制御構造制約のある H_∞ 制御問題に対する PID 制御器設計†

佐伯正美*

PID Controller Design for H_∞ Control Problem with Control Structure Constraints†

Masami SAEKI*

A numerical optimization method of multivariable PID controllers that satisfy the performance index of the standard H_∞ control problem is proposed. Since the problem is described as a bilinear matrix inequality of PID gains for each frequency, a new method of obtaining a sufficient condition in the form of a linear matrix inequality is proposed. The PID gain converges by solving the LMI problem iteratively starting from a stabilizing PID controller, while the H_∞ norm decreases monotonically. Controller structure constraints such as decentralized control can be readily treated in the framework.

Key Words: H_∞ control, PID control, linear matrix inequality, bilinear matrix inequality, frequency domain

1. はじめに

H_∞ 制御理論^{1),2)}の解は集中制御のクラスで与えられ、制御器の次数は一般化プラントの次数以上となる。高次の制御器は実装上問題であり、分散制御器が必要となる場合も多い。このような背景から、制御器の次数や構造を固定した制御器を求める問題が関心を集めてきた。一方、PID 制御器は構造が簡単で調整パラメータが3つと少ないので、実システムで用いられることが多い。しかしながら、PID 制御器が分散制御系を構成する場合も多く、その場合の調整は極めて困難である。そこで、分散型 PID 制御器や集中型多変数 PID 制御器のクラスについて、 H_∞ 制御設計問題を検討することは重要である³⁾。

低次の制御器を求める方法として、制御器の低次元化法がしばしば用いられ、文献⁴⁾のように H_∞ 制御問題の制約を考慮した方法も検討されている。文献⁵⁾では、分散制御器の設計問題を独立したサブシステムの設計問題に帰着して解く方法が提案されている。しかし、これらは H_∞ 制御問題の最適解を求めることを目標にしていない。そこで、直接的方法として、 H_∞ 制御問題の状態方程式表現に有界実補題を適用して、BMI(Bilinear Matrix Inequality)の可解問題に帰着し、その解法が研究されてきた。BMI 問題は非凸であり、通常規模の制御問題に対して大域解を実用的な時間で解く方法は得られていないので⁶⁾、局所的な探索法も研究さ

れてきた。 H_∞ 制御問題を LMI(Linear Matrix Inequality)で表わす研究では、次数制約条件がある行列のランク条件で表わされた非凸問題になることが知られており、この問題の局所的解法が提案されている⁷⁾。また、密接に関連する問題として静的出力フィードバック問題の解法も検討されており^{8),9)}、PID 制御器の設計問題を静的出力フィードバックゲインの設計問題に帰着させて解く方法も提案されている¹⁰⁾。しかし、これらの方法では分散制御のような構造制約は扱われていない。文献¹¹⁾では、次数制約と構造制約が同時に扱える設計法が紹介され、数値例で有効性が示されている。しかし、この設計法は正規化既約分解のロバスト安定化問題に限られており、より一般的な標準 H_∞ 制御問題には適用できない。

筆者らはすでに1入力1出力のPID制御器の場合に H_∞ 制御問題の解を求める方法を提案している¹²⁾。この論文では、 H_∞ ノルム制約を周波数ごとのPIDゲインに関する不等式で表わし解を求めている。前出の状態方程式に対するBMIでは、未知変数がPIDゲインのほかに正定行列などが未知変数となるので、変数の数が大きくなってしまふ。これに対して、周波数ごとの制約を考える利点として、計算時間がシステムの次数に影響されないこと、未知パラメータ数がPIDゲインのみであり少ないことなどが指摘できる。そこで、本論文では、これを制御構造に制約のある多変数PID制御器の場合へ一般化することとした。すなわち、標準 H_∞ 制御問題の解のパラメトリゼーションに基づき、この解集合の中から構造を固定したPID制御器を求める方法を提案する。

本文の構成を述べる。まず、2章で問題設定を与え、3章でフィードバック制御系の内部安定条件を示し、4章で周波

† 第33回制御理論シンポジウムで発表(2004・11)

* 広島大学大学院工学研究科 東広島市鏡山1-4-1

* Department of Mechanical System Engineering, Hiroshima University, Higashi-Hiroshima
(Received July 9, 2004)
(Revised October 18, 2004)

数領域条件を与え、5章でLMI反復による局所解の求解アルゴリズムを与える。最後に数値例を示す。

本論文で用いられる記法は、標準的なものである。行列 M に対し、 M^T , M^* , および $\sigma(M)$ は、それぞれ M の転置行列、共役転置行列、最大特異値を表す。また、 M^{-1} , M^{-*} は、それぞれ、行列 M , M^* の逆行列を表す。 RH_∞ は安定実有理関数の集合を表す。 $\|G\|_\infty$ は $G(s)$ の L_∞ ノルムを表す。すなわち、 $\|G\|_\infty = \sup_\omega \sigma(G(j\omega))$ である。

2. 問題設定

次式の一般化プラントを考えよう。

$$\dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u \quad (1)$$

$$z = C_1 x + D_{11} w + D_{12} u \quad (2)$$

$$y = C_2 x + D_{21} w + D_{22} u \quad (3)$$

ここに、 $x \in R^n$, $z \in R^{p_1}$, $y \in R^{p_2}$, $w \in R^{m_1}$, $u \in R^{m_2}$, $D_{22} = 0$ である。文献¹⁾の標準 H_∞ 制御問題の仮定が満たされるとする。すなわち、

G1) (A, B_2) が可安定であり、 (C_2, A) が可検出である。

G2) $\begin{bmatrix} A - j\omega I & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix}$ がすべての ω で列フルランク。

G3) $\begin{bmatrix} A - j\omega I & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{bmatrix}$ がすべての ω で行フルランク。

制御則は線形時不変で

$$u = K(s)y \quad (4)$$

と表わし、多変数PID制御器の伝達関数 $K(s)$ は

$$K(s) = K_P + K_I \frac{1}{s} + K_D \frac{s}{1 + \epsilon s} \quad (5)$$

で表わす。ただし、 K_P , K_I , K_D は $m_2 \times p_2$ 次の実行列で、これらの要素に線形制約があっても良いとする。また、 $\epsilon > 0$ とし微分器に近似微分器を用いるので、これにより $K(s)$ はプロパーである。このクラスの制御器を $\mathcal{K}_{PID}$ で表わそう。

線形制約として、要素の一部がある値に固定されている場合や要素の大きさを制約する場合が考えられる。たとえば、良くある重要な例には以下が考えられる。

集中制御 K_P, K_I, K_D は構造を持たないフル行列の場合である。ただし、積分ゲイン K_I を対角行列に制約したり、適当な値に固定するなどが考えられる。

分散制御 1入力1出力のPID制御器が複数用いられる場合には、 $p_2 = m_2$ であり K_P, K_I, K_D は対角行列となる。

ブロック分散制御 ゲイン行列がブロック対角な場合であり、上記の2つを包含する一般的な場合である。

一般化プラントの伝達関数を

$$G(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$G_{ij}(s) = C_i(sI - A)^{-1}B_j + D_{ij}, \quad i, j = 1, 2 \quad (7)$$

と表わすとき、 w から z への閉ループ伝達関数は線形分

変換を用いて

$$T_{zw}(s) = \mathcal{F}_l(G, K) = G_{11} + G_{12}K(I - G_{22}K)^{-1}G_{21}$$

で表わされる。 $G_{22}(\infty) = 0$ であるので、プロパーな $K(s)$ に対して、つぎのWell-posed条件は満たされている。

$$\det\{I + K(\infty)G_{22}(\infty)\} \neq 0 \quad (8)$$

制御器のクラスが線形時不変でプロパーな伝達関数の場合には、 H_∞ 制御理論により $\|T_{zw}\|_\infty < 1$ を満たすすべての安定化制御器の集合がパラメータ $Q(s)$ を用いて表わされる。すなわち、

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &= \{K(s) | K(s) = \mathcal{F}_l(M, Q), \\ &\quad Q(s) \in RH_\infty, \|Q\|_\infty < 1\} \end{aligned} \quad (9)$$

ここで、 $M(s)$ は

$$M(s) = \begin{bmatrix} M_{11}(s) & M_{12}(s) \\ M_{21}(s) & M_{22}(s) \end{bmatrix} \quad (10)$$

で与えられ、 $(m_2 + p_2) \times (p_2 + m_2)$ 次の伝達関数であり、 $M_{11}(s)$ は $m_2 \times p_2$ 次の伝達関数である。 $M(s)$ の状態方程式を

$$M(s) = \left[\begin{array}{c|cc} A_a & B_{1a} & B_{2a} \\ \hline C_{1a} & D_{11a} & D_{12a} \\ C_{2a} & D_{21a} & D_{22a} \end{array} \right] \quad (11)$$

とおくと、 $M_{ij}(s) = C_{ia}(sI - A_a)^{-1}B_{ja} + D_{ija}$, ただし、 $D_{22a} = 0$ である。また、 $M_{12}(s)$ は正則な $m_2 \times m_2$ の伝達関数行列であり、逆システム M_{12}^{-1} は安定である。同様に、 $M_{21}(s)$ は正則な $p_2 \times p_2$ の伝達関数行列であり、逆システム M_{21}^{-1} は安定である。

設計問題 上記の一般化プラント $G(s)$ に対し、つぎの2つの条件を満たす $K(s) \in \mathcal{K}_{PID}$ を求めよ。

P1) $K(s)$ は $G(s)$ を内部安定化する。

P2) L_∞ ノルム制約条件 $\|T_{zw}\|_\infty < 1$ を満たす。すなわち、

$$\sigma(T_{zw}(j\omega)) < 1, \omega \in R \quad (12)$$

補足1 $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$ を満たす安定化制御器の集合 $\mathcal{K}_\gamma$ は、 $\|T_{zw}/\gamma\|_\infty < 1$ を満たす集合 $\mathcal{K}$ に等しいので、一般化プラントを

$$G(s) = \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1/\gamma & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11}/\gamma & D_{12} \\ C_2 & D_{21}/\gamma & 0 \end{array} \right] \quad (13)$$

として、上記の方法を適用すれば、集合 $\mathcal{K}_\gamma$ が求められる。

補足2 この設計問題の解集合は、 $\mathcal{K} \cap \mathcal{K}_{PID}$ で与えられる。 $\mathcal{K}$ が空では解が存在しないので、 $\mathcal{K}$ が存在し(9)式で与えられると仮定して一般性を失わない。また、フィードバック系を安定化するPID制御器が存在しなければ、 $\mathcal{K} \cap \mathcal{K}_{PID}$ は空集合であり、存在すれば、十分に大きな γ に対して $\mathcal{K} \cap \mathcal{K}_{PID}$ は空集合でない。そこで、後述のアルゴリズムでは、初期条件として、安定化PID制御器をひとつ与え、つ

ぎに、それが $\mathcal{K}_\gamma$ に含まれるような大きさの γ を与えることとする。それから、条件 P1 を満たしながら γ を徐々に小さくして $\gamma < 1$ を達成する PID 制御器を探索する。そのために、つぎの2章では、条件 P1 と P2 を LMI で表現する。

3. 内部安定条件

定義 1 $K_1, K_2 \in \mathcal{K}_{PID}$ とする。すべての β ($0 \leq \beta \leq 1$) に対し $K(s) = (1-\beta)K_1(s) + \beta K_2(s)$ が $s=0$ に同じ数の極を有するとき、これを満たす $K_2(s)$ の集合を $\mathcal{K}_r(K_1)$ と表わす。

$K_1, K_2 \in \mathcal{K}_{PID}$ の極は、積分器の極 $s=0$ と近似微分器の極 $s=-1/\epsilon$ である。

補題 1 $K_1, K_2 \in \mathcal{K}_{PID}$ とする。 $K(s) = (1-\beta)K_1(s) + \beta K_2(s)$ の不安定極 $s=0$ の数が $0 \leq \beta \leq 1$ で $\min(p_2, m_2)$ であるための必要十分条件は、積分器のゲイン行列 $K_I(\beta) := (1-\beta)K_{I1} + \beta K_{I2}$ が $0 \leq \beta \leq 1$ でフルランクであることである。

証明 積分器の極の数は、積分器の伝達関数 $K_I(\beta)/s$ を状態方程式で表わしたときの最小実現の次数に等しい。そこで、 K_{I1} の列数が行数以上とすれば、 $y = (K_I(\beta)/s)u$ の状態方程式は $y = x, \dot{x} = K_I(\beta)u$ であり、明らかにこれは可観測であり、可制御性行列が $U_c = K_I(\beta)$ である。よって、すべての β ($0 \leq \beta \leq 1$) に対して U_c がフルランクであることが積分器の数が不変であるための必要十分条件である。行数が列数以上の場合は双対として同様に扱える。証明終わり。

フルランクであるための十分条件としてつぎの補題が得られる。

補題 2 実正定行列 A_1, A_2 に対し、 $A_1 + A_1^T > 0$ かつ $A_2 + A_2^T > 0$ ならば、 $A(\beta) = (1-\beta)A_1 + \beta A_2$ はすべての β ($0 \leq \beta \leq 1$) に対してフルランクである。

証明 実正定行列 A に対し、 $A + A^T > 0$ であれば A はフルランクである。なぜなら、 A がフルランクでないとすると、非ゼロベクトル x が存在し、 $Ax = 0$ であるから、 $x^T(A + A^T)x = 0$ となり正定条件に反するからである。逆に補題の仮定よりすべての β に対して、 $A(\beta) + A(\beta)^T > 0$ であるから、 $A(\beta)$ はフルランクである。証明終わり。

次式のように、 K_I の設計パラメータを含む部分を正定行列 K_{I11} とすれば

$$K_I = \begin{bmatrix} K_{I11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

と表わせ、補題 2 より LMI 条件 $K_{I11} + K_{I11}^T > 0$ を制約条件に追加することで、十分条件ではあるが、 $\mathcal{K}_r(K_1)$ のクラスに属する $K_2(s)$ が得られる。

補題 3 $K_1, K_2 \in \mathcal{K}_{PID}$ に対し以下の条件を仮定する。

- (1) K_1 は G を安定にし、 K_2 は G を不安定にする。
- (2) $K_2(s) \in \mathcal{K}_r(K_1)$ とする。

このとき、ある $s = j\omega_0$ とある β ($0 < \beta \leq 1$) に対して

$$\det\{I + G_{22}(s)((1-\beta)K_1(s) + \beta K_2(s))\} = 0 \quad (15)$$

が成り立つ。

証明 β を 0 から 1 まで連続に変えるとき、仮定 2 より $K(s)$ の閉右半平面の極 $s=0$ の数は不変である。ナイキスト安定条件を適用するために、つぎの曲線

$$\Gamma_\beta = \det\{I + G_{22}(s)((1-\beta)K_1(s) + \beta K_2(s))\}, \\ s \in D_R, \beta \in [0, 1] \quad (16)$$

を考える。行列式は β に関して連続関数であるので、 Γ_β は β が 0 から 1 へ変わるとき、連続的に変形される。一方、仮定 1 より閉ループ系が安定から不安定になるので、 Γ_β が 0 を回る回数が変わる。よって、ある $s \in D_R$ において 0 を横切る。ところで、Well-Posed 条件から $s = \infty$ において (8) 式が成り立つので、D 経路 D_R の半径 R が十分大きな場合を考えれば、半円部で 0 を横切ることはない。よって、 Γ_β は虚軸上のある点 $s = j\omega_0$ で 0 を横切る。証明終わり。

補題 4 標準 H_∞ 制御問題において、ある ω_0 で

$$\det\{I + G_{22}(j\omega_0)K(j\omega_0)\} = 0 \quad (17)$$

ならば、 $\sigma(T_{zw}(j\omega_0))$ は有界でない。

証明 標準 H_∞ 制御問題の仮定 G2) と G3) が成り立つとき、それぞれ、 $T_{zw}(s)$ の虚軸上の極のモードは可検出および可安定である。これはたとえば文献²⁾の Lemma 16.1 に証明がある。これより、閉ループ系が $s = j\omega_0$ に極を持つとき、 $T_{zw}(s)$ も $s = j\omega_0$ に極を持つので、 $\sigma(T_{zw}(j\omega_0))$ は有界でない。証明終わり。

定理 1 $K_1 \in \mathcal{K}_{PID}$ が $G(s)$ を内部安定化し、 $K_2(s) \in \mathcal{K}_r(K_1)$ と仮定する。このとき、 $K(s) = (1-\beta)K_1(s) + \beta K_2(s)$ に対して求められた $\|T_{zw}\|_\infty$ がすべての β ($0 \leq \beta \leq 1$) に対して有界であれば、 $K_2(s)$ は $G(s)$ を内部安定化する。

証明 補題 3 より $K_2(s)$ が $G(s)$ を不安定化すれば、ある β で閉ループ系の極の実部がゼロになる。このとき、補題 4 より $\sigma(T_{zw}(j\omega))$ はある ω で有界でなくなるので、 $\|T_{zw}\|_\infty$ がすべての β で有界であるという仮定に矛盾する。よって、 $K_2(s)$ は安定化制御器である。証明終わり。

4. 周波数領域条件

定理 1 より、安定化制御器 $K_1(s) \in \mathcal{K}_{PID}$ から出発し、 $\|T_{zw}\|_\infty < \infty$ 、かつ、 $K(s) \in \mathcal{K}_r(K_1)$ を満たしながら、 $K(s)$ の係数行列を連続的に変形すれば、閉ループ系の安定性が保たれることが示された。そこで、この章では安定化制御器から出発し、 $\|T_{zw}\|_\infty$ が少なくとも単調非増加になるような PID ゲインの経路を与える方法を提案する。

$s = j\omega$ 上でつぎの集合 $\mathcal{K}(\omega)$ を定義する。

$$\mathcal{K}(\omega) = \{K(j\omega) | K(j\omega) = M_{11}(j\omega) \\ + M_{12}(j\omega)Q(j\omega)(I - M_{22}(j\omega)Q(j\omega))^{-1}M_{21}(j\omega),$$

$$\bar{\sigma}(Q(j\omega)) < 1 \quad (18)$$

ただし, $M_{12}^{-1}(s)$ と $M_{21}^{-1}(s)$ は安定であるから, すべての ω で $M_{12}^{-1}(j\omega)$ と $M_{21}^{-1}(j\omega)$ は存在する. 集合 $\mathcal{K}(j\omega)$ は $\bar{\sigma}(T_{zw}(j\omega)) < 1$ を満たす制御器の集合であるので, 設計問題は以下のように言い換えられる.

設計問題の別表現 $G(s)$ を安定化し, すべての $\omega \in \mathbb{R}$ で $K(j\omega) \in \mathcal{K}(\omega)$ を満たす $K(s) \in \mathcal{K}_{PID}$ を求めよ.

以下では, ω を固定して議論するので, ω を省略する.

補題 5 $Q \in C^{m_2 \times p_2}$ に対し

$$K = M_{11} + M_{12}Q(I - M_{22}Q)^{-1}M_{21}, \bar{\sigma}(Q) < 1 \quad (19)$$

はつぎの条件に等価である.

$$KPK^* + KL^* + LK^* + R > 0 \quad (20)$$

ここに,

$$P = M_{21}^{-1}(M_{22}M_{22}^* - I)M_{21}^* \quad (21)$$

$$L = -M_{11}M_{21}^{-1}(M_{22}M_{22}^* - I)M_{21}^* + M_{12}M_{22}^*M_{21}^* \quad (22)$$

$$R = -LM_{11}^* - M_{11}M_{21}^{-1}M_{22}M_{21}^* + M_{12}M_{21}^* \quad (23)$$

証明 (19) 式より $Y = K - M_{11}$ とおくと

$$M_{12}^{-1}YM_{21}^{-1} = Q(I - M_{22}Q)^{-1} \quad (24)$$

Q について整理すると

$$(I + M_{12}^{-1}YM_{21}^{-1}M_{22})Q = M_{12}^{-1}YM_{21}^{-1} \quad (25)$$

を得る. 上式より

$$(I + M_{12}^{-1}YM_{21}^{-1}M_{22})QQ^*(I + M_{12}^{-1}YM_{21}^{-1}M_{22})^* = M_{12}^{-1}YM_{21}^{-1}(M_{12}^{-1}YM_{21}^{-1})^* \quad (26)$$

$\bar{\sigma}(Q) < 1$ は $QQ^* < I$ に等価であるから,

$$(I + M_{12}^{-1}YM_{21}^{-1}M_{22})(I + M_{12}^{-1}YM_{21}^{-1}M_{22})^* > M_{12}^{-1}YM_{21}^{-1}(M_{12}^{-1}YM_{21}^{-1})^* \quad (27)$$

が得られる. 逆にこの不等式が成り立てば, $\bar{\sigma}(Q) < 1$ を満たす Q が存在し, (25) 式が成り立つ. (27) 式の左右からそれぞれ M_{12} と M_{21} を乗じて, K について整理すれば (20) 式が得られる. 証明終わり.

行列 P の正定性や不定性に依存して, 制約を満たす K の集合が凸や非凸になる. 以下では, 3 つの場合に分けて LMI を導出する.

Case 1 $P \leq 0$ の場合には, 固有値分解により

$$P = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\Lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^* \\ U_2^* \end{bmatrix} \quad (28)$$

と表わされる. ここに, $\Lambda_2 \in R^{p_2 \times p_2}$ は対角行列で, $\Lambda_2 > 0$ である. $U = [U_1, U_2]$ は $UU^* = U^*U = I$ を満たす. 条件式は

$$-KU_2\Lambda_2U_2^*K^* + KL^* + LK^* + R > 0 \quad (29)$$

と表わせるので, Schur Complement を適用すると, 等価な条件として

$$\begin{bmatrix} KL^* + LK^* + R & KU_2 \\ U_2^*K^* & \Lambda_2^{-1} \end{bmatrix} > 0 \quad (30)$$

を得る. これは K に関して LMI である.

Case 2 $P \geq 0$ の場合には, 固有値分解により

$$P = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^* \\ U_2^* \end{bmatrix} \quad (31)$$

と表わされる. ここに, $\Lambda_1 \in R^{p_2 \times p_2}$ は対角行列で, $\Lambda_1 > 0$ である. 条件式は

$$KU_1\Lambda_1U_1^*K^* + KU_1U_1^*L^* + LU_1U_1^*K^* + \tilde{R} > 0 \quad (32)$$

$$\tilde{R} = R + KU_2U_2^*L^* + LU_2U_2^*K^* \quad (33)$$

と表わせる. これは K に関する非凸制約であるので, 十分条件の凸制約を求めよう.

$$Z = KU_1\Lambda_1^{1/2} \quad (34)$$

$$\tilde{L} = -LU_1\Lambda_1^{-1/2} \quad (35)$$

とおくと, (32) 式は

$$(Z - \tilde{L})(Z - \tilde{L})^* > -\tilde{R} + \tilde{L}\tilde{L}^* \quad (36)$$

と表現できる.

任意の Z_q に対して $(Z - Z_q)(Z - Z_q)^* \geq 0$ であるから,

$$ZZ^* \geq Z_qZ^* + ZZ_q^* - Z_qZ_q^* \quad (37)$$

が成り立つので, (32) 式の十分条件として

$$(Z_q - \tilde{L})Z^* + Z(Z_q - \tilde{L})^* + \tilde{R} - Z_qZ_q^* > 0 \quad (38)$$

を得る. これを K を用いて表わすと, つぎの LMI を得る.

$$(Z_q\Lambda_1^{1/2}U_1^* + L)K^* + K(Z_q\Lambda_1^{1/2}U_1^* + L)^* + R - Z_qZ_q^* > 0 \quad (39)$$

LMI 条件は十分条件であるので, これが保守的すぎると十分条件を満たす解が存在しなくなる. そこで, 保守性が少ない Z_q の選定が重要である. ここでは, 安定化ゲイン $K = K_a$ が与えられて, $Z_a = K_aU\Lambda^{1/2}$ が (36) 式を満たすという条件下で, この問題を検討する. ただし, 次式のように (36) 式の左辺にも含まれる K は $K = K_a$ に固定して, Z の集合の最良 LMI 近似を検討する.

$$(Z - \tilde{L})(Z - \tilde{L})^* > \hat{R} \quad (40)$$

$$\hat{R} = -\tilde{R}(K_a) + \tilde{L}\tilde{L}^* \quad (41)$$

Fig. 1 Approximation of outside of a disk by a half-plane

この式を満たす Z の集合は、 $\hat{R} > 0$ とすると、中心 $\tilde{L}$ で半径が $\hat{R}$ の平方の超球の外部と考えられる。ただし、そうでない場合にはより複雑であるので、説明のためにしばらくはこの仮定を設ける。Fig. 1 に示すように、円の外部が Z の許容領域であり、 Z_a は円の外部に存在する。円の外部に含まれる最大の半平面は数多くあるが、 Z_a を含む最も望ましいものとして、Fig. 1 の半平面を選ぶこととする。すなわち、 Z_a と $\tilde{L}$ を結ぶ線分と超球との交点を Z_q とし、 Z_q における半平面を (39) 式で求めれば、 Z_a を含む凸制約が得られる。

Z_q は以下のように求められる。

$$Z_q = (1-q)\tilde{L} + qZ_a, \quad 0 \leq q \leq 1 \quad (42)$$

の Z_q に対して、(40) 式を満たす最小の q ($1 \geq q > 0$) を求める。(42) 式を (40) 式に代入すると

$$q^2(Z_a - \tilde{L})(Z_a - \tilde{L})^* > \hat{R} \quad (43)$$

であるから、上式は仮定より $q = 1$ で成り立つ。これより、常に q^2 の下限が $1 \geq q > 0$ の区間内に存在する。 $\alpha = q^2$ の下限はつぎの補題を用いて計算できる。

補題 6 $A = A^* \geq 0$, $B = B^*$ であり、 $A - B > 0$ とする。このとき、 $\alpha A - B > 0$ を満たす α の下限は

$$\alpha = \max\{eig[H_{11} - H_{12}H_{22}^{-1}H_{21}]\} \quad (44)$$

で与えられる。ここに、

$$A = U \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^*, \quad \Sigma_1 > 0 \quad (45)$$

$$H = \begin{bmatrix} \Sigma_1^{-1/2} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} U^* B U \begin{bmatrix} \Sigma_1^{-1/2} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \quad (46)$$

H_{11} は Σ_1 と同じサイズである。

証明 行列不等式は次式に等価である。

$$\begin{bmatrix} \alpha I - H_{11} & -H_{12} \\ -H_{21} & -H_{22} \end{bmatrix} > 0 \quad (47)$$

Schur Complement より、上式は次式に等価である。

$$\alpha I - H_{11} + H_{12}H_{22}^{-1}H_{21} > 0 \quad (48)$$

$$H_{22} < 0 \quad (49)$$

仮定より $\alpha = 1$ では上式が成り立つので、 $H_{22} < 0$ は満たされる。証明終わり。

望ましい Z_q の条件として、(1) 安定性を保証するために、LMI 制約で決まる超半平面が Z_a を含むことと (2) 少なくとも Z_a を用いるよりも Z_q を用いて得られた LMI のほうがより広い Z の許容集合を与えることが挙げられる。上記の Z_q がこのような望ましい性質をもつことは、仮定 $\hat{R} > 0$ を設けずに、つぎの補題で示される。

補題 7 $0 < q \leq 1$ に対し

$$Z_q = qZ_a + (1-q)L \quad (50)$$

$$(Z_q - L)(Z_q - L)^* > \hat{R} \quad (51)$$

とする。このとき、

$$(Z - L)(Z - L)^* > \hat{R} \quad (52)$$

の 2 つの LMI 近似

$$(Z_q - L)(Z - Z_q)^* + (Z - Z_q)(Z_q - L)^* + (Z_q - L)(Z_q - L)^* > \hat{R} \quad (53)$$

$$(Z_a - L)(Z - Z_a)^* + (Z - Z_a)(Z_a - L)^* + (Z_a - L)(Z_a - L)^* > \hat{R} \quad (54)$$

を与える。(53) 式を満たす Z の集合を Z_q 、(54) 式を満たす Z の集合を Z_a 、(52) 式を満たす Z の集合を Z と表わすとき、

$$Z \supset Z_q \supset Z_a \ni Z_a \quad (55)$$

が成り立つ。

証明 $(Z - Z_q)(Z - Z_q)^* \geq 0$ より、(52) の十分条件として (53) を得る。よって $Z \supset Z_q$ が示された。(53) と (54) はそれぞれ次式でも表わせる。

$$(Z - L)(Z - L)^* - (Z - Z_q)(Z - Z_q)^* > \hat{R} \quad (56)$$

$$(Z - L)(Z - L)^* - (Z - Z_a)(Z - Z_a)^* > \hat{R} \quad (57)$$

さらに、これらは以下のように表わせる。

$$-(Z - L)(L - Z_q)^* - (L - Z_q)(Z - L)^* > \hat{R} + (L - Z_q)(L - Z_q)^* \quad (58)$$

$$-(Z - L)(L - Z_a)^* - (L - Z_a)(Z - L)^* > \hat{R} + (L - Z_a)(L - Z_a)^* \quad (59)$$

$Z_q - L = q(Z_a - L)$ の関係を (58) 式に代入し、 $0 < q \leq 1$ を用いると

$$-(Z - L)(L - Z_a)^* - (L - Z_a)(Z - L)^* > \frac{1}{q}\hat{R} + q(L - Z_a)(L - Z_a)^* \quad (60)$$

を得る。(59) 式の右辺は (60) の右辺より大きいことを示そう。これらの差は

$$\begin{aligned} & R + (L - Z_a)(L - Z_a)^* \\ & - \left\{ \frac{1}{q}\hat{R} + q(L - Z_a)(L - Z_a)^* \right\} \\ & = \frac{1-q}{q^2} \{ (L - Z_q)(L - Z_q)^* - q\hat{R} \} \geq 0 \end{aligned} \quad (61)$$

を満たすので、 $Z_q \supset Z_a$ が示された。 $Z = Z_a$ を (54) 式に代入すると $(Z_a - L)(Z_a - L)^* > \hat{R}$ となり、これが成り立つことを言えば $Z_a \ni Z_a$ が示される。実際、 $Z_q - L = q(Z_a - L)$ を (51) に代入すると、 $q^2(Z_a - L)(Z_a - L)^* > \hat{R}$ が得られるので、 $(Z_a - L)(Z_a - L)^* > \hat{R}$ は満たされる。証明終わり。

Case 3 上記以外の場合には, P は固有値分解により

$$P = U \begin{bmatrix} \Lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\Lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} U^* \quad (62)$$

と表わされる. ここに, $U = [U_1, U_2, U_3]$, $\Lambda_1 > 0, \Lambda_2 > 0$ である. 条件式は

$$KU_1\Lambda_1U_1^*K^* - KU_2\Lambda_2U_2^*K^* + KUU^*L^* + LUU^*K^* + R > 0 \quad (63)$$

と表わせる. $KU_1\Lambda_1U_1^*K^*$ があるのでこれは凸制約ではない. そこで, Case 2 の方法を適用するために, 上式を (32) 式の形式で以下のように表わす.

$$KU_1\Lambda_1U_1^*K^* + KU_1U_1^*L^* + LU_1U_1^*K^* + \tilde{R} > 0 \quad (64)$$

ここに,

$$\begin{aligned} \tilde{R} = & -KU_2\Lambda_2U_2^*K^* + KU_2U_2^*L^* \\ & + KU_3U_3^*L^* + LU_2U_2^*K^* + LU_3U_3^*K^* + R \end{aligned} \quad (65)$$

さて,

$$Z = KU_1\Lambda_1^{1/2} \quad (66)$$

$$\tilde{L} = -LU_1\Lambda_1^{-1/2} \quad (67)$$

とおくと,

$$(Z - \tilde{L})(Z - \tilde{L})^* \geq -\tilde{R} + \tilde{L}\tilde{L}^* \quad (68)$$

と表わせ, (36) 式と同じ形式に表わせる. ここで, $K = K_a$ に対して上式が成り立つと仮定し, $Z_a = K_aU_1\Lambda_1^{1/2}$ とする. Case 2 と同様にして Z_q を求めることができる. つぎに, $Z = Z_q$ における Z の線形制約を Case2 と同様の方法で求めると,

$$\begin{aligned} (Z_q - \tilde{L})Z^* + Z(Z_q - \tilde{L})^* - Z_qZ_q^* \\ - KU_2\Lambda_2U_2^*K^* + KU_2U_2^*L^* + KU_3U_3^*L^* \\ + LU_2U_2^*K^* + LU_3U_3^*K^* + R > 0 \end{aligned} \quad (69)$$

となる. これを K の条件式で表わし, さらに Schur Complement を用いるとつぎの LMI が得られる.

$$\begin{bmatrix} \Theta & KU_2 \\ U_2^*K^* & \Lambda_2^{-1} \end{bmatrix} > 0 \quad (70)$$

$$\begin{aligned} \Theta = & K(Z_q\Lambda_1^{1/2}U_1^* + L)^* + (Z_q\Lambda_1^{1/2}U_1^* + L)K^* \\ & + R - Z_qZ_q^* \end{aligned} \quad (71)$$

補題 8 すべての周波数で (30), (39) 式, あるいは (70) の制約を満たす PID ゲインの集合は凸集合である.

証明 これらの制約はすべて行列 K に関して LMI であり, K は PID ゲインに関して線形であるから, これらの制約は PID ゲインに関しても同様に LMI である. よって, 各周波数でこれらの制約を満たす PID ゲインの集合は凸集合である. このため, すべての周波数でこれらの制約を満たす PID ゲインの集合も凸集合となる. 証明終わり.

定理 2 $K = K_1(s) \in \mathcal{K}_{PID}$ は $G(s)$ を安定化し, $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma_1$ を満たすとする. $K = K_1(s)$ は $\|T_{zw}/\gamma_1\|_\infty < 1$ から得られる LMI 制約 (30), (39) 式, あるいは (70) をすべての周波数で満たす. これらの制約式をすべての ω で満たす $K = K_2 \in \mathcal{K}_{PID}$ が存在し, $K_2 \in \mathcal{K}_r(K_1)$ を満たせば, すべての β ($0 \leq \beta \leq 1$) に対して $K = (1 - \beta)K_1(s) + \beta K_2(s)$ は $G(s)$ を安定化し, $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma_1$ を満たす.

証明 $K = K_1(s) \in \mathcal{K}_{PID}$ が $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma_1$ を満たすので, $K = K_1$, $\gamma = \gamma_1$ に対しすべての ω で LMI 制約式が満たされる. さて, すべての周波数で LMI 制約式を満たすひとつの解を $K = K_2(s)$ とすると, 補題 8 の PID ゲイン集合の凸性より $K = \beta K_1(s) + (1 - \beta)K_2(s)$ はすべての β ($0 \leq \beta \leq 1$) に対して LMI 制約式を満たす. ところで, LMI 制約式は H_∞ 制約の十分条件であったので, このことは $K = \beta K_1(s) + (1 - \beta)K_2(s)$ はすべての β ($0 \leq \beta \leq 1$) に対して $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma_1$ を満たすことを意味する. よって, 定理 1 より仮定 $K_2 \in \mathcal{K}_r(K_1)$ が成り立てば, $K = (1 - \beta)K_1(s) + \beta K_2(s)$ はすべての β ($0 \leq \beta \leq 1$) に対して $G(s)$ を安定化する. 証明終わり.

補足 3 定理 2 で得られる $K = K_2(s)$ を用いて $\|T_{zw}\|_\infty$ の上限値 $\gamma = \gamma_2$ を求めれば, $\gamma_1 \geq \gamma_2$ が成り立つ. よって, 安定化解 $K_1 \in \mathcal{K}_{PID}$ から出発して定理 2 の方法で新しい安定化解 K_2 を求め, つぎに K_2 から出発して定理 2 の方法で K_3 を求めることを繰り返すとしよう. このとき, PID 制御器 $K = (1 - \beta)K_i(s) + \beta K_{i+1}(s)$, ($0 \leq \beta \leq 1$), $i = 1, 2, \dots$ は, K の不安定極 $s = 0$ の数が不変であるとき, $G(s)$ を安定化し $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma_i$, $i = 1, 2, \dots$ を満たす. $\{\gamma_i\}$ は下に有界な単調非増加列であるので, 収束する.

5. アルゴリズム

すべての周波数に対して得られた無限個の LMI を解くことはできないので, 離散的な周波数点を与え, 有限個の LMI 問題を解く. これにより, 不安定化解が得られる危険性が生じる. 特にサンプル周波数区間の外に $\bar{\sigma}\{T_{zw}(j\omega)\}$ の最大値を与える周波数が現れる場合には危険性が高いので, Step 2 でそれを調べ, 対処する.

数値最適化アルゴリズム

Step 1 $\omega = \omega_i, i = 1, \dots, N$ を与え, $G(s)$ を安定化する $K = K_1$ を与える. $j = 1$ とし, γ_0 に十分大きな正数を与える. PID 制御器の構造を指定する. $K = K_1$ に対して $K_{I11} + K_{I11}^T > 0$ が満たされるとする.

Step 2 $K = K_j$ に対して $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$ を満たすだけ小さい γ を計算し, γ_j とおく. $\bar{\sigma}\{T_{zw}(j\omega)\}$ のゲイン線図を表示し, ピーク値 γ を与える周波数 ω_a が Step 1 で与えたサンプル周波数の外部にあれば, 中止し, ω_a を含むようにサンプル周波数を変更する. また, $K = K_j$ が安定化解でなければ, 警告を出しアルゴリズムを中止する.

Step 3 もし $\gamma_j < 1$ であれば解が得られたので終了。あるいは $\gamma_j - \gamma_{j-1} < q\gamma_{j-1}$ であれば、反復による減少の可能性が低いと考えて終了する。たとえば、 $q = 0.001$ とする。それ以外はつぎのステップへいく。

Step 4 $\|\frac{1}{\gamma_j}T_{zw}\|_\infty < 1$ を満たす解集合 $\mathcal{K}$ を求める。

Step 5 $\omega = \omega_i, i = 1, \dots, N$ に対して、 $\|\frac{1}{\gamma_j}T_{zw}\|_\infty < 1$ の十分条件である LMI 制約式に $K = K_j$ を与えて N 個の LMI を求める。これに LMI 条件 $K_{I11} + K_{I11}^T > 0$ を付加する。

Step 6 Step 5 で得られた LMI は PID ゲイン K_P, K_D, K_I に関する LMI であるので、その構造制約条件の下で、内点法で解を求め、それを新しい解 K_{j+1} とする。 $j = j+1$ とし Step 2 へいく。

補足 4 $\{\gamma_j\}$ は単調非増加であるが、狭義の単調減少性はある程度期待できるので、その理由を以下に説明する。Step 2 で、 $K = K_j$ に対して $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$ を満たすできるだけ小さい γ を計算し $\gamma = \gamma_j$ としている。これは $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma_j$ を満たす K の許容集合の境界付近に $K = K_j$ があることを意味し、この K_j を含む凸領域が Step 5 で求めた LMI 条件で与えられる。そして、Step 6 で LMI を解くことによりこの凸集合の内点として K_{j+1} が得られる。以上の関係を Fig. 2 に示した。よって、狭義の不等号 $\gamma_j > \gamma_{j+1}$ が期待できる。

Fig. 2 Permissible region and its convex approximation

6. 数 値 例

Fig. 3 の混合感度問題に対して制御系を設計する。

Fig. 3 Mixed sensitivity control problem

ここにプラント $P(s)$ は 2 入力 2 出力系であり、伝達関

数が

$$P(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{0.2}{s+3} \\ \frac{0.1}{s+2} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix} \quad (72)$$

で与えられ、重み関数は

$$V(s) = v(s)I_2, W(s) = w(s)I_2 \quad (73)$$

$$v(s) = \frac{s+3}{3s+0.3} \quad (74)$$

$$w(s) = \frac{10s+2}{s+40} \quad (75)$$

$$a = 0.01 \quad (76)$$

である。 $\|T_{zw}\|_\infty < 1$ を満たす PID 制御器を設計する。

初期ゲインを $K_1(s) = I \times 0.001$ とする。このときの $T_{zw}(j\omega)$ の最大特異値の周波数特性は Fig. 4 の番号 1 のグラフである。さて、PID ゲインには LMI 制約を付加できるので、さまざまな構造制約下で解が得られる。

まず、PID ゲインがすべてフル行列の場合を検討しよう。安定性の保証のために制約 $K_I + K_I^T > 0$ を付加する。この条件を省略すると不安定解が得られる。さらに微分ゲインも正定として $K_D + K_D^T > 0$ の制約を付加するが、これはなくても良い。アルゴリズムを適用すると、 $T_{zw}(j\omega)$ の最大特異値の周波数特性は Fig. 4 のように変化する。図中の番号 5, 10, ..., 40, 44 は反復回数を表わし、44 回目では $\|T_{zw}\|_\infty < 1$ を満たすつぎの解が求められた。 γ の単調減少のようすを Fig. 5 に示す。

$$K(s) = \begin{bmatrix} 3.2827 & 0.40525 \\ -1.6231 & 3.9924 \end{bmatrix}$$

Fig. 4 Plots of $\sigma_{\max}[T_{zw}(j\omega)]$

Fig. 5 Graph of $\gamma_i, i = 1, 2, \dots, 44$

$$\begin{aligned}
& + \begin{bmatrix} 2.8095 & 6.4607 \\ -2.9771 & 1.4490 \end{bmatrix} \frac{1}{s} \\
& + \begin{bmatrix} 5.5414 & -5.2770 \\ 8.1625 & 4.2395 \end{bmatrix} \frac{10^{-3}s}{1+0.01s}
\end{aligned}$$

つぎに、分散制御を扱う。すなわち、上記の条件のほか、PID 制御器のゲイン行列を対角行列に制約する。同様な収束を示し、反復回数 28 回目でつぎの解が求められた。

$$\begin{aligned}
K(s) = & \begin{bmatrix} 2.4316 & 0 \\ 0 & 3.4000 \end{bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} 7.7413 & 0 \\ 0 & 8.6513 \end{bmatrix} \frac{1}{s} \\
& + \begin{bmatrix} 8.3249 & 0 \\ 0 & 9.3208 \end{bmatrix} \frac{10^{-3}s}{1+0.01s}
\end{aligned}$$

プログラムは MATLAB で行ない、ROBUST CONTROL TOOLBOX¹³⁾, 'SEDUMI for interface'¹⁴⁾, 'SEDUMI solver'¹⁵⁾ を用いた。

7. おわりに

安定化解を初期値として、標準 H_∞ 制御問題を満たす固定構造の PID 制御器を探索する方法を提案した。標準 H_∞ 制御問題の解のパラメータ表現から、周波数制約条件を求め、この制約条件を LMI で近似する方法を与えた。数値実験により、LMI を繰り返し解くことで多変数 PID 制御器や分散 PID 制御器が得られることを確認した。

状態空間の BMI では未知変数の数が多く不等式の数が多い個であるのに対し、本論文で扱った周波数領域の BMI では未知数は PID ゲインのみで少ないがサンプル周波数の数だけ不等式がある。状態空間の BMI では安定性が厳密に扱える利点があるのにたいし、提案法では適切にサンプル周波数を選ぶことでシステムを不安定にする PID ゲインが得られることを回避している。提案法では、周波数領域で得られた BMI 制約を十分条件の LMI 制約で置き換える点で保守性が生じており、解が得られない可能性がある。この方法は文献¹²⁾の方法を多入出力制御器に拡張したものであり、少なくとも文献¹²⁾の 1 入力 1 出力の場合の数値実験では、最適解が得られている。今後、状態空間の BMI を LMI 近似する方法¹⁶⁾なども参考にしながら、 Z_q の与え方を検討したい。

周波数領域の BMI は H_∞ 制御問題の一般解を介して求めたが、これは μ 設計などで高次の制御器を設計後に PID 制御器の可能性を探る意味で便利である。しかし、いきなり PID 制御器の設計を行なうときには、標準問題の仮定を満たすなどの手続きが不便である。そこで、一般解を介さずに直接 BMI を求める方向で研究をおこなう予定である。これにより、むだ時間系を含む場合にも有限次元の近似をしないで済むようになる。また、本方法は多目的 H_∞ 制御問題に

も少なくとも形式的には適用できるので、数値実験により保守性や収束性を検討していきたい。

参考文献

- 1) J.C. Doyle, K. Glover, P.P. Kargonekar and B.A. Francis: State space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems, IEEE Trans. Automat. Contr., **34**-8, 831/842(1989)
- 2) K. Zhou, J.C. Doyle and K. Glover: Robust and Optimal Control, Prentice Hall(1996)
- 3) M. Lelic and Z. Gajic: A reference guide to PID controllers in the nineties: IFAC Digital Control: Past, Present and Future of PID Control, Terrassa, Spain, 69/78(2000)
- 4) P.J. Goddard and K. Glover: Controller approximation: approaches for preserving H_∞ performance, IEEE Trans. Automat. Contr., **43**-7, 858/871(1998)
- 5) 瀬部, 北森: ロバストパフォーマンスを達成する分散型安定化補償器の既約分解表現に基づく設計法, 計測自動制御学会論文集, **31**-6, 743/750(1995)
- 6) 藤岡, 岩崎: BMI: 非凸行列不等式に基づく制御系設計への挑戦, 計測と制御, **36**-11, 762/767(1997)
- 7) T. Iwasaki and R.E. Skelton: The XY-centering algorithm for the dual LMI problems: a new approach to fix order control design, Int. J. of Control, **62**-6, 1257/1272(1995)
- 8) V.L. Syrmos, C.T. Abdallah, P. Dorato and K. Grigoriadis: Static output feedback - a survey **33**, 125/137 (1997)
- 9) Y.-Y. Cao, J. Lam and Y.-X. Sun: Static output feedback stabilization: An LMI approach, Automatica, **34**, 1641/1645(1998)
- 10) F. Zheng, Q.G. Wang and T.H. Lee: On the design of multivariable PID controllers via LMI approach, Automatica, **38**, 517/526(2002)
- 11) 宮元慎一: 既約分解表現と LMI 最適化に基づいた固定構造 H_∞ 制御器の設計, システム/制御/情報, **43**-2, 80/86(1999)
- 12) M. Saeki and K. Aimoto: PID controller optimization for H_∞ control by linear programming, Int. J. of Robust and Nonlinear Control, **10**, 83/99(2000)
- 13) M.G. Safonov, D.J.N. Limebeer and R.Y. Chiang: Simplifying the H_∞ theory via loop-shifting matrix pencil and descriptor concepts, Int. J. Contr., **50**-6, 2467/2488 (1989)
- 14) D. Peaucelle, D. Henrion, Y. Labit and K. Taitz: User's Guide for SEDUMI interface 1.04(2002)
- 15) J.F. Sturm: Using SEDUMI 1.02, A MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones(2001)
- 16) T. Shimomura and T. Fujii: An iterative method for mixed H_2/H_∞ control design with uncommon LMI solutions, Proc. of the American Control Conference, San Diego, California, 3292/3296(1999)

[著者紹介]

佐伯正美 (正会員)

1981 年, 京都大学大学院工学研究科博士課程単位取得退学。同年京都大学工学部助手, 82 年筑波大学電子・情報工学系講師, 助教授を経て, 92 年広島大学工学部第一類教授となり, 現在に至る。ロバスト制御系の設計の研究に従事 (工学博士)。システム制御情報学会, 日本機械学会, 電気学会, IEEE などの会員。