一般時変型非線形システムの形式的線形化 計算アルゴリズムと非線形オブザーバ

小松 一男*・高田 等**

Computer Algorithms of a General Class of Time-Variant Nonlinear Systems
and a Nonlinear Observer

Kazuo KOMATSU* and Hitoshi TAKATA**

In this paper, we deal with a formal linearization algorithm of a general class of time-variant nonlinear systems using interpolation of orthogonal polynomials. A linearizing function which consists of the Chebyshev polynomials is defined. The time-variant nonlinear systems are transformed into time-variant linear ones with respect to this linearizing function by exploiting Chebyshev interpolation to the state variable and Laguerre interpolation to the time variable. This kind of linearization has simple algorithms due to the orthogonality for a finite sum, so they are easily executed by using computers. The inversion of this linearization is also simple. Besides, a time-variant nonlinear observer algorithm is presented as an application of the linearization.

Key Words: formal linearization, time-variant nonlinear system, orthogonal polynomial, Chebyshev interpolation, Laguerre interpolation

1. はじめに

非線形システムに対する形式的線形化の研究はポアンカレに始まり多くの成果が報告されてきた^{1)~4)}。筆者らは常微分方程式で与えられた非線形システムに対し直交多項式展開を用いた形式的線形化法について研究してきた^{5)~7)}。本研究では、時間関数を陽に持つ時変型非線形システムの形式的線形化法に対し離散型直交多項式展開を基にし、計算機の使用を目的とした形式的線形化計算アルゴリズムを提案する。

時間関数と状態変数が分離可能な特殊時変型非線形システム：

$$\dot{x}(t) = f(t)g(x)$$

に関する形式的線形化の研究はすでに報告されている^{6), 7)}。しかし分離可能でないシステムに関する研究はない。そこで本論文は一般時変型非線形システム：

$$\dot{x}(t) = f(t, x)$$

の形式的線形化法に関する計算アルゴリズムについて考察する。本線形化法は、まずチェビシェフ多項式からなる線形化関数を導入し、この導入された線形化関数の運動方程式を求める。状態変数に関しては離散型チェビシェフ補間多項式を用いて近似し、さらに時間関数に関しては離散型ラゲール補間多項式で近似する。結果として、線形化関数に関して時変型線形なシステムが得られる。その際、選点直交性の性質⁸⁾から計算機により自動的に線形化でき、計算が積分不要で単なる繰り返し計算で表わされる精度の良い簡明な計算アルゴリズムとなる。なお、逆変換は単なる要素抽出であり、きわめて容易である。

本手法の応用として、時変型の非線形オブザーバを構成し、その計算アルゴリズムも示した。最後に、数値実験で本手法の有効性を確認した。

2. 形式的線形化アルゴリズム

つぎの時変型非線形システムを考える。

$$\begin{aligned} \Sigma_1 : \dot{x}(t) &= f(t, x), \\ x(0) &= x_0 \in D. \end{aligned} \quad (1)$$

ここで、 $\cdot = d/dt$, t : 時間, $x = [x_1, \dots, x_n]^T$: n 次元状態ベクトル, T : 転置, $D \subset R^n$: 領域, $f(t, x)$ は十分なめらかな非線形関数であり, $\int_0^\infty f(t, x)^T f(t, x) e^{-t} dt < \infty$ ($x \in D$).
まず、線形化する対象領域 D がつぎの直積空間で表わさ

* 熊本電波工業高等専門学校

熊本県菊池郡西合志町須屋 2659-2

** 鹿児島大学 工学部 鹿児島市郡元 1-21-40

* Kumamoto National College of Technology, Kikuchi-gun, Kumamoto

** Faculty of Engineering, Kagoshima University, Korimoto, Kagoshima

(Received March 8, 2004)

(Revised November 29, 2004)

れるとしよう.

$$D = \prod_{i=1}^n [m_i - p_i, m_i + p_i] \subset R^n, \quad (2)$$

$$(m_i \in R, p_i > 0).$$

ただし, m_i は x_i の領域の中心, p_i はその領域の半分である. ここでは状態変数に対し離散型チェビシェフ補間近似⁹⁾を使った線形化を行なう. チェビシェフ近似式の基本区間が

$$D_0 = \prod_{i=1}^n [-1, 1]$$

で定義されるので, 状態変数を x から y に,

$$y = P^{-1}(x - M), \quad (3)$$

$$P = \begin{pmatrix} p_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & p_n \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

と変数変換する. (1) 式より y の運動方程式は,

$$\dot{y}(t) = P^{-1}f(t, Py + M) \quad (4)$$

となる.

チェビシェフ多項式 $\{T_r(\cdot)\}$ はつぎの式で定義される.

$$T_r(y_i) = \cos(r \cdot \cos^{-1} y_i) \quad (r = 0, 1, 2, \dots). \quad (5)$$

すなわち,

$$\begin{aligned} T_0(y) &= 1, T_1(y) = y, T_2(y) = 2y^2 - 1, \\ T_3(y) &= 4y^3 - 3y, T_4(y) = 8y^4 - 8y^2 + 1, \\ T_5(y) &= 16y^5 - 20y^3 + 5y, \dots \end{aligned}$$

または漸化式表現で,

$$\begin{aligned} T_{r+1}(y_i) &= 2y_i T_r(y_i) - T_{r-1}(y_i) \quad (r \geq 1), \\ T_0(y_i) &= 1, T_1(y_i) = y_i \end{aligned} \quad (6)$$

である. また, 微分 $S_r(y_i) \equiv \frac{dT_r(y_i)}{dy_i}$ に関する漸化式は,

$$\begin{aligned} S_{r+1}(y_i) &= 2T_r(y_i) + 2y_i S_r(y_i) - S_{r-1}(y_i), \\ S_0(y_i) &= 0, S_1(y_i) = 1 \quad (r \geq 1) \end{aligned} \quad (7)$$

で与えられる.

さてここでチェビシェフ多項式を用いた線形化関数 ϕ を,

$$\begin{aligned} \phi(y) &= [T_{(10\dots 0)}(y), T_{(01\dots 0)}(y), \dots, T_{(0\dots 01)}(y), \\ &\quad T_{(11\dots 0)}(y), T_{(101\dots 0)}(y), \dots, T_{(10\dots 1)}(y), \\ &\quad T_{(20\dots 0)}(y), T_{(21\dots 0)}(y), \dots, T_{(r_1\dots r_n)}(y), \\ &\quad \dots, T_{(N_1\dots N_n)}(y)]^T. \end{aligned} \quad (8)$$

ただし,

$$T_{(r_1\dots r_n)}(y) = \prod_{i=1}^n T_{r_i}(y_i)$$

と定義する. 線形化関数 ϕ の運動方程式は (4) 式から,

$$\begin{aligned} \dot{T}_{(r_1\dots r_n)}(y) &= \frac{\partial T_{(r_1\dots r_n)}(y)}{\partial y^T} \dot{y} \\ &= [S_{r_1}(y_1)T_{r_2}(y_2) \cdots T_{r_n}(y_n), T_{r_1}(y_1)S_{r_2}(y_2) \cdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &T_{r_n}(y_n), \dots, T_{r_1}(y_1)T_{r_2}(y_2) \cdots S_{r_n}(y_n)] \\ &\times P^{-1}f(t, Py + M) \\ &= [S_{(r_1\dots r_n)}^{(1)}(y), \dots, S_{(r_1\dots r_n)}^{(i)}(y), \dots, \\ &\quad S_{(r_1\dots r_n)}^{(n)}(y)] \times P^{-1}f(t, Py + M) \\ &\equiv G_{(r_1\dots r_n)}(t, y). \end{aligned} \quad (9)$$

ただし,

$$S_{(r_1\dots r_n)}^{(i)}(y) \equiv T_{r_1}(y_1)T_{r_2}(y_2) \cdots S_{r_i}(y_i) \cdots T_{r_n}(y_n)$$

である. この $G_{(r_1\dots r_n)}(t, y)$ に対し, 状態変数 y_i については有限区間の領域 D 内で関数近似に優れた離散型チェビシェフ補間近似, および時間 t については半無限区間 $D_L = [0, \infty)$ で定義され, その領域で関数近似に優れた離散型ラゲール補間近似⁸⁾で表現することを考える.

なおラゲール多項式 $\{L_r(t)\}$ はつぎの式で定義される. 定義域 D_L に対し,

$$L_r(t) = e^t \frac{d^r}{dt^r} (t^r e^{-t}) \quad (r = 0, 1, 2, \dots). \quad (10)$$

すなわち,

$$\begin{aligned} L_0(t) &= 1, L_1(t) = 1 - t, L_2(t) = 2 - 4t + t^2, \\ L_3(t) &= 6 - 18t + 9t^2 - t^3, \\ L_4(t) &= 24 - 96t + 72t^2 - 16t^3 + t^4, \\ L_5(t) &= 120 - 600t + 600t^2 - 200t^3 + 25t^4 - t^5, \\ &\dots \end{aligned}$$

であり, この漸化式は,

$$\begin{aligned} L_{r+1}(t) &= (2r + 1 - t)L_r(t) - r^2 L_{r-1}(t) \quad (r \geq 1), \\ L_0(t) &= 1, L_1(t) = 1 - t \end{aligned} \quad (11)$$

である.

N 次直交多項式の N 個の零点に関して, $N - 1$ 次以下の直交多項式間に離散的な直交関係が成り立つ (選点直交性の性質⁸⁾) ことより, 直交多項式系による展開係数が容易に計算でき, (9) 式の $G_{(r_1\dots r_n)}(t, y)$ は $N_i (i = 1, \dots, n)$ 次の離散型チェビシェフ補間近似法および N_L 次の離散型ラゲール補間近似法を適用してつぎの近似式を得る.

$$\begin{aligned} \hat{G}_{(r_1\dots r_n)}(t, y) &= \sum_{k=0}^{N_L} \sum_{q_1=0}^{N_1} \cdots \sum_{q_n=0}^{N_n} \\ &\quad C_{(r_1\dots r_n)}^{(kq_1\dots q_n)} L_k(t) T_{q_1}(y_1) \cdots T_{q_n}(y_n). \end{aligned} \quad (12)$$

ここで,

$$\begin{aligned} C_{(r_1\dots r_n)}^{(kq_1\dots q_n)} &\equiv \frac{1}{(k!)^2} \frac{2^{n-\gamma}}{\prod_{i=1}^n (N_i + 1)} \sum_{\ell=0}^{N_L} \sum_{j_1=0}^{N_1} \cdots \\ &\quad \sum_{j_n=0}^{N_n} w_\ell G_{(r_1\dots r_n)}(t_\ell, y_{1j_1}, \dots, y_{nj_n}) \\ &\quad \times L_k(t_\ell) T_{q_1}(y_{1j_1}) \cdots T_{q_n}(y_{nj_n}), \end{aligned} \quad (13)$$

$$\gamma = \{\text{The number of } q_i = 0 : 1 \leq i \leq n\},$$

$$w_\ell = \frac{1}{\sum_{i=0}^{N_L} \left(\frac{L_i(t_\ell)}{i!}\right)^2}.$$

補間する分点 $\{y_{ij_i}\}$ と $\{t_\ell\}$ はそれぞれ,

$$y_{ij_i} = \cos \frac{2j_i + 1}{2N_i + 2} \pi \quad (j_i = 0, \dots, N_i),$$

$$t_\ell = \{(\ell + 1)\text{-th zero of } L_{N_L+1}(t) : 0 \leq \ell \leq N_L\}$$

となる. または, $\{t_\ell\}$ はつぎの行列の固有値より計算できる¹⁰⁾.

$$t_\ell = \{(\ell + 1)\text{-th eigenvalue of}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 5 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & 2N_L - 2 & N_L \\ 0 & & & & N_L & 2N_L + 1 \end{pmatrix}\}.$$

(9) 式の $G_{(r_1 \dots r_n)}(t, \mathbf{y})$ を (12) 式の $\hat{G}_{(r_1 \dots r_n)}(t, \mathbf{y})$ で近似すると,

$$\hat{T}_{(r_1 \dots r_n)}(\mathbf{y}) \approx \sum_{k=0}^{N_L} \sum_{q_1=0}^{N_1} \cdots \sum_{q_n=0}^{N_n} C_{(r_1 \dots r_n)}^{(k q_1 \dots q_n)} L_k(t) T_{q_1}(y_1) \cdots T_{q_n}(y_n) \quad (14)$$

となり, $\phi(\mathbf{y})$ でまとめると,

$$\dot{\phi}(\mathbf{y}) \approx A(t)\phi(\mathbf{y}) + B(t). \quad (15)$$

ここで,

$$[A_{\alpha\beta}(t)] = \left[\sum_{k=0}^{N_L} C_{(r_1 \dots r_n)}^{(k q_1 \dots q_n)} L_k(t) \right],$$

$$[B_\alpha(t)] = \left[\sum_{k=0}^{N_L} C_{(r_1 \dots r_n)}^{(k 0 \dots 0)} L_k(t) \right],$$

$$\alpha = \alpha(r_1, \dots, r_n), \quad \beta = \beta(q_1, \dots, q_n),$$

$$\alpha, \beta \in \{1, 2, \dots, (N_1 + 1)(N_2 + 1) \cdots (N_n + 1) - 1\}$$

となる. 結局, この $A(t)$, $B(t)$ を用いて形式的線形システム:

$$\Sigma_2 : \dot{\mathbf{z}}(t) = A(t)\mathbf{z}(t) + B(t), \quad (16)$$

$$\mathbf{z}(0) = \phi(\mathbf{y}(0)) = \phi(P^{-1}(\mathbf{x}_0 - M))$$

が得られる (実際の時間領域に関しては, ラゲール補間の最大の分点時間 t_{N_L} を大幅に超えない範囲内で一般に有効な形式的線形システムであることに注意する). 逆変換は, (8) 式の線形化関数の要素中に状態変数 $\mathbf{y}$ そのものを含むので, (3) 式より次式で求まる.

$$\mathbf{x}(t) = P\mathbf{y}(t) + M = PH\phi(\mathbf{y}(t)) + M. \quad (17)$$

ここで,

$$H = [I : 0], \quad I : n \times n \text{ 単位行列.}$$

よって, (16) 式より非線形システムの近似解は,

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = PH\mathbf{z}(t) + M \quad (18)$$

で与えられる. 以上をまとめると以下の形式的線形化計算アルゴリズムが得られる.

〈形式的線形化アルゴリズム〉

(L-1) Given $\Sigma_1 : \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}),$
 $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \in D$

(L-2) Set p_i, m_i, N_i ($1 \leq i \leq n$), and N_L

(L-3) For $i = 1, \dots, n$

For $j_i = 0, \dots, N_i$

(L-3.1) $y_{ij_i} = \cos \frac{2j_i + 1}{2N_i + 2} \pi$

(L-3.2) $T_0(y_{ij_i}) = 1, T_1(y_{ij_i}) = y_{ij_i},$

$S_0(y_{ij_i}) = 0, S_1(y_{ij_i}) = 1$

(L-3.3) For $r_i = 1, \dots, N_i - 1$

$T_{r_i+1}(y_{ij_i}) = 2y_{ij_i}T_{r_i}(y_{ij_i}) - T_{r_i-1}(y_{ij_i}),$

$S_{r_i+1}(y_{ij_i}) = 2T_{r_i}(y_{ij_i}) + 2y_{ij_i}S_{r_i}(y_{ij_i})$

$-S_{r_i-1}(y_{ij_i})$

(L-4) For $\ell = 0, \dots, N_L$

(L-4.1) $t_\ell = \{(\ell + 1)\text{-th eigenvalue of}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 5 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & 2N_L - 2 & N_L \\ 0 & & & & N_L & 2N_L + 1 \end{pmatrix}\}$$

(L-4.2) $L_0(t_\ell) = 1, L_1(t_\ell) = 1 - t_\ell$

(L-4.3) For $k = 1, \dots, N_L - 1$

$L_{k+1}(t_\ell) = (2k + 1 - t_\ell)L_k(t_\ell) - k^2 L_{k-1}(t_\ell)$

(L-4.4) $w_\ell = \frac{1}{\sum_{k=0}^{N_L} \left(\frac{L_k(t_\ell)}{k!}\right)^2}$

(L-5) For $i = 1, \dots, n$

For $r_i = 0, \dots, N_i$

For $k_i = 0, \dots, N_i$

$T_{(r_1 \dots r_n)}(y_{1k_1}, \dots, y_{nk_n}) = \prod_{i=1}^n T_{r_i}(y_{ik_i}),$

$S_{(r_1 \dots r_n)}^{(i)}(y_{1k_1}, \dots, y_{nk_n}) = T_{r_1}(y_{1k_1})T_{r_2}(y_{2k_2})$
 $\cdots S_{r_i}(y_{ik_i}) \cdots T_{r_n}(y_{nk_n})$

(L-6) For $k = 0, \dots, N_L$

For $i = 1, \dots, n$

For $q_i = 0, \dots, N_i$

For $r_i = 0, \dots, N_i$

$C_{(r_1 \dots r_n)}^{(k q_1 \dots q_n)} = \frac{1}{(k!)^2} \frac{2^{n-\gamma}}{\prod_{i=1}^n (N_i + 1)} \sum_{\ell=0}^{N_L} \sum_{j_1=0}^{N_1} \cdots$

$\sum_{j_n=0}^{N_n} w_\ell [S_{(r_1 \dots r_n)}^{(1)}(y_{1j_1}, \dots, y_{nj_n}), \dots,$
 $S_{(r_1 \dots r_n)}^{(n)}(y_{1j_1}, \dots, y_{nj_n})]$

$$\begin{aligned} & \times P^{-1} f(t_\ell, P[y_{1j_1}, \dots, y_{nj_n}]^T + M) \\ & \times L_k(t_\ell) T_{q_1}(y_{1j_1}) \cdots T_{q_n}(y_{nj_n}) \\ \text{(L-7)} \quad & \text{For } \alpha = 1, \dots, (N_1 + 1)(N_2 + 1) \cdots (N_n + 1) - 1 \\ & \text{For } \beta = 1, \dots, (N_1 + 1)(N_2 + 1) \cdots (N_n + 1) - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [A_{\alpha\beta}(t)] &= \left[\sum_{k=0}^{N_L} C_{(r_1 \dots r_n)}^{(k q_1 \dots q_n)} L_k(t) \right], \\ [B_\alpha(t)] &= \left[\sum_{k=0}^{N_L} C_{(r_1 \dots r_n)}^{(k 0 \dots 0)} L_k(t) \right] \end{aligned}$$

$$\text{(L-8)} \quad \text{Solve } \dot{z}(t) = A(t)z(t) + B(t)$$

$$\text{with } z(0) = \phi(P^{-1}(x_0 - M))$$

$$\text{(L-9)} \quad \hat{x}(t) = P[I : 0]z(t) + M$$

つぎに本手法の応用として、時変型非線形オブザーバの計算アルゴリズムを構成する。

3. 非線形オブザーバ

時変型非線形オブザーバとしてつぎの力学系、観測系を考える。

$$\Sigma_3 : \dot{x}(t) = f(t, x), \quad (19)$$

$$\zeta(t) = h(t, x(t)). \quad (20)$$

ここで、力学系は (1) 式と同じ、 $\zeta \in R^m$ は観測データ、 $h = [h_1, h_2, \dots, h_m]^T \in C^1 \cap L^2$ は非線形関数である。

力学系は、第2章の形式的線形化より時変型線形システム (16) 式に変換される。観測系は、(3) 式の変数変換により、

$$\zeta(t) = h(t, Py + M) \quad (21)$$

となる。よって (9) 式の $G_{(\cdot)}(t, y)$ を $h(t, Py + M)$ とみなし、(12) 式と同様に、状態変数 y_i に関し N_i 次のチェビシェフ補間近似法、時間 t に関し N_L 次のラグエル補間近似法を適用すると z に関し線形な観測方程式：

$$\zeta(t) = C(t)z(t) + d(t) \quad (22)$$

が得られる。線形化されたシステム (16), (22) 式が可観測性を満たせば同一次元オブザーバ¹¹⁾ が適用できつぎの非線形オブザーバが得られる。

$$\begin{aligned} \dot{\hat{z}}(t) &= A(t)\hat{z}(t) + B(t) \\ &+ K(t)(\zeta(t) - C(t)\hat{z}(t) - d(t)), \\ \hat{z}(0) &= \phi\left(P^{-1}(\hat{x}(0) - M)\right). \end{aligned} \quad (23)$$

ここで、オブザーバゲイン $K(t)$ は、

$$K(t) = \frac{1}{2} \Sigma(t) C(t)^T R(t) \quad (24)$$

で与えられ、 $\Sigma(t)$ はつぎのリカッチ方程式の解である。

$$\begin{aligned} \dot{\Sigma}(t) &= A(t)\Sigma(t) + \Sigma(t)A(t)^T \\ &+ Q(t) - \Sigma(t)C(t)^T R(t)C(t)\Sigma(t). \end{aligned} \quad (25)$$

$Q(t), R(t), \Sigma(0)$ は正定実対称行列であり、推定誤差 $e = z - \hat{z}$ が漸近安定するための条件である。(18) 式より推定値 $\hat{x}(t)$ が以下の逆変換で得られる。

$$\hat{x}(t) = PH\hat{z}(t) + M. \quad (26)$$

以上をまとめると以下の非線形オブザーバ計算アルゴリズムが得られる。

(非線形オブザーバアルゴリズム)

$$\begin{aligned} \text{(O-1)} \quad & \text{Given} \quad \dot{x}(t) = f(t, x), \\ & \zeta(t) = h(t, x(t)) \end{aligned}$$

$$\text{(O-2)} \quad \text{Set } p_i, m_i, N_i \ (1 \leq i \leq n), N_L$$

$$Q(t), R(t), \Sigma(0), \hat{x}(0), \text{ and } \hat{z}(0)$$

$$\text{(O-3)} \quad \text{Obtain } A(t) \text{ and } B(t) \text{ by (L-3)~(L-7) (形式的線形化アルゴリズム)}$$

$$\text{(O-4)} \quad \text{For } \alpha = 0, \dots, m$$

$$\text{For } k = 0, \dots, N_L$$

$$\text{For } i = 1, \dots, n$$

$$\text{For } q_i = 0, \dots, N_i$$

$$C_{(\alpha)}^{(k q_1 \dots q_n)} = \frac{1}{(k!)^2} \frac{2^{n-\gamma}}{\prod_{i=1}^n (N_i + 1)} \sum_{\ell=0}^{N_L} \sum_{j_1=0}^{N_1} \dots$$

$$\sum_{j_n=0}^{N_n} w_\ell h_\alpha(t, y_{1j_1}, \dots, y_{nj_n})$$

$$L_k(t_\ell) T_{q_1}(y_{1j_1}) \cdots T_{q_n}(y_{nj_n})$$

$$\text{(O-5)} \quad \text{For } \alpha = 1, \dots, m$$

$$\text{For } \beta = 1, \dots, (N_1 + 1)(N_2 + 1) \cdots (N_n + 1) - 1$$

$$[C_{\alpha\beta}(t)] = \left[\sum_{k=0}^{N_L} C_{(\alpha)}^{(k q_1 \dots q_n)} L_k(t) \right],$$

$$[d_\alpha(t)] = \left[\sum_{k=0}^{N_L} C_{(\alpha)}^{(k 0 \dots 0)} L_k(t) \right]$$

$$\text{(O-6)} \quad \text{Solve}$$

$$\dot{\hat{z}}(t) = A(t)\hat{z}(t) + B(t) + K(t)(\zeta(t) - C(t)\hat{z}(t) - d(t))$$

where

$$K(t) = \frac{1}{2} \Sigma(t) C(t)^T R(t),$$

$$\dot{\Sigma}(t) = A(t)\Sigma(t) + \Sigma(t)A(t)^T$$

$$+ Q(t) - \Sigma(t)C(t)^T R(t)C(t)\Sigma(t)$$

$$\text{(O-7)} \quad \hat{x}(t) = P[I : 0]\hat{z}(t) + M$$

4. 数値実験

本手法の有効性を確認するため数値実験を行なった。微分方程式の数値計算部分はすべて刻み幅 10^{-3} 秒とし、オイラー法を用いた。

4.1 形式的線形化

つぎの時変型非線形システムの形式的線形化を考える。

$$\dot{x} = -3x^2 \sqrt{x + e^{-t} + 1}, \quad x_0 = 1. \quad (27)$$

形式的線形化のパラメータを

$$P = 0.51, \quad M = 0.5 \quad (28)$$

とし、第2章の形式的線形化アルゴリズムにより (16) 式 (または (L-7)) の線形システムが得られ、この線形システムを解く (L-8). (18) 式または (L-9) の逆変換によって近似値 $\hat{x}$ が求まる。(27) 式を直接解いた解を真値 x として $\hat{x}$ との

Fig. 1 $x(t)$ and $\hat{x}(t)$ when N is varied Fig. 3 $x(t)$ and $\hat{x}(t)$ when N_L is varied Fig. 2 Approximation errors of x when N is varied Fig. 4 Approximation errors of x when N_L is varied

精度比較を行なう。その際、テーラー展開の1次近似式を基にした従来の一般的な線形化との比較も行なう。Fig. 1は、ラゲル補間次数 $N_L = 4$ と固定し、チェビシェフ補間次数 $N = 2, \dots, 6$ と変化させたときの結果であり、true は x 、 N は $\hat{x}$ 、Taylor は従来の1次近似線形化による結果を示す。Fig. 2はこのときの評価誤差：

$$J(t) = \int_0^t (x(\tau) - \hat{x}(\tau))^2 d\tau \quad (29)$$

を示す。Fig. 3は、逆にチェビシェフ補間次数 $N = 4$ と固定し、ラゲル補間次数 $N_L = 2, \dots, 6$ と変化させたときの結果であり、Fig. 4はこのときの評価誤差 $J(t)$ を示す。

4.2 1次元非線形オブザーバ

つぎの1次元時変型非線形システムのオブザーバを考える。

$$\dot{x} = -3x^2 \sqrt{x + e^{-t} + 1}, \quad (30)$$

$$\zeta(t) = \frac{x^2}{1+t^2}. \quad (31)$$

形式的線形化のパラメータを (28) 式と同じ

$$P = 0.51, M = 0.5 \quad (32)$$

とする。未知初期変数を $x(0) = 1$ とし、(23) 式のオブザーバのパラメータを、

$$Q(t) = I, R(t) = 100, \Sigma(0) = I, \hat{x}(0) = 0.3$$

とした。第3章の非線形オブザーバ計算アルゴリズムにより

Fig. 5 x and $\hat{x}$ of scalar nonlinear observer

(23) 式、または (O-6) のオブザーバが得られる。このオブザーバを解き (26) 式または (O-7) の逆変換によって推定値 $\hat{x}$ が求まる。真値 x 、推定値 $\hat{x}$ 、観測値 ζ 、テーラー展開の1次近似を基にした従来の一般的な線形化によるオブザーバ ($\hat{x}$ by Taylor) の結果を Fig. 5 に示す。

4.3 多次元非線形オブザーバ

つぎの2次元時変型非線形システムのオブザーバを考える。

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{3x_1^2}{1+x_2+\sin t} \\ \dot{x}_2 = -x_1^2 \end{cases}, \quad (33)$$

Fig. 6 x_1 and $\hat{x}_1$ of two-dimensional nonlinear observer Fig. 7 x_2 and $\hat{x}_2$ of two-dimensional nonlinear observer

$$\zeta(t) = x_1^2 + x_2.$$

形式的線形化のパラメータを

$$P = \begin{pmatrix} 0.51 & 0 \\ 0 & 0.33 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.68 \end{pmatrix},$$

$$N = 5, N_L = 5 \quad (34)$$

とする. 未知初期変数を $x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とし, (23) 式のオブザーバのパラメータを,

$$Q(t) = I, R(t) = 100, \Sigma(0) = I, \hat{x}(0) = \begin{pmatrix} 0.3 \\ 0.3 \end{pmatrix}$$

とした. 第3章の非線形オブザーバ計算アルゴリズムにより(23)式, または (O-6) のオブザーバが得られる. このオブザーバを解き (26) 式または (O-7) の逆変換によって推定値 $\hat{x}$ が求まる. 真値 x_i , 推定値 $\hat{x}_i$, 観測値 ζ , テーラー展開の1次近似を基にした従来の一般的な線形化によるオブザーバ ($\hat{x}_i$ by Taylor) ($i = 1, 2$) の結果を Fig. 6, 7 に示す.

5. おわりに

本研究では, 離散型直交多項式展開を用いて時間関数を陽に持つ常微分方程式で与えられた時変型非線形システムに対する形式的線形化計算アルゴリズムを提案した. 本アルゴリズムは, 計算機により自動的に線形化でき, 逆変換も容易な計算アルゴリズムである. 本手法の応用として, 時変型非線形オブザーバの計算アルゴリズムも構成した. 数値実験結果

より, 本手法がテイラー展開を基にした従来の一般的な一次近似線形化より精度が良く, またチェビシェフやラゲールの補間近似次数の上昇と共に線形化近似精度の向上が確かめられた. 応用として構成した非線形オブザーバの数値実験結果より, 本手法が従来法より精度が良く, その有効性が示された. 元のシステムと線形化されたシステムの可制御性や可観測性については今後に残された課題である.

参考文献

- 1) S. Sternberg : Local Contractions and a Theorem of Poincaré, Amer. J. Math. **79**, 809/824 (1954)
- 2) H. Takata : Transformation of a nonlinear system into an augmented linear system, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-24-5**, 736/741 (1979)
- 3) A. J. Krener : Approximate linearization by state feedback and coordinate change, Systems and Control Letters, **5**, 181/185 (1984)
- 4) R. R. Kadiyala : A tool box for approximate linearization on nonlinear systems, IEEE Control Systems, **13-2**, 47/57 (1993)
- 5) K. Komatsu and H. Takata : A formal linearization by the Chebyshev interpolation and its applications, Proc. of the IEEE CDC, **1**, 70/75 (1996)
- 6) K. Komatsu and H. Takata : A Computation Method of Formal Linearization for Time-Variant Nonlinear Systems via Chebyshev Interpolation, Proc. of the IEEE CDC, 4173/4178 (2002)
- 7) K. Komatsu and H. Takata : Computer Algorithms of Formal Linearization and Estimation for Time-Variant Nonlinear Systems via Chebyshev Expansion, Journal of Signal Processing, **7-1**, 23/29 (2003)
- 8) 森 正武 : 数値解析, 共立出版 (2002)
- 9) 赤坂 隆 : 数値計算, コロナ社 (1976)
- 10) 一松 信 : 特殊関数入門, 森北出版 (2002)
- 11) G. W. Johnson : A deterministic theory of estimation and control, IEEE Trans. on Automatic Control, **380/384**, August (1969)

[著者紹介]

小松 一男

1985年九州工業大学工学部情報工学科卒業. 同年トヨタ自動車(株)入社. 87年熊本電波工業高等専門学校情報工学科助手, 91年同講師, 96年同助教授となり現在に至る. 非線形システムの形式的線形化とその応用に関する研究に従事. 博士(工学). 電気学会, システム制御情報学会の会員.

高田 等 (正会員)

1973年九州大学大学院工学研究科電気工学専攻博士課程修了. 同年同大学工学部助手, 74年九州工業大学工学部情報工学科講師, 75年同助教授, 94年鹿児島大学工学部電気電子工学科教授となり現在に至る. 非線形システムの制御, 線形化, 同定, 応用などの研究に従事. 工学博士. 電気学会, システム制御情報学会, IEEEなどの会員.