主緩和双対法を用いた双線形行列固有値最適化†

—探索領域限定と部分問題低減による効率の改善—

川西通裕*・大元伸一**

Bilinear Matrix Eigenvalue Optimization Using Primal Relaxed Dual Method

—Computational Efficiency Improvement Based on Search Region Bound and Subproblem Reduction—

Michihiro KAWANISHI* and Shinichi OMOTO**

In this paper, Primal Relaxed Dual (PRD) method for Bilinear Matrix Inequalities (BMI) is studied. Firstly, the properties of BMI PRD method between search region and computational efficiency is analytically studied. Based on these properties, new BMI PRD method using search region bounding operation with Lagrangian function and lower bound is proposed. Secondly, in order to reduce the number of subproblems, subproblems reduction method is introduced. The effectiveness of the proposed methods is evaluated by the numerical experiments.

Key Words: Bilinear Matrix Inequality, Primal Relaxed Dual method, search region bound

1. はじめに

制御における解析・設計問題が線形行列不等式 (LMI: Linear Matrix Inequalities) で完全に記述できる場合、内点法により効率よく解を求めることができる。しかし、出力フィードバック最適制御、ゲインスケジューリング、低次元補償器設計、ロバスト制御性能、同時安定化などのいくつかの重要な問題は、LMI の形式で完全に記述することができず、現在その求解方法について研究が行なわれている。これらの問題の多くは BMI によって完全な記述が可能となるため、本研究では BMI の統一的な数値解法について考える^{1), 2)}。

BMI の解の存在を決定することは NP 困難な問題となるため、実用的な近似解を求めるための研究がなされてきた。しかし、十分な精度、満足な計算量で実用に耐える近似解法アルゴリズムはいまだ得られていない。本研究では、BMI 求解に対して、有限時間内の収束性が保証される主緩和双対法 (PRD 法: Primal Relaxed Dual Method) に基づくアルゴリズムについて考える^{3)~7)}。

PRD 法による BMI の数値解法では、双線形となっている特に一方の変数に対して、その探索領域の大きさが全体の計

算負荷に大きく影響する傾向がある。本研究では、まずこのような PRD 法による BMI 求解アルゴリズムの特性を、厳密解の下界値制約として用いられるラグランジュ関数の性質から、解析的に明らかにする。つぎに、この解析結果に基づき、上界値を併用して BMI 最適化問題の変数領域を限定し、ラグランジュ関数による下界値の悪化を低減する手法を提案して、変数領域の増加に伴う保守性の増大を抑制する。

また、PRD 法による解法では、主問題における最適化変数の数に対して、下界値を求める際の子問題の数が指数オーダーで増加するため、この変数の数が増加した場合には、効率の悪化が顕著になる傾向を有している。本研究では、ラグランジュ関数による下界値制約の有効条件を利用し、子問題が派生する際の条件分岐を回避して、BMI の下界値計算における部分問題数の増加を抑制する手法についても提案する。最後に、提案するアルゴリズムについて数値実験を行ない、アルゴリズムの働きについて示すとともに、提案手法の有効性について検証する。

2. 主緩和双対法による BMI 最適化

ここでは準備として、主緩和双対法を用いた BMI 最適化法について概略をまとめる。

2.1 双線形行列固有値最適化問題

与えられた対称行列 $F_{ij} = F_{ij}^T \in \mathcal{R}^{m \times m}$, $i \in \{0, \dots, n_x\}$, $j \in \{0, \dots, n_y\}$ に対して、双線形行列値関数 $F: \mathcal{R}^{n_x} \times \mathcal{R}^{n_y} \rightarrow \mathcal{R}^{m \times m}$ をつぎのように定義する。

$$F(x, y) := F_{00} + \sum_{i=1}^{n_x} x_i F_{i0} + \sum_{j=1}^{n_y} y_j F_{0j} + \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} x_i y_j F_{ij} \quad (1)$$

† 第 28 回制御理論シンポジウムで一部発表 (1999・5)

* 神戸大学工学部 神戸市灘区六甲台町 1-1

** 伊藤忠商事 (株) 東京都港区北青山 2 丁目 5 番 1 号

* Faculty of Engineering, University of Kobe, Rokkodai-cho 1-1, Nada ward, Kobe city

** ITOCHU Corporation, Kita-Aoyama 2-5-1, Minato-ku, Tokyo

(Received September 17, 2003)

(Revised February 16, 2005)

また、変数 x, y の定義域 $x \in \mathcal{X}, y \in \mathcal{Y}$ をつぎのように定義する。

$$\mathcal{X} := [l_{x_1}, u_{x_1}] \times [l_{x_2}, u_{x_2}] \times \cdots \times [l_{x_{n_x}}, u_{x_{n_x}}]$$

$$\mathcal{Y} := [l_{y_1}, u_{y_1}] \times [l_{y_2}, u_{y_2}] \times \cdots \times [l_{y_{n_y}}, u_{y_{n_y}}]$$

ただし、 $-\infty < l_{x_i} < u_{x_i} < \infty$, $-\infty < l_{y_i} < u_{y_i} < \infty$ とする。このとき BMI 固有値最適化問題は以下のように定義される。

$$(B) \begin{cases} \min_{\lambda \in \mathcal{R}, x \in \mathcal{X}, y \in \mathcal{Y}} \lambda \\ \text{s.t. } F(x, y) + \lambda I \geq 0 \end{cases} \quad (2)$$

この最適化問題の最適解に対して λ が負になった場合、 $F(x, y) > 0$ が成立することがわかる。ここで、変数 x の変数領域については制約条件として記述することとし、 $F_{\mathcal{X}}(x) := \text{diag}(x_1 - l_{x_1}, u_{x_1} - x_1, \dots, x_{n_x} - l_{x_{n_x}}, u_{x_{n_x}} - x_{n_x})$ を定義して、以下の最適化問題を考える。

$$(B') \begin{cases} \min_{\lambda, x, y \in \mathcal{Y}} \lambda \\ \text{s.t. } \text{diag}(F(x, y) + \lambda I, F_{\mathcal{X}}(x)) =: \tilde{F}(x, y, \lambda) \geq 0 \end{cases}$$

ただし、 $\lambda \in \mathcal{R}$, $x \in \mathcal{R}^{n_x}$ のように探索空間が実数全域となる場合には領域表示を省略し、 diag は各要素を対角に並べたブロック対角行列を表わしている。

2.2 主問題

主緩和と双対法を用いた BMI 固有値問題の解法では、まず片側の変数 y を固定して変数 x に対する LMI 問題を主問題として解き、このときの値を上界値として用いる。

主問題は主緩和と双対法アルゴリズムの中で繰り返し解かれるため、この繰り返し回数を $k \in \mathcal{Z}^+$ 、ただし $\mathcal{Z}^+$ は正の整数とし、 k 回目の反復において固定する y の値を $y^{(k)} \in \mathcal{Y}$ と表記する。このとき、主問題は

$$(P) \begin{cases} \min_{\lambda, x} \lambda \\ \text{s.t. } \tilde{F}(x, y^{(k)}, \lambda) \geq 0, y^{(k)} \in \mathcal{Y}, k \in \mathcal{Z}^+ \end{cases} \quad (3)$$

と表わされる。元の最適化問題 (B) と比較すると、上記主問題 (P) は、変数 y の自由度がなくなるため、元の BMI 問題 (B) の上界値を与えることがわかる。また、上記の主問題は x と λ を変数とする LMI 最適化問題であるから、内点法に基づくアルゴリズムによって効率良く解くことができる。

2.3 緩和と双対問題

k 回目の反復における主問題 (P) のラグランジュ乗数を $Z^{(k)} = Z^{(k)T} \geq 0$ とする。ただし、 $Z^{(k)}$ はつぎの構造

$$Z^{(k)} =: \text{diag}(\tilde{Z}^{(k)}, Z_{\mathcal{X}}^{(k)}) \in \mathcal{R}^{(m+2n_x) \times (m+2n_x)} \quad (4)$$

$$\tilde{Z}^{(k)} \in \mathcal{R}^{m \times m} \quad (5)$$

$$Z_{\mathcal{X}}^{(k)} =: \text{diag}(z_1^{(k)}, z_2^{(k)}, \dots, z_{2n_x}^{(k)}) \quad (6)$$

を有するものとし、また T は転置を表わすものとする。このとき、問題 (P) のラグランジュ関数は

$$L(x, y, Z^{(k)}) := \lambda - \text{Tr}\{\tilde{F}(x, y, \lambda) Z^{(k)}\} \quad (7)$$

$$= -\text{Tr}\{\text{diag}(F(x, y), F_{\mathcal{X}}(x)) Z^{(k)}\} \quad (8)$$

となる。ただし、 Tr は行列のトレースを表わすものとし、Kuhn-Tucker 条件 $\frac{\partial}{\partial \lambda} L(x, y^{(k)}, Z^{(k)}) = 0$ を用いた。問題が強双対定理を満たすため、下界値を与える最適化問題として、つぎの緩和と双対問題 (RD) を得ることができる。

$$(RD) \begin{cases} \min_{y \in \mathcal{Y}, \mu} \mu \\ \text{s.t. } \mu \geq \min_{x \in \mathcal{X}} L(x, y, Z^{(k)}), k \in \mathcal{Z}^+ \end{cases}$$

この緩和問題 (RD) はアウターインナー問題となっており、 μ の最適化を行なうアウター問題に対し、その制約式の中にインナー問題として $L(\cdot)$ の最適化が含まれている。この形式の最適化問題を解くために、従来インナー問題を部分問題に分割して解くという手法が用いられてきた。

現在の反復回数を K とし、集合 $\mathcal{N}(K) := \{1, 2, \dots, K\}$ を定義して、過去の繰り返しを $k \in \mathcal{N}(K-1)$ として参照する。また集合 $\mathcal{I}(k)$ を

$$\mathcal{I}(k) := \left\{ i \mid \frac{\partial}{\partial x_i} L(x, y, Z^{(k)}) \neq 0 \right\} \quad (9)$$

とし、集合の要素数は $|\mathcal{I}(k)|$ と表記する。超立方体領域 $\mathcal{X}$ の頂点の集合を $\{v_j; j = 1, \dots, 2^{n_x}\} =: \text{ve}\{\mathcal{X}\}$ と表わす。この v_j はたとえば $[u_{x_1} \ l_{x_2} \ u_{x_3} \ \cdots \ u_{x_{n_x}}]$ のような、各変数 x_i の上下限値を組み合わせたベクトルとなる。 v_{ji} として、ベクトル v_j の i 番目の要素 (変数 x_i の上下限値) を参照する。このとき、集合 $\mathcal{J}(k, K)$ を $K \geq 2$, $k \in \mathcal{N}(K-1)$ に対して

$$\mathcal{J}(k, K) := \left\{ j \mid \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_i} L(x, y^{(K)}, Z^{(k)}) \leq 0, \text{ if } v_{ji} = u_{x_i} \\ \frac{\partial}{\partial x_i} L(x, y^{(K)}, Z^{(k)}) \geq 0, \text{ if } v_{ji} = l_{x_i} \\ i \in \mathcal{I}(k) \end{cases} \right\}$$

と定義する。なお $K = 1$ のときは空集合 $\mathcal{J}(\cdot, 1) := \emptyset$ とする。BMI 最適化の場合、一対の k と K に対して、集合 $\mathcal{J}(k, K)$ の元は唯一となる。

このとき、緩和と双対問題 (RD) を部分問題に分割して解く問題 (RD') は、以下のようになる。

$$(RD') \begin{cases} \min_{\ell=1, 2, \dots, 2^{n_x}} \nu(v_{\ell}, K) \\ \nu(v_{\ell}, K) := \min_{y \in \mathcal{Y}, \mu} \mu \\ \text{s.t. } \mu \geq L(v_j, y, Z^{(k)}) \\ \frac{\partial}{\partial x_i} L(x, y, Z^{(k)}) \leq 0 \text{ if } v_{ji} = u_{x_i} \\ \frac{\partial}{\partial x_i} L(x, y, Z^{(k)}) \geq 0 \text{ if } v_{ji} = l_{x_i} \\ i \in \mathcal{I}(k), j \in \mathcal{J}(k, K), k \in \mathcal{N}(K-1) \\ \mu \geq L(v_{\ell}, y, Z^{(K)}) \\ \frac{\partial}{\partial x_i} L(x, y, Z^{(K)}) \leq 0 \text{ if } v_{\ell i} = u_{x_i} \\ \frac{\partial}{\partial x_i} L(x, y, Z^{(K)}) \geq 0 \text{ if } v_{\ell i} = l_{x_i} \\ i \in \mathcal{I}(K) \end{cases}$$

主緩和と双対法による大域的最適化アルゴリズムは、まず適当

な $\mathbf{y}^{(1)}$ に対して問題 (P) を解き、このときのラグランジュ乗数を用いて線形計画法により問題 (RD') を解く。そして、つぎにこの最適値をとる点をつぎの固定点として選ぶという手順で問題 (P) と (RD') を交互に解き、上界値と下界値を収束させ、解を求めるという方法である。

3. 最適化変数領域とアルゴリズムの効率

PRD 法による BMI の大域的最適化アルゴリズムでは、変数 $\mathbf{x}$ と変数 $\mathbf{y}$ に対する取り扱いが根本的に異なるため、どちらの変数を固定して主問題 (P) をつくるかによって、元の BMI 最適化問題 (B) が同じ場合でも、計算効率が変化する可能性がある。ここでは、このような PRD 法の性質について解析的に考察し、PRD 法のアルゴリズムが持つ性質について明らかにする。

以後、変数領域 $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ について一般性を失うことなく

$$\mathcal{X} = [-r_x, r_x] \times \cdots \times [-r_x, r_x]$$

$$\mathcal{Y} = [-r_y, r_y] \times \cdots \times [-r_y, r_y]$$

ただし $r_x > 0, r_y > 0$ と仮定する。このとき、PRD 法において変数領域と問題 (RD') の下界値を与える $L(\mathbf{v}_\ell, \mathbf{y}, Z^{(k)})$ や $L(\mathbf{v}_\ell, \mathbf{y}, Z^{(K)})$ の制約条件の精度に関して、以下の補題および定理が成立する。

[補題 1] 最適化変数 $\mathbf{x}$ の探索領域 $\mathcal{X}$ の大きさを定義する定数 r_x が増加するとき、下界値制約を与えるラグランジュ関数 $L(\mathbf{v}_\ell, \mathbf{y}, Z^{(k)})$ は漸近的に r_x の線形関数となる。

(証明) 下界値を与える問題 (RD') において、最適化変数 μ の下界の制限を与えている $L(\mathbf{v}_\ell, \mathbf{y}, Z^{(k)})$ 、ただし $\ell \in \{1, 2, \dots, 2^{n_x}\}$, $k \in \mathcal{N}(K)$ について考える。ベクトル $\mathbf{v}_\ell$ の i 番目の要素を $v_{\ell i}$ と表記することとする。sgn 関数を

$$\text{sgn}(v_{\ell i}) = \begin{cases} +1, & \text{if } v_{\ell i} > 0 \\ 0, & \text{if } v_{\ell i} = 0 \\ -1, & \text{if } v_{\ell i} < 0 \end{cases} \quad (10)$$

と定義すると、 $v_{\ell i} = \text{sgn}(v_{\ell i})r_x$ と表現できるため、ラグランジュ関数制約式は

$$\begin{aligned} & L(\mathbf{v}_\ell, \mathbf{y}, Z^{(k)}) \\ &= -\text{Tr}\{\text{diag}(F(\mathbf{v}_\ell, \mathbf{y}), F_X(\mathbf{v}_\ell)) Z^{(k)}\} \\ &= -\text{Tr}\{F_X(\mathbf{v}_\ell) Z_X^{(k)}\} - \text{Tr}\{F(\mathbf{v}_\ell, \mathbf{y}) \tilde{Z}^{(k)}\} \\ &= -\text{Tr}\{F_X(\mathbf{v}_\ell) Z_X^{(k)}\} - \text{Tr}\left[\left\{F_{00} + \sum_{i=1}^{n_x} F_{i0} v_{\ell i}\right.\right. \\ &\quad \left.\left.+ \sum_{j=1}^{n_y} \left(F_{0j} + \sum_{i=1}^{n_x} v_{\ell i} F_{i0}\right) \mathbf{y}_j\right\} \tilde{Z}^{(k)}\right] \\ &= -\text{Tr}\{\tilde{F}_X(\mathbf{v}_\ell) Z_X^{(k)}\} r_x - \text{Tr}\left[\left\{F_{00}/r_x + \sum_{i=1}^{n_x} \text{sgn}(v_{\ell i}) F_{i0}\right.\right. \\ &\quad \left.\left.+ \sum_{j=1}^{n_y} \left(F_{0j}/r_x + \sum_{i=1}^{n_x} \text{sgn}(v_{\ell i}) F_{i0}\right) \mathbf{y}_j\right\} \tilde{Z}^{(k)}\right] \cdot r_x \end{aligned}$$

$$=: \tilde{L}(\mathbf{v}_\ell, \mathbf{y}, Z^{(k)}) r_x \quad (11)$$

となる。ここで $\tilde{F}_X(\mathbf{v}_\ell)$ は $v_{\ell i}$ の値によって対角要素に 0, 2, または -2 の値をとる対角行列である。以上より、 r_x の増加により $F_{0j}/r_x \approx \mathbf{O} \in \mathcal{R}^{m \times m}$, $j \in \{0, 1, \dots, n_y\}$ 、ただし $\mathbf{O}$ は零行列、と漸近するため、ラグランジュ関数は漸近的に r_x の線形関数となる。 ■

以上の補題に基づき、PRD 法による BMI 最適化アルゴリズムの変数領域と計算効率の関係に関する以下の定理を得る。

《定理 1》 最適化変数 $\mathbf{x}$ の探索領域 $\mathcal{X}$ の大きさを定義する定数 r_x が増加するとき、下界値を与える問題 (RD') の解は、漸近的に、 r_x の増加率に比例して変化する。特に問題 (B) が可解である場合、下界値は漸近的に r_x の増加率に比例して悪化する。

(証明) r_x が F_{0j} , $j \in \{0, 1, \dots, n_y\}$ に対して十分に大きい場合、補題 1 によりラグランジュ関数は $\tilde{L}(\mathbf{v}_\ell, \mathbf{y}, Z^{(k)}) r_x$ と表記される。よって、問題 (RD') の定義より、下界値を与える $\nu(\mathbf{v}_\ell, K)$ は

$$\begin{cases} \nu(\mathbf{v}_\ell, K) := \min_{\mathbf{y} \in \mathcal{Y}, \mu} \mu \\ \text{s.t. } \mu \geq \tilde{L}(\mathbf{v}_j, \mathbf{y}, Z^{(k)}) r_x \\ j \in \mathcal{J}(k, K), k \in \mathcal{N}(K-1) \\ \mu \geq \tilde{L}(\mathbf{v}_\ell, \mathbf{y}, Z^{(K)}) r_x \end{cases}$$

と表わされる。ただし変数 $\mathbf{y}$ に関する制約はもとの問題 (RD') と同じため、省略して表記した。 $\nu(\mathbf{v}_\ell, K)$ を求めるためのラグランジュ関数制約式のすべてが、一様に r_x に比例して変動することになるため、問題 (RD') の最適値も r_x の増加率に比例することがわかる。

また、問題 (B) が可解である場合、負値となる上界値の λ が存在するため、下界値の ν は必ず負値となり、 r_x の増加率に比例して悪化することがわかる。以上より題意が示された。 ■

(注意 1) 各反復における下界値の改善率 (増加率) が一定の場合、上下界値の差が収束するために必要となる反復回数が r_x の増加率に比例して増加することになる。さらに、問題 (RD') の制約条件の数は、反復回数に比例して増加するため、計算負荷は r_x の増加率に対して 2 乗のオーダーで増加する。

(注意 2) 変数領域 $\mathcal{Y}$ の大きさを定義する定数 r_y が増加する場合においても、問題 (RD') における下界値は悪化するが、各反復において一様に悪化するわけではなく、ラグランジュ関数 $L(\mathbf{v}_\ell, \mathbf{y}, Z^{(k)})$ には変化がないため、反復を繰り返すことで効率よく解探索を行なうことができる。

最適化変数の数 n_x, n_y や行列の大きさ m についてではなく、探索空間の大きさ自体に関してこのように一様な計算負荷の増大が認められることは、大域的な探索アルゴリズムとしてはウィークポイントである。よって次章では、PRD 法

による BMI 最適化アルゴリズムにおいて、変数領域 $\mathcal{X}$ の増加に対する計算負荷の増大を抑える対処方法について考察し、従来の弱点を補った新たな計算アルゴリズムを提案する。

4. 領域限定 PRD 法

ここでは、3. におけるアルゴリズムの特性を踏まえ、PRD 法を用いたより効率のよい BMI 大域的最適化アルゴリズムについて考える。

ここで提案する領域限定 PRD 法は、従来の PRD 法の上下界値の情報を用いて上界値および下界値の情報から領域限定操作を行ない、計算効率を改善するアルゴリズムである。

4.1 領域限定

K 回目の反復における主問題 (P) の最適解を $\lambda^{*(K)}$ 、緩和問題 (RD') の最適解を $\nu^{*(K)}$ とする。上界値が更新され、 $\lambda^{*(K)} < \lambda^{*(K-1)}$ となった場合について考える。

ラグランジュ乗数 $Z^{(k)}$ による下界値制約は、 k 回目の主問題を解いた点 $y^{(k)}$ において最大値 $\lambda^{*(k)}$ をとるため、 K 回目の反復によって上界値が更新された場合、 $k \in \mathcal{N}(K-1)$ のすべての下界値制約について、上界値 $\lambda^{*(K)}$ より大きくなる領域が存在する。このように下界値が上界値より大きくなる領域については、最適解が存在する可能性はないため、探索する変数領域から除外することができる。つまり、以下の領域

$$U^{(K)} := \bigcup_{k=1}^{K-1} \bigcup_{\ell=1}^{2^n} U_{\ell}^{(K)}(k, \lambda^{*(K)}) \quad (12)$$

$$U_{\ell}^{(K)}(k, \lambda^{*(K)}) := \left\{ y \left| \begin{array}{l} L(v_{\ell}, y, Z^{(k)}) \geq \lambda^{*(K)}, \\ \frac{\partial}{\partial x_i} L(x, y, Z^{(k)}) \leq 0 \text{ if } v_{\ell i} = u_{x_i} \\ \frac{\partial}{\partial x_i} L(x, y, Z^{(k)}) \geq 0 \text{ if } v_{\ell i} = l_{x_i} \end{array} \right. \right\} \quad (13)$$

については探索領域から除くことが可能であり、 $\mathcal{Y} \setminus U^K$ を新たな変数 y の探索領域とすることができる。

4.2 アルゴリズム

4.1 では従来の PRD 法のアルゴリズムにおいて、領域 $\mathcal{Y}$ が限定されうことを述べた。しかし、3. で考察したように PRD 法による BMI 大域的最適化問題で、計算負荷の多くの割合を占める下界値の最適化問題 (RD') においては、変数領域 $\mathcal{Y}$ よりも変数領域 $\mathcal{X}$ が大きく影響する。

ここでは、このような PRD 法の特性を考慮して、ラグランジュ関数の精度劣化による計算負荷の増大を軽減する領域限定を考慮した BMI 大域的最適化アルゴリズムを提案する。

主問題 (P) において固定する変数を $x^{(k)}$ として変数 y に関する最適化を行なう主問題

$$(P_y) \left\{ \begin{array}{l} \min_{\lambda, y} \lambda \\ \text{s.t. } \tilde{F}(x^{(k)}, y, \lambda) \geq 0, x^{(k)} \in \mathcal{X}, k \in \mathcal{Z}^+ \end{array} \right. \quad (14)$$

を定義する。主問題 (P) は変数 x に関する最適化であることを明記して問題 (P_x) と表記変更する。そして k 回目の問題 (P_x) および問題 (P_y) の最適解をそれぞれ $\lambda_x^{*(k)}$, $\lambda_y^{*(k)}$ とし、また $\lambda^{**}(k) := \min(\lambda_x^{*(k)}, \lambda_y^{*(k)})$ と表記する。同様に K 回目の反復における問題 (RD') の最適解は $\nu^{*(K)}$ と表記する。

また、(12) 式で定義した上界値 $\lambda^{*(K)}$ による領域 $\mathcal{Y}$ の削除可能領域 $U^{(K)}$ を、上界値 $\lambda^{**}(K)$ からの導出とし、表記を $U_y^{(K)}$ と変更する。領域 $\mathcal{X}$ の限定についても、主問題 (P_y) によるラグランジュ関数と上界値 $\lambda^{**}(K)$ から求める削除可能領域を、 $U_x^{(K)}$ と表記する。また、終了条件となる上下界値の許容誤差を ε とする。このとき、提案する領域限定を用いた PRD 法による BMI 大域的最適化アルゴリズムは、以下のように記述される。

[BMI PRD Optimization with region bounding]

1. Fix $\varepsilon > 0$. Set $y^{(1)}$ at the center of $\mathcal{Y}$.
 Compute $\lambda_x^{*(1)}$ on problem (P_x) .
 Select $x^{(1)}$. (See [Remark 4].)
 Compute $\lambda_y^{*(1)}$ on problem (P_y) .
 $\lambda^{**}(1) = \min(\lambda_x^{*(1)}, \lambda_y^{*(1)})$.
 Compute $\nu^{*(1)}$ on problem (RD').
 $K = 2$.
2. Repeat{
 - R1. Set $y^{(K)} = \arg \nu^{*(K-1)}$.
 - R2. Compute $\lambda_x^{*(K)}$ on problem (P_x) .
 - R3. Select $x^{(K)}$. (See [Remark 4].)
 - R4. Compute $\lambda_y^{*(K)}$ on problem (P_y) .
 - R5. $\lambda^{**}(K) = \min(\lambda_x^{*(K)}, \lambda_y^{*(K)}, \lambda^{**}(K-1))$.
 - R6. If $\lambda^{**}(K) + \delta < \lambda^{**}(K-1)$ {
 $\mathcal{Y} := \mathcal{Y} \setminus U_y^{(K)}$.
 $\mathcal{X} := \mathcal{X} \setminus U_x^{(K)}$.
 }, $\delta > 0$
 - R7. Compute $\nu^{*(K)}$ on problem (RD').
 - R8. $K = K + 1$
 }until $\lambda^{**}(K) - \nu^{*(K)} < \varepsilon$

(注意 3) R2. のラグランジュ乗数によって領域 $U_y^{(K)}$, R4. のラグランジュ乗数によって領域 $U_x^{(K)}$ が求められる。

(注意 4) R3. の $x^{(K)}$ の選択を、D-K 反復法的に $x^{(K)} := \arg \lambda_x^{*(K)}$ とする場合、変数の数が増加するにつれて削除可能領域の連結性が悪化するため、限定操作の効率が低下する。よって、 $x^{(K)} \in \text{ve}\{\mathcal{X}\}$ のような $x^{(K)}$ の選択と組み合わせることで、より効率よく領域限定を行なうことが可能となる。ただし、 $\text{ve}\{\cdot\}$ は領域端点の集合を表わすものとする。

(注意 5) R6. の領域限定において、 $\mathcal{Y}$ の限定操作を先行させていることで、R7. の問題 (RD') への影響がより大きい $\mathcal{X}$ の限定効率を向上させている

(注意 6) R6. の δ は判別精度の調整パラメータである。

(注意7) R7.の下界値として, 下界問題(RD')式の $\nu^{*(K)}$ を用いる代わりに文献5)で提案されている手法による下界値 $\nu_{act}^{*(K)}$ を用いることも可能である.

4.3 収束性

前節で提案したアルゴリズムの収束性については以下の定理が成り立つ.

《定理2》 領域限定 PRD 法による BMI 最適化アルゴリズムは, 有限時間内に収束する.

(証明) 初期の変数領域をそれぞれ, $\mathcal{X}_0, \mathcal{Y}_0$ とし, アルゴリズムの反復回数とは独立に限定操作 R6. を数え, j 回目の限定操作 R6. によって更新された変数領域をそれぞれ $\mathcal{X}_j, \mathcal{Y}_j, j = 1, 2, \dots$ とする. 領域限定操作を行わない場合, $\mathcal{X}_0, \mathcal{Y}_0$ に対する有限時間内の収束性は保証される⁴⁾.

今, 限定操作 R6. を含む領域限定 PRD 法のアルゴリズムが有限時間内に収束しないと仮定する. 限定操作 R6. の回数が有限の場合は限定操作が終わった後の領域に対してアルゴリズムの収束が保証されることになるため, 有限時間内に収束しないという仮定は限定操作 R6. が無限回行なわれることを意味する.

変数領域 $\mathbf{x} \in \mathcal{X}_j, \mathbf{y} \in \mathcal{Y}_j, j \in \{0, 1, 2, \dots\}$ における(2)式問題(B)の解を $\lambda_B(\mathcal{X}_j, \mathcal{Y}_j)$ とする. 領域の包含関係 $\mathcal{X}_0 \times \mathcal{Y}_0 \supset \mathcal{X}_1 \times \mathcal{Y}_1 \supset \dots \supset \mathcal{X}_j \times \mathcal{Y}_j \supset \dots$ から一般に

$$\lambda_B(\mathcal{X}_0, \mathcal{Y}_0) \leq \lambda_B(\mathcal{X}_1, \mathcal{Y}_1) \leq \dots \leq \lambda_B(\mathcal{X}_j, \mathcal{Y}_j) \leq \dots \quad (15)$$

が成り立つが, 限定操作の(12), (13)式によって削除されるステップ R6. の領域は下界値がその時点の上界値以上になる領域であるため, $\lambda_B(\mathcal{X}_0, \mathcal{Y}_0)$ が削除されることはなく, (15)式においては等号が成り立つ. よって, 上界と下界については

$$\nu^{*(K)} < \lambda_B(\mathcal{X}_j, \mathcal{Y}_j) < \lambda^{**(\bar{K})}, j \in \{0, 1, 2, \dots\}, \forall K \quad (16)$$

が成立する. なお, 固定領域 $\mathcal{X}_0 \times \mathcal{Y}_0$ に対しては有限時間内に $\lambda^{**(\bar{K})} - \nu^{*(K)} < \varepsilon$ となることが保証されていることから, 上界については任意の $\varepsilon' > 0$ に対してある $K_0 > 0$ が存在し

$$\lambda^{**(\bar{K})} - \lambda_B(\mathcal{X}_j, \mathcal{Y}_j) < \varepsilon', K \geq K_0, j = 0 \quad (17)$$

が成立する.

また同様に, 削除領域 $\mathcal{U}_j^{(\bar{K})}$ の下界値が上界値 $\lambda^{**(\bar{K})}$ 以上であることから, アルゴリズムのステップ R1, R7 において問題(RD')の最小下界値をとる点列 $\mathbf{y}^{(K)}$ (ただし $K > \bar{K}$) は, 削除される領域 $\mathcal{U}_j^{(\bar{K})}$ には存在しない. そして, 限定前の領域で最適点 $\bar{\mathbf{y}}$ へ収束するいかなる点列 $\mathbf{y}^{(K)}$ についても, 限定後の固定領域で必ず最適点 $\bar{\mathbf{y}}$ に収束点列 $\mathbf{y}^{(K)}$ が存在する. なお, 最小下界値の点列 $\mathbf{y}^{(K)}$ の収束先である $\bar{\mathbf{y}}$ においては, 上界値を与える主問題の最適解 λ^{**} は BMI の解 λ_B に一致し, (17)式左辺のギャップ(上界値と真値の差)が0になる⁴⁾.

領域限定操作 R6 が行なわれない場合, 点列 $\mathbf{y}^{(K)}$ は固定領域内 $\mathcal{X}_j \times \mathcal{Y}_j$ において最適点 $\bar{\mathbf{y}}$ への収束に向かう. 領域限

定 R6 が行なわれる場合は $\bar{\mathbf{y}}$ への点列 $\mathbf{y}^{(K)}$ が更新され, 上界値については実行条件 $\lambda^{**(\bar{K})} + \delta > \lambda^{**(\bar{K}+1)}$ より, (17)式左辺のギャップは減少する. 領域限定操作の各回の領域において常に最適点 $\bar{\mathbf{y}}$ へ収束する点列 $\mathbf{y}^{(K)}$ の存在が保証されるため, $\mathbf{y}^{(K)}$ に対応する上界値 $\lambda^{**(\bar{K})}$ は途中で停留することなく最適値 $\lambda_B(\mathcal{X}_0, \mathcal{Y}_0)$ に漸近する. よって, (17)式は領域限定が行なわれる $j \in \{1, 2, \dots\}$ の場合にも成立する. なお, 変数 $\mathbf{x}$ の削除領域 $\mathcal{U}_x^{(\bar{K})}$ については, 削除領域の下界値が上界値 $\lambda^{**(\bar{K})}$ 以上であること, および主問題(P)が凸であることから, 上界値が $\lambda^{**(\bar{K})}$ より小さい $\bar{K}$ 回目以後の上界値計算 $\lambda^{**(\bar{K})}$ (ただし $K > \bar{K}$) に影響しないことは明らかである. 以上より, $\lambda^{**(\bar{K})} \geq \lambda^{**(\bar{K}+1)} > \lambda_B(\mathcal{X}_j, \mathcal{Y}_j)$ の関係から, $j \in \{0, 1, 2, \dots\}$ を含む(17)式は

$$\lambda^{**(\bar{K})} - \lambda^{**(\bar{K}+1)} < \varepsilon', K \geq K_0 \quad (18)$$

を意味しており, $\varepsilon' < \delta$ となった時点で限定操作は終了する. よって, 限定操作が有限回となることが保証されるため, 仮定は矛盾しており, 題意が示される. ■

5. 緩和双対問題の計算負荷低減

PRD 法では, 下界値を求める緩和双対問題(RD')を解くために, 部分問題として $\nu(\mathbf{v}_\ell, K)$ を LP (線形計画問題) を解いて求める必要があり, 問題(RD')の解を得るためには 2^{n_x} または $2^{|I(K)|}$ の部分問題を解く必要がある. このことは変数 $\mathbf{x}$ の数が増加した場合に, 著しく計算効率が悪化することを示唆しており, ここでは, Visweswaran, Floudas らによって提案されている手法⁹⁾をもとに, PRD 法を用いた BMI 大域的最適化においてこの部分問題数が増加することによる計算負荷の増大を低減する手法を提案する.

問題(RD)のインナー問題において

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} L(\mathbf{x}, \mathbf{y}, Z^{(k)}) \\ &= \min_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \left\{ L(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{y}, Z^{(k)}) + \sum_{i=1}^{n_x} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i} L(\mathbf{x}, \mathbf{y}, Z^{(k)}) (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_i^{(k)}) \right\} \\ &= L(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{y}, Z^{(k)}) + \sum_{i=1}^{n_x} \min_{\mathbf{x}_i} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i} L(\mathbf{x}, \mathbf{y}, Z^{(k)}) (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_i^{(k)}) \end{aligned}$$

が成立する. 第二項の $\mathbf{x}_i$ による最小化は, $\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i} L(\mathbf{x}, \mathbf{y}, Z^{(k)})$ の符号によって定まり, 符号が正の場合には $\mathbf{x}_i = l_{x_i}$, 負の場合には $\mathbf{x}_i = u_{x_i}$ で達成されることになる. 各変数 $\mathbf{x}_i$ に対してこの場合分けが存在するため, 符号が0とならない場合, この条件分岐により変数の数 n_x に対して指数オーダー 2^{n_x} の部分問題が派生する. しかし, $\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i} L(\mathbf{x}, \mathbf{y}, Z^{(k)})$ の符号が一定値となることがあらかじめ確定する場合には, 条件分岐を考慮する必要がないため, 部分問題の数を削減することができる.

K 回目の値 $\mathbf{y}^{(K)}$ によって定まる 領域 $\mathcal{Y}(K)$ を

$$\tilde{\mathcal{Y}}(K) := \left\{ y \mid \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_i} L(x, y, Z^{(k)}) \leq 0 & \text{if } v_{ji} = u_{x_i} \\ \frac{\partial}{\partial x_i} L(x, y, Z^{(k)}) \geq 0 & \text{if } v_{ji} = l_{x_i} \\ i \in \mathcal{I}(k), j \in \mathcal{J}(k, K), k \in \mathcal{N}(K-1) \end{cases} \right\}$$

と定義する. また領域 $\mathcal{H}_n(i, K)$, $\mathcal{H}_p(i, K)$ をそれぞれ

$$\mathcal{H}_n(i, K) := \left\{ y \mid \frac{\partial}{\partial x_i} L(x, y, Z^{(K)}) \leq 0 \right\}$$

$$\mathcal{H}_p(i, K) := \left\{ y \mid \frac{\partial}{\partial x_i} L(x, y, Z^{(K)}) \geq 0 \right\}$$

と定義する. このとき, もし $\frac{\partial}{\partial x_i} L(x, y, Z^{(K)})$ の符号が正と定まる場合には, $\tilde{\mathcal{Y}}(K) \cap \mathcal{Y} \cap \mathcal{H}_n(i, K) = \emptyset$ となり, 負となる場合には $\tilde{\mathcal{Y}}(K) \cap \mathcal{Y} \cap \mathcal{H}_p(i, K) = \emptyset$ となる. $\tilde{\mathcal{Y}}(K)$, $\mathcal{Y}$, $\mathcal{H}_n(i, K)$ の各領域は y の線形制約式で規定されているため, この条件は線形計画問題を解き, すべての制約を満足する許容解がないことで判定できる. 集合 $\tilde{\mathcal{I}}(K)$ を

$$\tilde{\mathcal{I}}(K) := \left\{ i \mid \begin{cases} \tilde{\mathcal{Y}}(K) \cap \mathcal{Y} \cap \mathcal{H}_n(i, K) \neq \emptyset \\ \tilde{\mathcal{Y}}(K) \cap \mathcal{Y} \cap \mathcal{H}_p(i, K) \neq \emptyset \\ i \in \mathcal{I}(K) \end{cases} \right\}$$

と定義する. また, 変数領域 $\mathcal{X}$ の頂点集合 $\{v_\ell; \ell = 1, \dots, 2^{n_x}\}$ において, $\tilde{\mathcal{Y}}(K) \cap \mathcal{Y} \cap \mathcal{H}_n(i, K) = \emptyset$ の場合は $v_{\ell i} = l_{x_i}$, また $\tilde{\mathcal{Y}}(K) \cap \mathcal{Y} \cap \mathcal{H}_p(i, K) = \emptyset$ の場合は $v_{\ell i} = u_{x_i}$ と固定した部分集合 $\{\tilde{v}_\ell^{(K)}; \ell = 1, \dots, 2^{|\tilde{\mathcal{I}}(K)|}\}$ を定義する. このとき, 問題 (RD') は

$$\min_{\ell=1, 2, \dots, 2^{|\tilde{\mathcal{I}}(K)|}} \nu(\tilde{v}_\ell^{(K)}, K) \quad (19)$$

で置き換えることが可能であり, この最適解は厳密に問題 (RD') と一致する. $|\tilde{\mathcal{I}}(K)|$ が $|\mathcal{I}(K)|$ よりも減少する場合, 指数オーダで部分問題の数が減少する. $\tilde{\mathcal{I}}(K)$ を求めるためには最大 $2n_x$ の線形計画問題を解けばよく多項式オーダの数値計算で済むため, 変数 x の数 n_x が増加する場合, 特に有効となる.

6. 数 値 例

ここでは, 数値例を用いて提案する領域限定を用いた PRD 法および部分問題低減法による BMI 大域的最適化アルゴリズムの働きを示すとともに, その有効性について検証する.

[数値例 1]

BMI 最適化問題 (B) 式において $F(x, y)$ が

$$F(x, y) := \begin{bmatrix} 10 & 0.5 & 2 \\ 0.5 & -4.5 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} + x \begin{bmatrix} -9 & -0.5 & 0 \\ -0.5 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 1.8 & 0.1 & 0.4 \\ 0.1 & -1.2 & 1 \\ 0.4 & 1 & 0 \end{bmatrix} + xy \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 5.5 & -3 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

と表わされる簡単な数値例¹⁰⁾を用いて, PRD 法下界値制約の性質や提案アルゴリズムを具体的に示す.

Fig. 1 に, 太実線で y に対する主問題の最適解曲線 (*が大域的最適解), 実線で $K=3$ を終了した時点のラグラン

Fig. 1 Bounding with upper bound and lower bound constraints at 3rd iteration

Fig. 2 Relationship between $\mathcal{X}$ and lower bound constraints

Fig. 3 Search region versus CPU time

ジュ関数による下界値制約を示す. このときの上界値は $y^{(2)}$ の主問題最適解 -0.416 である. Fig. 1 より下界値制約が上界値を越えている領域 $U_y^{(3)} = [-5, -2.10] \cup [-0.403, 0.502]$ が存在し, この部分には大域的最適解 $y = 1.42$ が存在せず, 探索領域 $\mathcal{Y}$ から除けることがわかる.

Fig. 2 に探索領域 $\mathcal{X}$ と下界制約の関係を示す. $\mathcal{X} \times \mathcal{Y} = [-2, 2] \times [-5, 5]$ に対して $K=3$ の反復を終えた時点での下界制約を実線, $\mathcal{X} \times \mathcal{Y} = [-20, 20] \times [-5, 5]$ に対して同じく $K=3$ の反復を終えた時点での下界制約を破線で示した. $\mathcal{X}$ の領域が増加すると, 下界値が悪化 (減少) しているのがわかる.

つぎに方法 1 として下界値 $\nu^{*(K)}$ を用いる方法, 方法 2 として文献 5) のアクティブな下界値制約のみを用いる

Table 1 Computational Efficiency in $R = 50$

	Method 1	Method 2	Proposed Method
CPU time[s]	3015	1283	22.0
FLOPS	6.47×10^8	3.54×10^7	9.70×10^5
Iteration	1398	1408	82

Fig. 4 Iteration number versus bounded search region

Fig. 5 Bounded region of x_1 and x_2

方法,そして領域限定を用いる提案法を用いて,数値実験を行なった結果を示す。なお,CPU時間は計算にPentium Pro 200MHzを用いた結果である。Fig. 3に,最適化領域 $\mathcal{X} \times \mathcal{Y} = [-R, R] \times [-R, R]$ として R を変化させ,終了条件を $\epsilon = 10^{-4}$ とした場合のCPU時間の変化を示す。特に $R = 50$ の場合について,Table 1にCPU時間,FLOPS(浮動小数点演算回数),反復回数の比較を示す。提案法は変数領域の増加に伴う計算負荷の増加量が少なく抑えられていることが確認できる。またFig. 4に, $R = 50$ の場合における領域 $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ の変化を示す。反復を行なうに従い,領域が限定されることを確認できる。

[数値例 2]

$n_x = n_y = 2$, 行列サイズが 4×4 の例を用いて変数領域が限定されていくようすを示す。なお,アルゴリズムとして,ステップR.3において $\mathbf{x}^{(K)} = \text{ve}\{\mathcal{X}\}$, $\mathbf{y}^{(K)} = \text{ve}\{\mathcal{Y}\}$ による主問題の求解,下界値制約の生成を併用した。Fig. 5に変数領域 $\mathcal{X}$, Fig. 6に変数領域 $\mathcal{Y}$ を示す。各反復における限定領域を青ライン,最終的な変数領域を赤ラインで示した。収束が達成されるまでに,変数領域が平均14.27[%]まで圧縮され,計算効率において反復回数は22.82[%],CPU時間は53.73[%]にまでそれぞれ短縮される。CPU時間の削減効果が,反復回数の削減効果と比較して小さいのは,削除可能

Fig. 6 Bounded region of y_1 and y_2

Fig. 7 Computational efficiency of subproblem reduction method

領域を長方形近似する際に線形計画問題を解くことが影響している。

[数値例 3]

最後に,部分問題低減法による計算効率の改善について検討するため, $n_x = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $n_y = 2$, 行列サイズ4次のBMIをランダムに10題発生し,変数領域 $\mathcal{X} \times \mathcal{Y} = [-2, 2] \times [-2, 2]$ において数値実験を行なった。Fig. 7上図に,従来の方法1,方法2と提案法の下界値を求める際の部分問題の数, Fig. 7下図にはCPU時間を示す。この数値計算にはPentium III, 1GHzを使用し,収束条件の上界値と下界値の差は 10^{-3} としている。結果より,特に変数の数が多くなった場合に,部分問題削減による計算効率の改善が確認される。

7. おわりに

本研究では,まず,PRD法によるBMI求解アルゴリズムの特性を解析的に明らかにし,主問題における変数の探索領域が増加する場合,漸近的に真値とのギャップが線形増加することを示した。つぎに,この解析結果に基づき,上界値を併用して主問題における変数の探索領域を限定し,ラグランジュ関数による下界値の悪化を低減する手法を提案した。

また、ラグランジュ関数による下界値制約の有効条件を利用して、子問題が派生する際の条件分岐を回避し、指数オーダで増加する部分問題の数を抑制する手法についても提案した。最後に、種々の数値実験を行ない、アルゴリズムの働きについて示すとともに、提案手法の有効性を確認した。

PRD 法による BMI 最適化アルゴリズムにおいては、双線形となる二つの変数ベクトルのうち、主問題における変数ベクトルの次元や探索領域の大きさが計算効率に大きく影響するのに対し、主問題で固定される側の変数ベクトルの探索領域や次元の影響は相対的に少ない。よって、双線形となっている変数の数や探索領域の非対称性が大きい BMI に対しては、選択的に主問題を構成することである程度実用的な性能を示すことができる。制御問題への応用では、低次元補償器によるマルチチャンネル H_2/H_∞ 制御などの固定次数補償器による多目的制御問題において、少ない補償器変数と複数仕様を表わす多次元のリアプノフ変数が双線形となるため、双線形変数間の非対称性が大きく、本手法の応用による実用的な効果が期待される。

謝辞 本研究は、文部科学省科学研究費補助金若手研究(B) No.16760344 の補助のもとで行なわれています。ここに謝意を表します。

参 考 文 献

- 1) 藤岡, 岩崎: BMI 非凸行列不等式に基づく制御系設計への挑戦, 計測と制御, **36**-11, 762/767 (1997)
- 2) 若佐裕治: BMI 問題のための大域的最適化手法, システム制御情報学会, **43**-5, 258/265 (1999)
- 3) A. M. Geoffrion: Generalized Benders Decomposition, Journal of Optimization Theory and Applications, **10**, 237/260 (1972)
- 4) C.A. Floudas and V. Visweswaran: Primal-Relaxed Dual Global Optimization Approach, Journal of Optimization Theory and Applications, **78**-2, 187/225 (1993)
- 5) 若佐, 佐々木, 谷野, 片山: 主緩和双対法による BMI 問題の大域的解法, 計測自動制御学会論文集, **35**-6, 748/753 (1999)
- 6) Eric Beran, Lieven Vandenberghe and Stephen Boyd: A Global BMI Algorithm Based on the Generalized Benders Decomposition, in Proceedings of European Control Conference (1997)
- 7) W. B. Liu and C.A. Floudas: Generalized Primal-Relaxed Dual Approach for Global Optimization, Journal of Optimization Theory and Applications, **90**-2, 417/434 (1996)
- 8) C.A. Floudas: Deterministic Global Optimization, Kluwer Academic Publishers (2000)
- 9) V. Visweswaran and C.A. Floudas: New Formulations and Branching Strategies for the GOP Algorithm, Global Optimization in Chemical Engineering, Kluwer Academic Publishers, chapter 3, 75/100 (1996)
- 10) K.C. Goh, M.G. Safonov and G.P. Papavasilopoulos: A Global Optimization Approach for the BMI Eigenvalue Problem, in Proceedings of the 33rd Conference on Decision and Control, 2009/2014 (1994)

[著 者 紹 介]

川 西 通 裕 (正会員)

1994 年京都大学大学院工学研究科応用システム科学専攻修士課程修了。96 年同博士課程を中途退学し、神戸大学工学部機械工学科助手となり現在に至る。制御理論と数値最適化およびその応用に関する研究に従事。博士(工学)。システム制御情報学会, 日本機械学会, IEEE の会員。

大 元 伸 一

2001 年神戸大学大学院自然科学研究科機械工学専攻修士課程修了。同年伊藤忠商事(株)に入社。在学中は、主緩和双対法を用いた双線形行列固有値最適化法の研究に従事。