned} \quad (26)$$

となる。これは、補題 1 より、 $v_{i_p + kn_j} + (\phi_{i_p}^{(j)})^T \eta_{i_p + kn_j}$ が $k = 0, 1, \dots, \ell_j - 1$ において (23) 式 (または (24) 式) を一回もとらない確率が $(1 - p_v(\rho)p_\eta(\mu))^{\ell_j}$ であることよりわかる。さて、(25) 式がすべての $i_p = 1, 2, \dots, n_j$ で成立すれば

$$\|\Phi_n^j(\theta - \hat{\theta}_j)\|_2 \leq \sqrt{n_j}(\rho + \mu b_j)$$

となり、(16) 式と同様に、推定誤差は

$$\begin{aligned} \|\theta - \hat{\theta}_1\|_2 &\leq \|(\Phi_n^j)^T \Phi_n^j\|^{-1} (\Phi_n^j)^T \|\Phi_n^j(\theta - \hat{\theta}_j)\|_2 \\ &\leq \frac{\sqrt{n_j}}{\alpha_j}(\rho + \mu b_j) \end{aligned}$$

と評価できる。ここで、 $\|(\Phi_n^j)^T \Phi_n^j\|^{-1} (\Phi_n^j)^T \leq 1/\alpha_j$ である。このとき、すべての $i_p = 1, 2, \dots, n_j$ について (26) 式が満たされる確率は $\{1 - 2(1 - p_v(\rho)p_\eta(\mu))^{\ell_j}\}^{n_j}$ であることより、定理を得る。□

定理 3 より、本論文で提案するミニマックス推定による θ の推定誤差は、密着性の指標 ρ , μ について線形であることがわかる。つまり、推定誤差は、同定に用いられるデータにおいて外乱やパラメータ不確かさがどの程度最悪値近傍のものを含むかに依存して決まり、外乱やパラメータ不確かさの大きさの上界とは独立である。

つぎに、 ϵ と δ の推定誤差について考察する。そのためには、以下の補題を必要とする。

[補題 2] 定理 3 と同様の仮定をおく。このとき、

$$\text{Prob} \{ \epsilon - 2\rho + (\delta - 2\mu)b_j \leq e_j \leq \epsilon + \delta b_j \} \geq c_{p_j}, \quad j = 1, 2 \quad (27)$$

が成立する。

(証明) 証明の手順は、 $j = 1, 2$ とも同様であるので、以下では j は 1 または 2 に固定されていると考える。また、 e_j の上界については、(19) 式より明らかである。よって、以下では e_j の下界についてのみ議論する。まず、 i_p を固定する。いま、システム (1) より

$$\begin{aligned} & v_{i_p+kn_j} + (\phi_{i_p}^{(j)})^T \eta_{i_p+kn_j} \\ &= \{ y_{i_p+kn_j}^{(j)} - (\phi_{i_p}^{(j)})^T \hat{\theta}_j \} - (\phi_{i_p}^{(j)})^T (\theta - \hat{\theta}_j) \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} & |y_{i_p+kn_j}^{(j)} - (\phi_{i_p}^{(j)})^T \hat{\theta}_j| \\ & \geq |v_{i_p+kn_j} + (\phi_{i_p}^{(j)})^T \eta_{i_p+kn_j}| - |(\phi_{i_p}^{(j)})^T (\theta - \hat{\theta}_j)| \end{aligned}$$

が成り立つ。よって、

$$\begin{aligned} & \max_k |y_{i_p+kn_j}^{(j)} - (\phi_{i_p}^{(j)})^T \hat{\theta}_j| \\ & \geq \max_k |v_{i_p+kn_j} + (\phi_{i_p}^{(j)})^T \eta_{i_p+kn_j}| - |(\phi_{i_p}^{(j)})^T (\theta - \hat{\theta}_j)| \end{aligned} \quad (28)$$

となる。ここで、(23)、(24) 式を満たす k_u 、 k_l がともに存在すれば、(25) 式が成立し、さらに、

$$(\epsilon - \rho) + (\delta - \mu) \|\phi_{i_p}^{(j)}\|_2 \leq |v_{i_p+kn_j} + (\phi_{i_p}^{(j)})^T \eta_{i_p+kn_j}|$$

となる。これより

$$\begin{aligned} & (\epsilon - \rho) + (\delta - \mu) \|\phi_{i_p}^{(j)}\|_2 \\ & \leq \max_k |v_{i_p+kn_j} + (\phi_{i_p}^{(j)})^T \eta_{i_p+kn_j}| \end{aligned} \quad (29)$$

がいえる。これら (25)、(29) 式を (28) 式に適用すれば、

$$\epsilon - 2\rho + (\delta - 2\mu) \|\phi_{i_p}^{(j)}\|_2 \leq \max_k |y_{i_p+kn_j}^{(j)} - (\phi_{i_p}^{(j)})^T \hat{\theta}_j|$$

を得る。以上は (23)、(24) 式を満たす k_u 、 k_l がともに存在することを前提にしているから、ある固定した i_p について

$$\begin{aligned} & \text{Prob} \{ \epsilon - 2\rho + (\delta - 2\mu)b_j \leq \max_k |y_{i_p+kn_j}^{(j)} - (\phi_{i_p}^{(j)})^T \hat{\theta}_j| \} \\ & \geq 1 - 2(p_v(\rho)p_\eta(\mu))^{\ell_j} \end{aligned}$$

であることがわかる。これがすべての $i_p = 1, 2, \dots, n_j$ で成立すれば、

$$e_j = \max_{i_p} \max_k |y_{i_p+kn_j}^{(j)} - (\phi_{i_p}^{(j)})^T \hat{\theta}_j|$$

より

$$\epsilon - 2\rho + (\delta - 2\mu)b_j \leq e_j \quad (30)$$

となる。この確率は $\{1 - 2(p_v(\rho)p_\eta(\mu))^{\ell_j}\}^{n_j}$ であり、補題の結果を得る。□

以上より、 ϵ 、 δ の推定誤差について、つぎの結果を得る。《定理 4》 システム (1) において、 $\phi_i^{(1)}$ 、 $\phi_i^{(2)}$ が確定的、周期的かつ PE 条件を満足し、 $a_1 = b_1$ 、 $a_2 = b_2$ であるとする。また、 v_i と η_i が独立な確率変数であり、これらの上界が密着性をもつとする。このとき、 ϵ 、 δ の推定誤差は

$$\text{Prob} \left\{ -\frac{2b_1(\rho + b_2\mu)}{b_2 - b_1} \leq \epsilon - \hat{\epsilon} \leq \frac{2b_2(\rho + b_1\mu)}{b_2 - b_1} \right\} \geq c_{p_1}c_{p_2} \quad (31)$$

$$\text{Prob} \left\{ -\frac{2(\rho + b_1\mu)}{b_2 - b_1} \leq \delta - \hat{\delta} \leq \frac{2(\rho + b_2\mu)}{b_2 - b_1} \right\} \geq c_{p_1}c_{p_2} \quad (32)$$

と信頼度付きで評価できる。

(証明) 補題 2 の e_j に関する不等式 (30) が $j = 1, 2$ で成り立つとき、推定値 $\hat{\epsilon}$ は

$$\begin{aligned} \hat{\epsilon} & \geq \frac{b_2\{\epsilon - 2\rho + (\delta - 2\mu)b_1\} - b_1(\epsilon + \delta b_2)}{b_2 - b_1} \\ & = \epsilon - \frac{2b_2(\rho + b_1\mu)}{b_2 - b_1} \\ \hat{\epsilon} & \leq \frac{b_2(\epsilon + \delta b_1) - b_1\{\epsilon - 2\rho + (\delta - 2\mu)b_2\}}{b_2 - b_1} \\ & = \epsilon + \frac{2b_1(\rho + b_2\mu)}{b_2 - b_1} \end{aligned}$$

となり、同様にして、推定値 $\hat{\delta}$ は

$$\begin{aligned} \hat{\delta} & \geq \frac{\epsilon - 2\rho + (\delta - 2\mu)b_2 - (\epsilon + \delta b_1)}{b_2 - b_1} \\ & = \delta - \frac{2(\rho + b_2\mu)}{b_2 - b_1} \\ \hat{\delta} & \leq \frac{\{\epsilon + \rho + (\delta + \mu)b_2\} - \{\epsilon - 2\rho + (\delta - 2\mu)b_1\}}{b_2 - b_1} \\ & = \delta + \frac{2(\rho + b_1\mu)}{b_2 - b_1} \end{aligned}$$

となる。これらより $\epsilon - \hat{\epsilon}$ 、 $\delta - \hat{\delta}$ の大きさを評価すれば、(31)、(32) 式の不等式を得る。これらが成立するためには、補題 2 における e_j の評価が $j = 1, 2$ の両方について成り立つ必要があるが、これらは互いに独立であるから、求める信頼度は $c_{p_1}c_{p_2}$ となる。□

定理 4 より、本論文で提案するミニマックス推定による ϵ 、 δ の推定誤差は、 θ のときと同様、密着性の指標 ρ 、 μ について線形であることがわかる。

さて、定理 3、4 において、その信頼度を

$$c_{p_j} = \left\{ 1 - 2(1 - p_v(\rho)p_\eta(\mu))^{\ell_j} \right\}^{n_j}, \quad j = 1, 2$$

と選べば、任意の ρ 、 μ について

$$c_{p_1} \rightarrow 1, \quad c_{p_2} \rightarrow 1 \quad \text{as } \ell_j \rightarrow \infty, \quad j = 1, 2$$

となる。つまり、以下の系が成り立つ。

[系 1] 定理 3、4 と同様の仮定を満足するものとする。このとき、 $\ell_j \rightarrow \infty$ 、 $j = 1, 2$ とすれば、 $\hat{\theta}_j$ 、 $\hat{\epsilon}$ 、 $\hat{\delta}$ はそれぞれ、 θ 、 ϵ 、 δ に確率収束する。

従来研究⁴⁾では、パラメータ不確かさが無い場合 ($\delta = 0$) について、 ϕ_i の PE 性と ϵ の密着性のもとで、 θ 、 ϵ の推定

値が真値に収束することを示している。本論文では、 $\delta \neq 0$ の場合について、系1として対応する結果を与えているのみならず、定理3, 4で推定誤差の定量的な評価を与えている。なお、本章では、回帰ベクトルに対し、PE性だけでなく、周期性と $a_j = b_j$, $j = 1, 2$ を仮定して、推定誤差の解析を行なった。仮定 $a_j = b_j$, $j = 1, 2$ が成り立たない場合には、たとえ v_i , η_i が最悪値をつくしたとしても推定値 $\hat{\theta}_j$ は一意には求まらないことを(8)式より示すことができる(例を付録に示す)。よって、推定誤差が0に収束することは期待できない。つまり、推定誤差を0に収束させるためには、(1)式がFIRシステムであり、回帰ベクトル ϕ_i が同定入力のみを含んでいて、その大きさを設定できる必要がある。周期性をもたない場合については、文献7), 8)を援用すれば、繁雑になるが議論できる。

また、定理3において、外乱やパラメータ不確かさの分布関数について何らかの情報が得られ、 $p_v(\rho)$, $p_\eta(\mu)$ が推定できるときには、指定した ρ , μ , c_{p_j} により定まる推定誤差の事前評価と信頼度を達成するサンプル数 ℓ_j は、(22)式より得られる

$$\ell_j \geq \frac{\ln \left(\frac{1 - (c_{p_j})^{1/n_j}}{2} \right)}{\ln(1 - p_v(\rho)p_\eta(\mu))}, \quad j = 1, 2 \quad (33)$$

で与えられる。これは定理4でも、同様である。

ところで、定理3, 4は、推定誤差の確率的な上界だけでなく、確定的な上界も与える。これは、 $c_{p_j} = 1$ となるように $\rho = 2\epsilon$, $\mu = 2\delta$ と選ぶことより

$$\begin{aligned} \|\theta - \hat{\theta}_j\|_2 &\leq \frac{2\sqrt{n_j}}{\alpha_j}(\epsilon + b_j\delta), \quad j = 1, 2 \\ -\frac{4b_1(\epsilon + b_2\delta)}{b_2 - b_1} &\leq \epsilon - \hat{\epsilon} \leq \frac{4b_2(\epsilon + b_1\delta)}{b_2 - b_1} \\ -\frac{4(\epsilon + b_1\delta)}{b_2 - b_1} &\leq \delta - \hat{\delta} \leq \frac{4(\epsilon + b_2\delta)}{b_2 - b_1} \end{aligned}$$

と与えられる。つまり、 θ については、定理3より得られる確定的な上界は定理1の結果と一致し、 ϵ , δ については、定理4より得られる確定的な上界は定理2の4倍保守的であることがわかる。

5. 数値例

本章では、数値例を示す。対象システムは

$$y_i^{(j)} = (\phi_i^{(j)})^T(\theta + \eta_i) + v_i, \quad \theta = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \phi_i^{(j)} = \begin{bmatrix} u_{1i}^{(j)} \\ u_{2i}^{(j)} \end{bmatrix}, \eta_i = \begin{bmatrix} \eta_{1i} \\ \eta_{2i} \end{bmatrix}$$

とする。ここで、 v_i と η_i は $|v_i| \leq 1$, $\|\eta_i\|_2 \leq 2$ において一様分布するとし、互いに独立な確率変数であるとする。このとき、 $\epsilon = 1$, $\delta = 2$ である。また、回帰ベクトルは、周

Fig. 1 Estimation errors of θ , ϵ , and δ

期3で繰り返す

$$\begin{aligned} \phi_1^{(1)} &= \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}, \phi_2^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \phi_3^{(1)} = \begin{bmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}, \\ \phi_1^{(2)} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix}, \phi_2^{(2)} = \begin{bmatrix} 5\sqrt{3} \\ -5 \end{bmatrix}, \phi_3^{(2)} = \begin{bmatrix} -5\sqrt{3} \\ -5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

とし、 $\phi_i^{(1)}$ に対する PE 性の指標は $(3, 1.5, 1.5)$, $\phi_i^{(2)}$ に対するものは $(3, 150, 150)$ となるものを選んだ。また、 $a_1 = b_1 = 1$, $a_2 = b_2 = 10$ である。

サンプルの周期繰り返し回数 $\ell_1 = \ell_2 = 5000$ に対して、周期ごとに計測した推定誤差を Fig. 1 に示す。Fig. 1 では、上から順に θ , ϵ , δ の推定誤差である。なお、 θ の推定誤差に関しては、 $\hat{\theta}_1$ は点線で $\hat{\theta}_2$ は実線で表わしている。なお 5000 回目で得られた推定値はそれぞれ、

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_1 &= \begin{bmatrix} -0.9802 \\ 1.0105 \end{bmatrix}, \quad \hat{\theta}_2 = \begin{bmatrix} -1.0241 \\ 1.0249 \end{bmatrix}, \\ \hat{\epsilon} &= 0.9787, \quad \hat{\delta} = 1.9637 \end{aligned}$$

であった。これらの結果より、サンプル数の増加につれて、推定誤差が0に収束しているようすがわかる。これは、系1の結果と整合している。

6. おわりに

本論文では、有界外乱のもとでの不確かなシステムのミニマックス推定を考察した。提案する同定法を用いれば、システムパラメータだけでなく有界外乱と有界なパラメータ不確かさの大きさの上界も推定できる。本論文では、これら推定値と真値の誤差について議論し、適当な仮定のもと、サンプル数の増加につれて同定誤差が0に収束することを示した。

参考文献

- 1) E. Walter and H. P.-Lahaniar: Estimation of Parameter Bounds from Bounded Error Data—A Survey, *Mathematics and Computers in Simulation*, **32**, 449/468 (1990)
- 2) H. P.-Lahaniar and E. Walter: Exact Description of Feasible Parameter Sets and Minimax Estimation, *Int. Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, **8**, 5/14 (1994)

- 3) M. Milanese, J. Norton, H. P.-Lahanier and E. Walter: Bounding Approaches to System Identification, Plenum Press New York and London (1996)
- 4) E.-W. Bai, H. Cho and R. Tempo: Convergence Properties of the Membership Set, *Automatica*, **34**-10, 1245/1249 (1998)
- 5) S. Dasgupta and Y.-F. Huang: Asymptotically Convergent Modified Recursive Least Squares with Data Dependent Updating and Forgetting Factor for System with Bounded Noise, *IEEE Trans. on Information Theory*, **33**-3, 383/392 (1987)
- 6) W. Kitamura and Y. Fujisaki: Convergence Properties of the Membership Set in the Presence of Disturbance and Parameter Uncertainty, *Trans. of the Society of Instrument and Control Engineers*, **39**-4, 382/387 (2003)
- 7) H. Akçay: The Size of the Membership Set in a probabilistic framework, *Automatica*, **40**-2, 253/260 (2004)
- 8) 北村, 藤崎: パラメータ不確かさのもとでのメンバシップ集合の確率的評価 — 回帰ベクトルが周期的でない場合, 第3回 SICE 制御部門大会予稿集, 547/550 (2003)

《付 録》

A. $\hat{\theta}_j$ が一意に求まらない例

回帰ベクトルの大きさに関する仮定 $a_j = b_j$, $j = 1, 2$ が成り立たないとし, そのほかの系1の仮定が満たされるとき, $\hat{\theta}_j$ が一意に求まらない例を示す. ただし, $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ のどちらを対象にしても同じなので, 以下では j を固定する.

対象システムを

$$y_i^{(j)} = (\phi_i^{(j)})^T (\theta + \eta_i) + v_i, \quad \theta = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

とし, $|v_i| \leq 1$, $\|\eta_i\|_2 \leq 1$, つまり $\epsilon = \delta = 1$ とする. また, 回帰ベクトルは周期2であり,

$$\phi_i^{(j)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \dots$$

とする. このとき, $n_j = 2$, $\alpha_j = 1$, $\beta_j = 2$ で PE 条件を満足する. また $a_j = 1$, $b_j = 2$ なので, $a_j \neq b_j$ である. さらに, v_i, η_i は周期4で

$$v_i = -1, -1, 1, 1, \dots$$

$$\eta_i = -\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, -\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \dots$$

とする. このとき, 出力 $y_i^{(j)}$ は

$$y_i^{(j)} = -1, -1, 5, 3, \dots$$

となり, 周期4で繰り返す.

いま系1の導出には (23), (24) 式を $\rho = \mu \simeq 0$ について満たす v_i, η_i の組がそれぞれ存在することが必要であり, これは密着性の仮定から保証されることに注意しよう. ここで, 与えた v_i, η_i は

$$\begin{aligned} v_i + (\phi_i^{(j)})^T \eta_i &= -3, -2, 3, 2, \dots, \\ &= -(\epsilon + \delta \|\phi_1^{(j)}\|_2), -(\epsilon + \delta \|\phi_2^{(j)}\|_2), \\ &\quad \epsilon + \delta \|\phi_1^{(j)}\|_2, \epsilon + \delta \|\phi_2^{(j)}\|_2, \dots, \end{aligned}$$

であるから, 明らかに (23), (24) 式を $\rho = \mu = 0$ で満たす. よって, これら v_i, η_i の系列を与えることは系1で密着性の仮定を与えることに対応している. しかも, 実際に $v_i + (\phi_i^{(j)})^T \eta_i$ が取り得る端点の組み合わせのすべてをつくしているから, v_i, η_i が密着性を満たす独立な確率変数であるとした場合でも, これ以上に推定誤差を改善しうる $v_i + (\phi_i^{(j)})^T \eta_i$ の値は存在しない.

さて $\hat{\theta}_j$ は, (8) 式より,

$$\begin{aligned} \min_{\hat{\theta}, \nu_j} \quad & \nu_j \\ \text{s.t.} \quad & |-1 - 2\hat{\theta}_1| \leq \nu_j \\ & |-1 - \hat{\theta}_2| \leq \nu_j \\ & |5 - 2\hat{\theta}_1| \leq \nu_j \\ & |3 - \hat{\theta}_2| \leq \nu_j \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

を解くことにより求まる. ただし, $\hat{\theta} = [\hat{\theta}_1 \ \hat{\theta}_2]^T$ である. ここで, (12), (13) 式より,

$$\begin{aligned} \nu_j &\leq \epsilon + \delta b_j \\ &= 3 \end{aligned}$$

であることに注意しよう. いま $\nu_j < 3$ と仮定すれば (A.1) 式を満たす $\hat{\theta}_1$ が存在しないので, $\nu_j = 3$ でなければならぬ. このとき, (A.1) 式を解けば

$$\hat{\theta}_1 = 1, \quad 0 \leq \hat{\theta}_2 \leq 2$$

となる. つまり, この条件を満たす $\hat{\theta}$ であればミニマックス推定値である. これは明らかに一意でない.

[著 者 紹 介]

北 村 亘 (学生会員)

2002年神戸大学大学院自然科学研究科情報知能工学専攻修了, 同年神戸大学大学院自然科学研究科システム機能科学専攻入学, 現在に至る. システム同定, ロバスト制御の研究に従事.

藤 崎 泰 正 (正会員)

1988年神戸大学大学院工学研究科修士課程システム工学専攻修了. 同年(株)神戸製鋼所電子技術研究所研究員. 91年神戸大学工学部助手, 96年助教授となり, 現在に至る. 博士(工学). ロバスト制御理論への確率的アプローチ, 大型宇宙構造物の姿勢制御, 入出力データに基づくシステム表現と制御方式, サーボ系の2自由度構成などに興味を持つ. 99年システム制御情報学会論文賞受賞. システム制御情報学会, IEEEなどの会員.