弱結合システムの H_∞ 状態フィードバック制御†

向 谷 博 明*

H_∞ State Feedback Control of Weakly Coupled Systems†

Hiroaki MUKAIDANI*

In this paper, H_∞ state feedback control for weakly coupled systems is investigated. The attention is focused on the design of the high-order approximate H_∞ controller which is based on the numerical solutions. A novel contribution is that a new iterative algorithm is derived by combining Newton's method and the fixed point algorithm. As a result, H_∞ controller can be constructed in the same dimension of the subsystems. It is newly proved that the proposed algorithm has the quadratic convergence. Moreover, it is shown that the resulting controller achieves $O(\varepsilon^{2^k})$ approximation of the optimal H_∞ cost. As another important feature, if the coupling parameter is unknown, it is also shown that the parameter independent decentralized controllers achieve $O(\varepsilon)$ approximation.

Key Words: weakly coupled systems, H_∞ state feedback control, Newton's method, fixed point algorithm

1. はじめに

大規模システムに対する安定化問題および制御問題は、現在まで多くの研究者によって広範囲に研究されてきた¹⁾。これらの研究の中で、サブシステム間の関係が正の微小パラメータによって結合されている弱結合システム(大規模システムの一つのサブクラスに属する)に対する研究成果が多く報告されている。たとえば、テイラー級数展開に基づく方法によって、弱結合システムのための最適レギュレータ問題は研究された²⁾。一方、分散制御に基づく弱結合システムのための H_∞ 状態フィードバック制御問題は調査された³⁾。しかしながら、提案されたコントローラによるコストパフォーマンスの劣化は現在に至るまで報告されていない。近年、著者ら^{5), 6)}によって、数値計算法に基づくマルチモデルシステムおよび特異摂動システムにおける H_∞ 制御問題は研究された。さらに、弱結合システムのための H_2 状態フィードバック制御問題は、新しい近似テクニックによって解かれた⁷⁾。しかしながら、数値計算法に基づく弱結合システムに関する H_∞ 制御問題は現在のところ研究されていない。

弱結合システムにおける制御問題に対して、コントローラを得るために微小パラメータ ε を含むリッカチ方程式を解くことが必要である。リッカチ方程式を解くことに対して、

さまざまな信頼性が高い数値計算アルゴリズムが多く文献で報告されている^{11)~13)}。しかしながら、これらの方法は、計算に必要な行列の次元がオリジナルな弱結合システムの次元に等しいか、それ以上の行列計算のためのワークスペース(注1)を必要とする。したがって、電力システムのように多数のサブシステムを含む場合、ワークスペースが増加することから数値計算に必要なワークスペースの縮小を考慮する必要がある。近年、サブシステムと同じ次元で数値計算可能である再帰的アルゴリズムによる弱結合システムのための最適制御問題は研究された⁴⁾。しかしながら、以下の2つの欠点が存在する。第一に、再帰的アルゴリズムの収束解が0-オーダー解に依存するということである^{5), 7)}。すなわち、0-オーダー解が十分な精度を保証しなければ正確解が得られないということである。第二に、再帰的アルゴリズムが一次収束なので、収束スピードが非常に遅いということである。

数値計算アルゴリズムによるコントローラ設計の限界は、微小パラメータ ε が既知であるということである。実際の制御対象において、微小パラメータ ε はしばしば未知である場合が少なくない。したがって、パラメータの値が正確に知られていない場合、微小パラメータ ε に依存しないコントローラ設計は非常に重要であると考えられる。

本論文では、大規模システムの一つのサブクラスに属する弱結合システムにおける H_∞ 状態フィードバック制御問題を考える。本論文の主な結果は文献8), 9)に基づいている。具体的には、まずリッカチ方程式の解の漸近構造を陰関数定理¹⁰⁾によって明らかにする。続いて、導出されたリッカ

† The 10th IFAC/IFORS/IMACS/IFIP Symposium on Large Scale Systems: Theory and Applications (2004・7), The 2004 IEEE Conference on Control Applications で一部発表 (2004・9)

* 広島大学大学院教育学研究科 東広島市鏡山 1-1-1

* Graduate School of Education, Hiroshima University, 1-1-1 Kagamiyama, Higashi-Hiroshima

(注1) ここでいうワークスペースとは、行列の線形計算に最小限必要とされる次元数が格納できるメモリ領域を意味する。

$$A_\varepsilon := \begin{bmatrix} A_{11} & \varepsilon A_{12} & \cdots & \varepsilon A_{1N} \\ \varepsilon A_{21} & A_{22} & \cdots & \varepsilon A_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon A_{N1} & \varepsilon A_{N2} & \cdots & A_{NN} \end{bmatrix}, B_\varepsilon^1 := \begin{bmatrix} B_{11}^1 & \varepsilon B_{12}^1 & \cdots & \varepsilon B_{1N}^1 \\ \varepsilon B_{21}^1 & B_{22}^1 & \cdots & \varepsilon B_{2N}^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon B_{N1}^1 & \varepsilon B_{N2}^1 & \cdots & B_{NN}^1 \end{bmatrix}, B_\varepsilon^2 := \begin{bmatrix} B_{11}^2 & \varepsilon B_{12}^2 & \cdots & \varepsilon B_{1N}^2 \\ \varepsilon B_{21}^2 & B_{22}^2 & \cdots & \varepsilon B_{2N}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon B_{N1}^2 & \varepsilon B_{N2}^2 & \cdots & B_{NN}^2 \end{bmatrix}$$

$$C := \begin{bmatrix} \text{block diag} (C_{11} \cdots C_{NN}) \\ O \end{bmatrix}, D := \begin{bmatrix} O \\ \text{block diag} (D_{11} \cdots D_{NN}) \end{bmatrix}$$

チ方程式の解の構造式を利用して初期値を設定することによって、ニュートン法による求解アルゴリズムを提案する。ニュートン法を利用することで、再帰的アルゴリズム⁴⁾と比較して収束の程度が一次収束から二次収束に改善されるため収束速度が向上する。また、文献8)の延長として、二次収束を判定する条件式を新たに導出する。一方、ニュートン法から導出された線形方程式であるリアプノフ方程式に対し、各サブシステムの未知行列ごとに分割することによって、低次元かつ独立に行列計算が可能である不動点アルゴリズムに基づく新規な数値計算アルゴリズムを提案する。特徴的な結果として、弱結合システムに多数のサブシステムが存在するとしても、必要とされる行列計算のワークスペースはそれぞれのサブシステムの次元と比べて同じである。以上の結果を踏まえ、ニュートン法および不動点アルゴリズムを融合した数値計算アルゴリズムで得られたリッカチ方程式の正定対称解を利用して H_∞ コントローラを設計する。新規に得られたコントローラは、従来の結果³⁾と比較して H_∞ ノルムの劣化の程度が $O(\varepsilon^{2k})$ (ここで k は繰返し計算回数) であることが示される。さらに、結合パラメータ ε が未知である場合にも対処するため、 ε に依存しない H_∞ コントローラを提案する。この設計法においても、導出されたリッカチ方程式の解の構造式が重要な役割を果たす。本論文の最後に、提案された H_∞ コントローラ設計方法の有効性を検証するために、実用的な電力システムをモデルとした仮想プラントに対して数値シミュレーションを行なう。

本論文で使用される記号は以下のとおりである。 I_n は $n \times n$ の単位行列を表わす。 O は零行列を表わす。特に、 $O_{p \times q}$ は $p \times q$ の零行列を表わす。 $\|\cdot\|_\infty$ は H_∞ ノルムを表わす。 $\|f(t)\|_2$ は時間関数 $f(t)$ の 2-ノルムを表わす。**block diag** は対角行列を表わす。**vec** S は、行列 S の列ベクトル化を表わす¹⁶⁾。すなわち、

$$\text{vec} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, a_i = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{bmatrix}$$

$$= \text{vec} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

を表わす。

2. 問題設定

以下の弱結合システムを考える^{2), 8), 9)}。

$$\dot{x}_i(t) = A_{ii}x_i(t) + B_{ii}^1w_i(t) + B_{ii}^2u_i(t) + \varepsilon \sum_{j=1, j \neq i}^N A_{ij}x_j(t) + \varepsilon \sum_{j=1, j \neq i}^N B_{ij}^1w_j(t) + \varepsilon \sum_{j=1, j \neq i}^N B_{ij}^2u_j(t), x_i(0) = 0 \quad (1a)$$

$$z_i(t) = C_{ii}x_i(t) + D_{ii}u_i(t), i = 1, 2, \dots, N \quad (1b)$$

ただし、 $x_i(t) \in \mathbf{R}^{n_i}$ は状態ベクトル、 $w_i(t) \in \mathbf{R}^{p_i}$ は外乱、 $u_i(t) \in \mathbf{R}^{m_i}$ は制御入力、 $z_i(t) \in \mathbf{R}^{q_i}$ は制御量をそれぞれ表わす。ここで、添え字の i はサブシステムの番号を表わす。 ε はサブシステム間の結合の強さを表現する正の微小パラメータである。ここで、 ε は既知である場合とそうでない場合の二通りが考えられることに注意されたい。本論文では、 ε が既知である場合には、数値計算によって正確解を求める。一方、既知でない場合には ε に依存しないコントローラの設計に焦点をあてる。

コントローラを得る準備のため、このページの上段に行列を与える。このとき、弱結合システム(1)は以下のように表現できることに注意されたい。

$$\dot{x}(t) = A_\varepsilon x(t) + B_\varepsilon^1 w(t) + B_\varepsilon^2 u(t)$$

$$z(t) = Cx(t) + Du(t)$$

ただし、

$$x(t) := \begin{bmatrix} x_1^T(t) \cdots x_N^T(t) \end{bmatrix}^T \in \mathbf{R}^{\bar{n}}, \bar{n} := \sum_i n_i$$

$$w(t) := \begin{bmatrix} w_1^T(t) \cdots w_N^T(t) \end{bmatrix}^T \in \mathbf{R}^{\bar{p}}, \bar{p} := \sum_i p_i$$

$$u(t) := \begin{bmatrix} u_1^T(t) \cdots u_N^T(t) \end{bmatrix}^T \in \mathbf{R}^{\bar{m}}, \bar{m} := \sum_i m_i$$

$$z(t) := \begin{bmatrix} z_1^T(t) \cdots z_N^T(t) \end{bmatrix}^T \in \mathbf{R}^{\bar{q}}, \bar{q} := \sum_i q_i$$

まず、標準的な H_∞ 状態フィードバック制御問題の結果を与える。

以下の状態フィードバックコントローラを考える。

$$u(t) = Kx(t) \quad (2)$$

このとき、 H_∞ 制御問題は

“ある与えられた $\gamma > 0$ に対して, H_∞ ノルム条件 (3) を満足する状態フィードバックゲイン K が存在するならそれを求めよ.

$$\|G(s)\|_\infty < \gamma \quad (3)$$

ただし, $G(s) = (C + DK)(sI_{\bar{n}} - A_\varepsilon - B_\varepsilon^2 K)^{-1} B_\varepsilon^1$ である.”

良く知られているように H_∞ 状態フィードバック制御の解は, 以下のリッカチ方程式 (4)

$$P_\varepsilon A_\varepsilon + A_\varepsilon^T P_\varepsilon - P_\varepsilon S_\varepsilon P_\varepsilon + Q = 0 \quad (4)$$

の準正定対称安定化解 P_ε が存在すれば, その P_ε を利用して (5) で与えられる.

$$u_{\text{opt}}(t) = K_{\text{opt}\varepsilon} x(t) = -B_\varepsilon^{2T} P_\varepsilon x(t) \quad (5)$$

ただし,

$$S_\varepsilon := B_\varepsilon^2 B_\varepsilon^{2T} - \gamma^{-2} B_\varepsilon^1 B_\varepsilon^{1T} \\ = \begin{bmatrix} \bar{S}_{11} & \varepsilon \bar{S}_{12} & \cdots & \varepsilon \bar{S}_{1N} \\ \varepsilon \bar{S}_{12}^T & \bar{S}_{22} & \cdots & \varepsilon \bar{S}_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon \bar{S}_{1N}^T & \varepsilon \bar{S}_{2N}^T & \cdots & \bar{S}_{NN} \end{bmatrix}$$

$$Q := C^T C = \text{block diag} \begin{pmatrix} Q_{11} & \cdots & Q_{NN} \end{pmatrix}$$

$$Q_{ii} := C_{ii}^T C_{ii}, i = 1, 2, \dots, N$$

リッカチ方程式 (4) の解 $P_\varepsilon \in \mathbf{R}^{\bar{n} \times \bar{n}}$ は, それぞれのサブシステムの次元 n_i よりはるかに大きい次元 $\bar{n} := \sum_i n_i$ をもつことに注意されたい. したがって, 行列計算に必要なワークスペースの低減化は重要な問題である. さらに, 結合パラメータ ε が未知である場合には, 物理的にリッカチ方程式 (4) の解を計算することは不可能であることも注意が必要である. 本論文では, これらの問題に焦点をあてる.

A_ε , B_ε^1 および B_ε^2 が結合パラメータ ε を含んでいることに注目して, リッカチ方程式 (4) の解を (6) のように仮定する⁴⁾.

$$P_\varepsilon := \begin{bmatrix} P_{11} & \varepsilon P_{12} & \cdots & \varepsilon P_{1N} \\ \varepsilon P_{12}^T & P_{22} & \cdots & \varepsilon P_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon P_{1N}^T & \varepsilon P_{2N}^T & \cdots & P_{NN} \end{bmatrix} \quad (6)$$

このとき, 状態フィードバックコントローラ (5) は以下のような構造をもつことが簡単に示される.

$$u_{\text{opt}}(t) = K_{\text{opt}\varepsilon} x(t) = -B_\varepsilon^{2T} P_\varepsilon x(t) \\ = \begin{bmatrix} K_{11} & \varepsilon K_{12} & \cdots & \varepsilon K_{1N} \\ \varepsilon K_{21} & K_{22} & \cdots & \varepsilon K_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon K_{N1} & \varepsilon K_{N2} & \cdots & K_{NN} \end{bmatrix} x(t)$$

以下の仮定を導入する.

[仮定 1] $(A_{ii}, B_{ii}^2, C_{ii})$, $i = 1, 2, \dots, N$ は可安定かつ可検出である.

[仮定 2] D_{ii} , $i = 1, 2, \dots, N$ は列フルランクである.

[仮定 3] $\begin{bmatrix} A_{ii} - j\omega I_{n_i} & B_{ii}^2 \\ C_{ii} & D_{ii} \end{bmatrix}$, $i = 1, 2, \dots, N$ はすべての $\omega \in \mathbf{R}$ で列フルランクである.

[仮定 4] $D^T D = I_{\bar{m}}$ および $C^T D = 0$.

3. リッカチ方程式の漸近構造

この章ではリッカチ方程式 (4) の解の漸近構造を明らかにする. A_ε , S_ε , Q および P_ε をリッカチ方程式 (4) に代入し, $\varepsilon \rightarrow +0$ とすれば 0-オーダー方程式 (7) を得る. ここで, 0-オーダー方程式 (7) の解をそれぞれ $\bar{P}_{ii}$, $i = 1, 2, \dots, N$ と定義する.

$$\bar{P}_{ii} A_{ii} + A_{ii}^T \bar{P}_{ii} - \bar{P}_{ii} S_{ii} \bar{P}_{ii} + Q_{ii} = 0 \quad (7)$$

ただし, $i = 1, \dots, N$, $S_{ii} := \bar{S}_{ii}|_{\varepsilon=0} = B_{ii}^2 B_{ii}^{2T} - \gamma^{-2} B_{ii}^1 B_{ii}^{1T}$.

仮定 1-4 のもと, 設計パラメータ γ が十分に大きい場合, リッカチ方程式 (7) は正定対称安定化解をもつことが予想される. そこで, 以下の集合を定義する^{8), 9)}.

$\Gamma_i := \{\gamma > 0 \mid \text{リッカチ方程式 (7) が正定対称安定化解をもつ.}\}$,

$$\gamma_i := \inf\{\gamma \mid \gamma \in \Gamma_i\}.$$

その結果, 結合パラメータ ε が十分に小さい場合, $\gamma > \bar{\gamma} := \max\{\gamma_1, \dots, \gamma_N\}$ を満足する設計パラメータ γ に対して, リッカチ方程式 (4) の正定対称安定化解が存在することが期待される^(注2). 以下の定理は, P_ε の $\varepsilon \rightarrow +0$ における漸近構造を示す.

《定理 1》 仮定 1-4 のもと, H_∞ 制御問題における設計パラメータである γ を $\gamma > \bar{\gamma} := \max\{\gamma_1, \dots, \gamma_N\}$ の範囲で選択する場合, $\varepsilon \in (0, \sigma^*)$ の範囲でリッカチ方程式 (4) の正定対称安定化解が存在するような正の十分小さなパラメータ σ^* が存在する. このとき, P_ε は (8) で表現される構造をもつ.

$$P_\varepsilon = \bar{P} + O(\varepsilon)$$

$$= \text{block diag} \begin{pmatrix} \bar{P}_{11} & \cdots & \bar{P}_{NN} \end{pmatrix} + O(\varepsilon) \quad (8)$$

(証明) 証明は陰関数定理によって行なわれる¹⁰⁾. すなわち, $\varepsilon = 0$ でのリッカチ方程式 (4) のヤコビ行列が正則であることを示せば十分である. 簡単な計算により, $\varepsilon \rightarrow +0$ したときのリッカチ方程式 (4) のヤコビ行列は (9) で与えられる.

$$J(0) = \begin{bmatrix} J_{11} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & J_{NN} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & J_{12} & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & 0 \\ * & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & J_{(N-1)N} \end{bmatrix} \quad (9)$$

(注 2) 本来, リッカチ方程式 (4) の準正定対称安定化解が存在すれば良いが, Γ_i の定義より, より強い条件として正定対称安定化解の存在を考えることが可能となる.

ただし,

$$\begin{aligned} \mathbf{J}(\varepsilon) &:= \nabla \mathcal{G}(P_\varepsilon) = \frac{\partial \text{vec} \mathcal{G}(P_\varepsilon)}{\partial (\text{vec} P_\varepsilon)^T} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \text{vec} G_{11}}{\partial (\text{vec} P_{11})^T} & \cdots & \frac{\partial \text{vec} G_{NN}}{\partial (\text{vec} P_{11})^T} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \text{vec} G_{11}}{\partial (\text{vec} P_{(N-1)N})^T} & \cdots & \frac{\partial \text{vec} G_{NN}}{\partial (\text{vec} P_{(N-1)N})^T} \end{bmatrix} \\ \mathcal{G}(P_\varepsilon) &= P_\varepsilon A_\varepsilon + A_\varepsilon^T P_\varepsilon - P_\varepsilon S_\varepsilon P_\varepsilon + Q \\ &= \begin{bmatrix} G_{11} & \cdots & G_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{N1} & \cdots & G_{NN} \end{bmatrix} \\ \mathbf{J}_{ii} &= (A_{ii} - S_{ii} \bar{P}_{ii})^T \otimes I_{n_i} + I_{n_i} \otimes (A_{ii} - S_{ii} \bar{P}_{ii})^T \\ \mathbf{J}_{ij} &= (A_{ii} - S_{ii} \bar{P}_{ii})^T \otimes I_{n_j} + I_{n_j} \otimes (A_{jj} - S_{jj} \bar{P}_{jj})^T \end{aligned}$$

最終的にヤコビ行列 (9) は以下のように計算される.

$$\det \mathbf{J}(0) = \left[\prod_i \det \mathbf{J}_{ii} \right] \cdot \left[\prod_{i < j} \det \mathbf{J}_{ij} \right] \quad (10)$$

設計パラメータである γ を $\gamma > \bar{\gamma} := \max\{\gamma_1, \dots, \gamma_N\}$ の範囲で選択したとき, $A_{ii} - S_{ii} \bar{P}_{ii}$ は安定行列であることから明らかに $\mathbf{J}_{ii}$ および $\mathbf{J}_{ij}$ は正則である. したがって, $\det \mathbf{J}(0) \neq 0$ である. すなわち, $\mathbf{J}(0)$ は $\varepsilon = 0$ で正則である. 以上より, 陰関数定理によって正の十分小さなパラメータ σ^* の存在が証明される.

証明の残りは, P_ε が正定対称安定化解であることである. まず, 十分小さな ε に対して, $\bar{P}_{ii}$ が正定行列であるから $P_\varepsilon > 0$ であることが容易に確認される. さらに, 構造式 (8) を利用することによって, 以下の関係式を得ることができる.

$$\begin{aligned} A_\varepsilon - S_\varepsilon P_\varepsilon &= \text{block diag} \left(A_{11} - S_{11} \bar{P}_{11} \cdots \right. \\ &\quad \left. A_{NN} - S_{NN} \bar{P}_{NN} \right) + O(\varepsilon) \end{aligned} \quad (11)$$

ここで, $A_{ii} - S_{ii} \bar{P}_{ii}$ は仮定 1-4 より安定行列であるので, 十分小さな ε に対して $A_\varepsilon - S_\varepsilon P_\varepsilon$ も安定行列であることが対角行列の性質から容易に確認される. $\square$

(注意) リッカチ方程式 (4) の解の構造式 (8) は, 以下で紹介される Newton-Kantorovich theorem により $k=0$ として容易に得ることができる. この証明法は, 従来の文献 8)~10) にはない新規な証明法であることに注意されたい.

4. ニュートン法

最適な H_∞ コントローラを得るために, ニュートン法に基づくつぎの有用な数値計算アルゴリズムを与える.

《定理 2》 以下のニュートン法に基づくアルゴリズムを考える.

$$\begin{aligned} P_\varepsilon^{(k+1)}(A_\varepsilon - S_\varepsilon P_\varepsilon^{(k)}) + (A_\varepsilon - S_\varepsilon P_\varepsilon^{(k)})^T P_\varepsilon^{(k+1)} \\ + P_\varepsilon^{(k)} S_\varepsilon P_\varepsilon^{(k)} + Q = 0, \quad k = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (12a)$$

$$P_\varepsilon^{(k)} = \begin{bmatrix} P_{11}^{(k)} & \varepsilon P_{12}^{(k)} & \cdots & \varepsilon P_{1N}^{(k)} \\ \varepsilon P_{12}^{(k)T} & P_{22}^{(k)} & \cdots & \varepsilon P_{2N}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon P_{1N}^{(k)T} & \varepsilon P_{2N}^{(k)T} & \cdots & P_{NN}^{(k)} \end{bmatrix} \quad (12b)$$

ただし, 構造式 (8) および ε が十分小さいことを考慮して, 初期値は (13) とする.

$$P_\varepsilon^{(0)} = \bar{P} = \text{block diag} \left(\bar{P}_{11} \cdots \bar{P}_{NN} \right) \quad (13)$$

以上の条件および仮定 1-4 のもと, ニュートン法に基づくアルゴリズム (12) によって生じる数列 $P_\varepsilon^{(k)}$ が $\varepsilon \in (0, \bar{\sigma})$, $\bar{\sigma} \leq \sigma^*$ の範囲で正確解 P_ε に二次収束するような $\bar{\sigma}$ が存在する. すなわち, 以下の関係式が成立する.

$$\|P_\varepsilon^{(k)} - P_\varepsilon\| = O(\varepsilon^{2^k}), \quad k = 0, 1, \dots \quad (14)$$

ただし,

$$\mathbf{L} = 2\|S_\varepsilon\| < \infty, \quad \beta = \|\nabla \mathcal{G}(P_\varepsilon^{(0)})\|^{-1}$$

$$\eta = \beta \cdot \|\mathcal{G}(P_\varepsilon^{(0)})\|, \quad \theta = \beta \eta \mathbf{L}, \quad \nabla \mathcal{G}(P_\varepsilon) = \frac{\partial \text{vec} \mathcal{G}(P_\varepsilon)}{\partial (\text{vec} P_\varepsilon)^T}$$

(証明) 証明は Newton-Kantorovich theorem¹⁴⁾ によって可能である. どのような ε に対しても $\mathcal{G}(P_\varepsilon)$ は, すべての P_ε に関して微分可能である. したがって,

$$\nabla \mathcal{G}(P_\varepsilon) := (A_\varepsilon - S_\varepsilon P_\varepsilon)^T \otimes I_{\bar{n}} + I_{\bar{n}} \otimes (A_\varepsilon - S_\varepsilon P_\varepsilon)^T \quad (15)$$

を得る. 簡単な計算から

$$\|\nabla \mathcal{G}(P_{1\varepsilon}) - \nabla \mathcal{G}(P_{2\varepsilon})\| \leq \mathbf{L} \|P_{1\varepsilon} - P_{2\varepsilon}\|$$

が成立する. ただし, $\mathbf{L} = 2\|S_\varepsilon\|$ である. さらに関係式 (11) を利用することによって $\varepsilon \in (0, \bar{\sigma})$, $\bar{\sigma} \leq \sigma^*$ を満足するすべての ε に対して, $\nabla \mathcal{G}(P_\varepsilon^{(0)})$ が正則であるような $\bar{\sigma}$ が存在することがわかる. 一方, 定理 1 より, $\|\mathcal{G}(P_\varepsilon^{(0)})\| = O(\varepsilon)$ であるので, $\|\nabla \mathcal{G}(P_\varepsilon^{(0)})\|^{-1} \cdot \|\mathcal{G}(P_\varepsilon^{(0)})\| = \beta \cdot \|\mathcal{G}(P_\varepsilon^{(0)})\| \equiv \eta = O(\varepsilon)$ を満足するような η が存在する. 最終的に $\eta = O(\varepsilon)$ を考慮すれば

$$\theta := \beta \eta \mathbf{L} < 2^{-1} \quad (16)$$

を満足するような θ が存在するので, Newton-Kantorovich theorem により (14) を得る. $\square$

(注意) アルゴリズム (12a) がニュートン法であることは以下によって示される. (12a) および $\mathcal{G}(P_\varepsilon)$ の両辺に vec をとれば (17) を得る.

$$\begin{aligned} [(A_\varepsilon - S_\varepsilon P_\varepsilon^{(k)})^T \otimes I_{\bar{n}} + I_{\bar{n}} \otimes (A_\varepsilon - S_\varepsilon P_\varepsilon^{(k)})^T] \text{vec} P_\varepsilon^{(k+1)} \\ + \text{vec}[P_\varepsilon^{(k)} S_\varepsilon P_\varepsilon^{(k)} + Q] = 0 \end{aligned} \quad (17a)$$

$$\begin{aligned} [(A_\varepsilon - S_\varepsilon P_\varepsilon^{(k)})^T \otimes I_{\bar{n}} + I_{\bar{n}} \otimes (A_\varepsilon - S_\varepsilon P_\varepsilon^{(k)})^T] \text{vec} P_\varepsilon^{(k)} \\ + \text{vec}[P_\varepsilon^{(k)} S_\varepsilon P_\varepsilon^{(k)} + Q] = \text{vec} \mathcal{G}(P_\varepsilon^{(k)}) \end{aligned} \quad (17b)$$

(17a) から (17b) を引くことによって (18) を得る.

$$\begin{aligned} [(A_\varepsilon - S_\varepsilon P_\varepsilon^{(k)})^T \otimes I_{\bar{n}} + I_{\bar{n}} \otimes (A_\varepsilon - S_\varepsilon P_\varepsilon^{(k)})^T] \\ \cdot \text{vec}[P_\varepsilon^{(k+1)} - P_\varepsilon^{(k)}] = \nabla \mathcal{G}(P_\varepsilon^{(k)}) \text{vec}[P_\varepsilon^{(k+1)} - P_\varepsilon^{(k)}] \\ = -\text{vec} \mathcal{G}(P_\varepsilon^{(k)}) \end{aligned} \quad (18)$$

ここで、 $\nabla G(P_\varepsilon^{(k)})$ が安定であることに注意すれば (19) を得る。

$$\text{vec} P_\varepsilon^{(k+1)} = \text{vec} P_\varepsilon^{(k)} - [\nabla G(P_\varepsilon^{(k)})]^{-1} \text{vec} G(P_\varepsilon^{(k)}) \quad (19)$$

したがってアルゴリズム (12a) はニュートン法である。

文献8) ではリッカチ方程式 (4) に対する解の漸近構造は示されているが、与えられた ε に対して、アルゴリズム (12a) の二次収束を判定する条件式は議論されていない。そこで、本論文では、アルゴリズム (12a) が二次収束するかどうかを判定するための ε に関する判別式を新規に導出する。

《定理3》 ε に依存しないリッカチ方程式 (7) はそれぞれ正定対称安定化解をもつと仮定する。また、ある $\varepsilon_0 > 0$ に対して、ヤコビ行列 $J(\varepsilon)$ の $P_{11}, \dots, P_{NN}, \varepsilon$ それぞれに $\bar{P}_{11}, \dots, \bar{P}_{NN}, \varepsilon_0$ を代入した行列 $J(\varepsilon_0) := J(\bar{P}_{11}, \dots, \bar{P}_{NN}, \varepsilon_0)$ が正則であると仮定する。このとき、不等式 (20) を満足すればアルゴリズム (12a) は二次収束である。

$$\begin{aligned} 2\theta &:= 4\|S_\varepsilon\| \cdot \|\nabla G(P_\varepsilon^{(0)})\|^{-1} \cdot \|\dot{G}(P_\varepsilon^{(0)})\| \\ &= 4\|S_\varepsilon\| \cdot \|J^{-1}(\varepsilon_0)\|^2 \cdot \|G(P_\varepsilon^{(0)})\| < 1 \end{aligned} \quad (20)$$

(証明) 条件式 (16) に $L = 2\|S_\varepsilon\|$, $\beta = \|\nabla G(P_\varepsilon^{(0)})\|^{-1}$, $\eta = \beta \cdot \|G(P_\varepsilon^{(0)})\|$ を代入すれば、Newton-Kantorovich theorem により容易に導出される。□

(注意) 定理1より、 ε_0 が十分小さいなら行列 $J(\varepsilon_0)$ は正則である。また、収束判別式 (20) は非常に保守的な十分条件であることが後のシミュレーションによって示される。すなわち、収束判別式 (20) を満足しなくても二次収束である例が示される。実際、ニュートン法 (12) が $\varepsilon = 0.5065$ という大きい値に対しても利用できることを数値例で実証する。最後に、収束判別式 (20) の計算には、オリジナルな弱結合システムの全次元よりはるかに大きな次元を必要とするので実用的な判別式としての利用は困難である。ただし、サブシステムの数が少なく、係数行列 A_ε などのオーダーが等しい場合、収束判別式としては十分機能すると思われる。

ニュートン法に基づくアルゴリズム (12a) を実行するには、 $\bar{n} \times \bar{n}$ (ただし、 $\bar{n} = \sum_i n_i$) の行列の計算を行わなくてはならない。したがって、数値計算に必要な次元の低減化は必須であると考えられる。本論文では、数値計算に必要なワークスペースの低減化を目的に、新規なアルゴリズムを提案する。議論の見通しを良くするために以下の一般化リアプノフ方程式 (21) を考える。

$$X_\varepsilon \Lambda_\varepsilon + \Lambda_\varepsilon^T X_\varepsilon + U_\varepsilon = 0 \quad (21)$$

ここで、 X_ε は未知の行列であり、 Λ_ε および U_ε はそれぞれ以下の構造を有する既知の行列である。

$$X_\varepsilon := \begin{bmatrix} X_{11} & \varepsilon X_{12} & \cdots & \varepsilon X_{1N} \\ \varepsilon X_{12}^T & X_{22} & \cdots & \varepsilon X_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon X_{1N}^T & \varepsilon X_{2N}^T & \cdots & X_{NN} \end{bmatrix}$$

$$\Lambda_\varepsilon := \begin{bmatrix} \Lambda_{11} & \varepsilon \Lambda_{12} & \cdots & \varepsilon \Lambda_{1N} \\ \varepsilon \Lambda_{21} & \Lambda_{22} & \cdots & \varepsilon \Lambda_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon \Lambda_{N1} & \varepsilon \Lambda_{N2} & \cdots & \Lambda_{NN} \end{bmatrix}$$

$$U_\varepsilon := \begin{bmatrix} U_{11} & \varepsilon U_{12} & \cdots & \varepsilon U_{1N} \\ \varepsilon U_{12}^T & U_{22} & \cdots & \varepsilon U_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon U_{1N}^T & \varepsilon U_{2N}^T & \cdots & U_{NN} \end{bmatrix}$$

一般化リアプノフ方程式 (21) に対して、以下の仮定を導入する。

[仮定5] $\Lambda_{11}, \dots, \Lambda_{NN}$ は安定行列である。

仮定5が満足されない場合、一般化リアプノフ方程式 (21) の準正定対称解が存在しないことが示されることに注意されたい。また、 Λ_{ii} に相当する $A_{ii} - \bar{S}_{ii} P_{ii}^{(k)}$ の安定性に関して、 $A_{ii} - \bar{S}_{ii} P_{ii}^{(k)} = A_{ii} - S_{ii} \bar{P}_{ii} + O(\varepsilon)$ であるため、十分小さな ε に対して安定である。

一般化リアプノフ方程式 (21) を分割すれば以下の線形方程式を得ることができる。

$$\begin{aligned} X_{ii} \Lambda_{ii} + \Lambda_{ii}^T X_{ii} \\ + \varepsilon^2 \sum_{l \neq i} (X_{il} \Lambda_{li} + \Lambda_{li}^T X_{li}) + U_{ii} = 0 \end{aligned} \quad (22a)$$

$$\begin{aligned} X_{ij} \Lambda_{jj} + \Lambda_{ii}^T X_{ij} + X_{ii} \Lambda_{ij} + \Lambda_{ji}^T X_{jj} \\ + \varepsilon \sum_{l \neq i, j} (X_{il} \Lambda_{lj} + \Lambda_{li}^T X_{lj}) + U_{ii} = 0 \end{aligned} \quad (22b)$$

$i < j, i, j = 1, 2, \dots, N$

線形方程式 (22) より、一般化リアプノフ方程式 (21) を解くための不動点アルゴリズムは (23) によって与えられる。

$$\begin{aligned} X_{ii}^{(m+1)} \Lambda_{ii} + \Lambda_{ii}^T X_{ii}^{(m+1)} \\ + \varepsilon^2 \sum_{l \neq i} (X_{il}^{(m)} \Lambda_{li} + \Lambda_{li}^T X_{li}^{(m)}) + U_{ii} = 0 \end{aligned} \quad (23a)$$

$$\begin{aligned} X_{ij}^{(m+1)} \Lambda_{jj} + \Lambda_{ii}^T X_{ij}^{(m+1)} + X_{ii}^{(m+1)} \Lambda_{ij} + \Lambda_{ji}^T X_{jj}^{(m+1)} \\ + \varepsilon \sum_{l \neq i, j} (X_{il}^{(m)} \Lambda_{lj} + \Lambda_{li}^T X_{lj}^{(m)}) + U_{ij} = 0 \end{aligned} \quad (23b)$$

$i < j, i, j = 1, 2, \dots, N, m = 0, 1, \dots$

ただし、

$$X_{ii}^{(0)} = \bar{X}_{ii}, X_{ij}^{(0)} = \bar{X}_{ij}, i < j, \bar{X}_{ij} = \bar{X}_{ji}^T$$

$$\bar{X}_{ii} \Lambda_{ii} + \Lambda_{ii}^T \bar{X}_{ii} + U_{ii} = 0$$

$$\bar{X}_{ij} \Lambda_{jj} + \Lambda_{ii}^T \bar{X}_{ij} + \bar{X}_{ii} \Lambda_{ij} + \Lambda_{ji}^T \bar{X}_{jj} + U_{ij} = 0$$

不動点アルゴリズム (23) の収束性に関して以下の定理を得ることができる。

《定理4》 仮定5のもと、不動点アルゴリズム (23) によって生じる数列 $X_{ii}^{(m)}$ および $X_{ij}^{(m)}$ が $\varepsilon \in (0, \bar{\phi})$ の範囲で正確解 X_{ii} および X_{ij} にそれぞれ一次収束するような $\bar{\phi}$ が存在する。すなわち、以下の関係式が成立する。

$$\|X_{ii}^{(m)} - X_{ii}\| = O(\varepsilon^{m+2}) \quad (24a)$$

$$\|X_{ij}^{(m)} - X_{ij}\| = O(\varepsilon^{m+1}) \quad (24b)$$

$$i < j, i, j = 1, 2, \dots, N, m = 0, 1, \dots$$

(証明) 定理4の証明は数学的帰納法により可能である⁵⁾. $m = 0$ のとき, 線形方程式 (22) の解 X_{ii} および X_{ij} に対する一次近似 $\bar{X}_{ii}$ および $\bar{X}_{ij}$ は, 線形方程式 (22) に対して $\varepsilon = 0$ とおくことにより, それぞれ $X_{ii}^{(0)}$ および $\bar{X}_{ij}^{(0)}$ に等しいことがわかる. すなわち, 以下が成立する.

$$\|X_{ii}^{(0)} - X_{ii}\| = O(\varepsilon^2), \|X_{ij}^{(0)} - X_{ij}\| = O(\varepsilon), i < j$$

$m = h$ ($h \geq 1$) のとき,

$$\|X_{ii}^{(h)} - X_{ii}\| = O(\varepsilon^{h+2}), i = 1, 2, \dots, N \quad (25a)$$

$$\|X_{ij}^{(h)} - X_{ij}\| = O(\varepsilon^{h+1}), i < j \quad (25b)$$

が成立すると仮定する. (23) から (22) を引き, $m = h$ とした後, 仮定 (25) を利用すれば関係式 (26) を得る.

$$(X_{ii}^{(h+1)} - X_{ii})\Lambda_{ii} + \Lambda_{ii}^T(X_{ii}^{(h+1)} - X_{ii}) + O(\varepsilon^{h+3}) = 0 \quad (26a)$$

$$(X_{ij}^{(h+1)} - X_{ij})\Lambda_{jj} + \Lambda_{jj}^T(X_{ij}^{(h+1)} - X_{ij}) + (X_{ii}^{(h+1)} - X_{ii})\Lambda_{ij} + \Lambda_{ij}^T(X_{jj}^{(h+1)} - X_{jj}) + O(\varepsilon^{h+2}) = 0 \quad (26b)$$

容易な代数計算の後, 仮定5の Λ_{ii} , $i = 1, 2, \dots, N$ の安定性を考慮すればリアプノフ方程式の標準的な性質¹⁵⁾より (27) を得る.

$$\|X_{ii}^{(h+1)} - X_{ii}\| = O(\varepsilon^{h+3}), i = 1, 2, \dots, N \quad (27a)$$

$$\|X_{ij}^{(h+1)} - X_{ij}\| = O(\varepsilon^{h+2}), i < j \quad (27b)$$

以上からすべての自然数 $m \in \mathbf{N}$ に対して (24) が成立することが数学的帰納法により示された. $\square$

関係式 (24) より, 不動点アルゴリズム (23) は一次収束であることが確認される.

(注意) アルゴリズム (23) の計算は, $n_{max} := \max_i \{n_1, \dots, n_N\}$ とするとき, $n_{max} \times n_{max}$ の行列の計算を行なうワークスペースがあれば実行できる. 具体的には, 初期値 $X_{ii}^{(0)} = \bar{X}_{ii}$, $X_{ij}^{(0)} = \bar{X}_{ij}$ に関してはそれぞれ単独に解を求めることが可能であり, さらに (23a) から $X_{ii}^{(m+1)}$ を求め, 続いて $X_{ii}^{(m+1)}$ を利用して (23b) から $X_{ij}^{(m+1)}$ を求めることが可能である.

(注意) ニュートン法 (12) に対して, $P_\varepsilon^{(k)}$ が正確解 P_ε に収束するための ε の上限値 $\bar{\sigma}$ は, 再帰的アルゴリズム⁴⁾ が収束するための ε の上限値と比較して, 定理3から一般に小さいことに注意されたい. 一方, 定理3が満足されなくてもニュートン法が収束する場合が存在することが知られている⁸⁾. したがって, 不動点アルゴリズム (23) および再帰的アルゴリズムに対して, 収束するための ε の上限値の比較は定理3が保守的なため定量的には困難である.

5. H_∞ 状態フィードバックコントローラ

4章では, 結合パラメータ ε が既知である条件のもと, 正

確解を求めるための数値計算アルゴリズムを提案した. この章では, 得られた数値解を利用した H_∞ 状態フィードバックコントローラを提案する. さらに, 結合パラメータ ε が未知である場合も考慮して, ε に依存しないコントローラの設計にも焦点をあてる.

5.1 結合パラメータ ε が既知の場合

ニュートン法および不動点アルゴリズムを融合した数値計算アルゴリズムで得られた解による高近似 H_∞ 状態フィードバックコントローラは (28) によって与えられる

$$\begin{aligned} u_{\text{exa}}(t) &= K^{(k)}x(t) = -B_\varepsilon^{2T}P_\varepsilon^{(k)}x(t) \\ &= \begin{bmatrix} u_1^{(k)T}(t) & \dots & u_N^{(k)T}(t) \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} K_{11}^{(k)} & \varepsilon K_{12}^{(k)} & \dots & \varepsilon K_{1N}^{(k)} \\ \varepsilon K_{21}^{(k)} & K_{22}^{(k)} & \dots & \varepsilon K_{2N}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon K_{N1}^{(k)} & \varepsilon K_{N2}^{(k)} & \dots & K_{NN}^{(k)} \end{bmatrix} x(t) \end{aligned} \quad (28)$$

《定理5》 仮定1-4のもと, 状態フィードバックコントローラ (28) による閉ループシステムの H_∞ ノルムに関して不等式 (29) が成立する.

$$\|G^{(k)}(s)\|_\infty < \gamma + O(\varepsilon^{2^k}) \quad (29)$$

ただし, $G^{(k)}(s) := (C + DK^{(k)})(sI_n - A_\varepsilon - B_\varepsilon^2K^{(k)})^{-1}B_\varepsilon^1$ である.

(証明) 提案された状態フィードバックコントローラ (28) を弱結合システム (1) に適用したときの閉ループシステムは (30a) によって与えられる. また, そのときの評価関数の値 (30b) を $J^{(k)}$ として新たに定義する.

$$\begin{aligned} x_i(t) &= (A_{ii} + B_{ii}^2K_{ii}^{(k)})x_i(t) + \varepsilon[A_{i1} \dots 0 \dots A_{iN}]x(t) \\ &\quad + [\varepsilon B_{i1}^2 \dots B_{ii}^2 \dots \varepsilon B_{iN}^2] \\ &\quad \cdot \begin{bmatrix} K_{11}^{(k)} & \dots & \varepsilon K_{1i}^{(k)} & \dots & \varepsilon K_{1N}^{(k)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon K_{i1}^{(k)} & \dots & 0 & \dots & \varepsilon K_{iN}^{(k)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon K_{N1}^{(k)} & \dots & \varepsilon K_{Ni}^{(k)} & \dots & K_{NN}^{(k)} \end{bmatrix} x(t) \\ &\quad + [\varepsilon B_{i1}^1 \dots B_{ii}^1 \dots \varepsilon B_{iN}^1]w(t) \\ &= (A_{ii} + B_{ii}^2K_{ii}^{(k)})x_i(t) + O(\varepsilon)x(t) \\ &\quad + [\varepsilon B_{i1}^1 \dots B_{ii}^1 \dots \varepsilon B_{iN}^1]w(t) \end{aligned} \quad (30a)$$

$$J^{(k)} = \int_0^\infty x^T(t)[Q + K^{(k)T}K^{(k)}]x(t)dt \quad (30b)$$

ただし, $x_i(0) = 0$, $K_{ii}^{(k)} := -B_{ii}^{2T}P_{ii}^{(k)}$ である. $\|G^{(k)}(s)\|_\infty < \gamma + O(\varepsilon^{2^k})$ を示すことは, (5) で与えられる最適フィードバックゲイン K を利用して,

$$J = \int_0^\infty x^T(t)[Q + K^TK]x(t)dt$$

$$\|w(t)\|_2^2 := \int_0^\infty w^T(t)w(t)dt$$

と定義し, $|J^{(k)} - J| \leq O(\varepsilon^{2^k}) \|w(t)\|_2^2$ を示すことに等価である. 以上の準備のもとに, サブシステム (30a) において, 行列 $A_{ii} + B_{ii}^2 K_{ii}^{(k)}$ は仮定 1-3 より安定であるので積分することによって以下の不等式を得る.

$$\begin{aligned} \|x_i(t)\|_2^2 &\leq \int_0^\infty \int_0^t \int_0^t \mathcal{L}_i \exp[-\rho_i(2t-p-q)] \\ &\quad \cdot [b_i \|w(p)\| + h_i \varepsilon \|x(p)\|] \\ &\quad \cdot [b_i \|w(q)\| + h_i \varepsilon \|x(q)\|] dq dp dt \end{aligned}$$

ただし, $\mathcal{L}_i \exp[-\rho_i t] \leq \|\exp[(A_{ii} + B_{ii}^2 K_{ii}^{(k)})t]\|$, $\mathcal{L}_i > 0$, $\rho_i > 0$, $b_i > 0$, $h_i > 0$.

不等式 $(a_1 + a_2) \cdot (a_3 + a_4) \leq \sum_i a_i^2$, $a_i \in \mathbf{R}$ を利用し, さらに積分の順序を変更することによって以下のように変形できる.

$$\begin{aligned} \|x_i(t)\|_2^2 &\leq \int_0^\infty \int_0^t \int_0^t \mathcal{L}_i \exp[-\rho_i(2t-p-q)] \\ &\quad \cdot [b_i^2 \|w(p)\|^2 + h_i^2 \varepsilon^2 \|x(p)\|^2 \\ &\quad + b_i^2 \|w(q)\|^2 + h_i^2 \varepsilon^2 \|x(q)\|^2] dq dp dt \\ &\leq 2 \int_0^\infty \int_p^\infty \int_0^\infty \mathcal{L}_i \exp[-\rho_i(2t-p-q)] \\ &\quad \cdot [b_i^2 \|w(p)\|^2 + h_i^2 \varepsilon^2 \|x(p)\|^2] dq dt dp \\ &\leq \frac{2\mathcal{L}_i}{\rho_i^2} (b_i^2 \|w(t)\|_2^2 + h_i^2 \varepsilon^2 \|x(t)\|_2^2). \end{aligned}$$

ここで, ε は十分に小さいため, 容易に $\|x(t)\|_2 \leq c_1 \|w(t)\|_2$, $c_1 > 0$ が成立することが確認される. 同様に最適フィードバックコントローラ $u(t) = Kx(t)$ を弱結合システム (1) に適用したときの閉ループシステムは (31) によって与えられる.

$$\begin{aligned} \dot{y}_i(t) &= (A_{ii} + B_{ii}^2 K_{ii}^{(k)}) y_i(t) + \varepsilon [A_{i1} \cdots 0 \cdots A_{iN}] y(t) \\ &\quad + [\varepsilon B_{i1}^2 \cdots B_{ii}^2 \cdots \varepsilon B_{iN}^2] \\ &\quad \cdot \left(\begin{bmatrix} K_{11}^{(k)} & \cdots & \varepsilon K_{1i}^{(k)} & \cdots & \varepsilon K_{1N}^{(k)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon K_{i1}^{(k)} & \cdots & 0 & \cdots & \varepsilon K_{iN}^{(k)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon K_{N1}^{(k)} & \cdots & \varepsilon K_{Ni}^{(k)} & \cdots & K_{NN}^{(k)} \end{bmatrix} + O(\varepsilon^{2^k}) \right) y(t) \\ &\quad + [\varepsilon B_{i1}^1 \cdots B_{ii}^1 \cdots \varepsilon B_{iN}^1] w(t) \\ &= (A_{ii} + B_{ii}^2 K_{ii}^{(k)}) y_i(t) + O(\varepsilon) y(t) + O(\varepsilon^{2^k}) y(t) \\ &\quad + [\varepsilon B_{i1}^1 \cdots B_{ii}^1 \cdots \varepsilon B_{iN}^1] w(t) \end{aligned} \quad (31a)$$

$$J = \int_0^\infty y^T(t) [Q + K^T K] y(t) dt \quad (31b)$$

ただし, $K := K^{(k)} + O(\varepsilon^{2^k})$ かつ $y_i(0) = 0$, $y_i \in \mathbf{R}^{n_i}$, $i = 1, 2, \dots, N$ は $x_i(t)$ の補助ベクトル値関数である. 同様にして, (31a) より, $\|y(t)\|_2 \leq c_2 \|w(t)\|_2$, $c_2 > 0$ も成立することが確認される. さらに, (30a) から (31a) を

引くことによってサブシステム (32) を得る.

$$\begin{aligned} \dot{e}_i(t) &= (A_{ii} + B_{ii}^2 K_{ii}^{(k)}) e_i(t) + O(\varepsilon) e(t) \\ &\quad + O(\varepsilon^{2^k}) y(t) \end{aligned} \quad (32)$$

ただし, $e_i(t) = x_i(t) - y_i(t)$, $e_i(0) = 0$ である.

サブシステム (32) より,

$$\begin{aligned} \|e(t)\|_2 &\leq c_3 \varepsilon^{2^k} \|y(t)\|_2 \leq c_4 \varepsilon^{2^k} \|w(t)\|_2, \quad c_3, c_4 > 0 \\ e^T(t) &:= \begin{bmatrix} e_1^T(t) & \cdots & e_N^T(t) \end{bmatrix}^T \in \mathbf{R}^{\bar{n}} \end{aligned}$$

が成立することは同様に確認される. ここで, $\|P_\varepsilon - P_\varepsilon^{(k)}\| = O(\varepsilon^{2^k})$ に注意すれば, $\|\bar{Q} - \tilde{Q}\| = m_0 \varepsilon^{2^k}$, $m_0 > 0$ が成立することがわかる. ただし, $\bar{Q} = Q + K^{(k)T} K^{(k)}$ および $\tilde{Q} = Q + K^T K = Q + [K^{(k)} + O(\varepsilon^{2^k})]^T [K^{(k)} + O(\varepsilon^{2^k})]$ である.

以上の準備のもと, シュワルツの不等式を利用して以下の不等式を得る.

$$\begin{aligned} |J^{(k)} - J| &\leq \int_0^\infty [m_1 \|e(t)\| \|x(t)\| + m_2 \|e(t)\| \|y(t)\| \\ &\quad + m_0 \varepsilon^{2^k} \|x(t)\| \|y(t)\|] dt \\ &\leq \bar{m} [\|e(t)\|_2 (\|x(t)\|_2 + \|y(t)\|_2) \\ &\quad + \varepsilon^{2^k} \|x(t)\|_2 \|y(t)\|_2] \end{aligned} \quad (33)$$

ただし, $\bar{m} = \max\{m_0, m_1, m_2\}$, $m_1 = \|\bar{Q}\|$, $m_2 = \|\tilde{Q}\|$ である. 一方, $\|x(t)\|_2 \leq c_1 \|w(t)\|_2$, $\|y(t)\|_2 \leq c_2 \|w(t)\|_2$, $\|e(t)\|_2 \leq c_4 \varepsilon^{2^k} \|w(t)\|_2$ を利用して不等式 (33) は (34) のように変形できる.

$$|J^{(k)} - J| \leq \bar{m}_0 \varepsilon^{2^k} \|w(t)\|_2^2 \quad (34)$$

ただし, $\bar{m}_0 := \bar{m}[c_1(c_1 + c_2) + c_1 c_2]$ である. 最終的に条件式 $J < \gamma^2 \|w(t)\|_2^2$ および不等式 (34) を考慮して

$$J^{(k)} < [\gamma^2 + O(\varepsilon^{2^k})] \|w(t)\|_2^2 < [\gamma + O(\varepsilon^{2^k})]^2 \|w(t)\|_2^2 \quad (35)$$

を得ることができる. これは $O(\varepsilon^{2^k})$ 高近似 H_∞ 状態フィードバックコントローラ $u_{\text{exa}}(t) = -B_\varepsilon^{2T} P_\varepsilon^{(k)} x(t)$ が $\gamma + O(\varepsilon^{2^k})$ レベルの H_∞ パフォーマンスを達成することを意味する. 以上より, 定理 5 の証明が完了される. $\square$

5.2 結合パラメータ ε が未知の場合

結合パラメータ ε が未知な場合, 数値計算によって高近似 H_∞ 状態フィードバックコントローラ (28) を設計することは不可能である. この章では ε に依存しない H_∞ 状態フィードバックコントローラの設計を考える.

設計の基本アイデアは, 状態フィードバックコントローラ (28) において $k = 0$ とし, $O(\varepsilon)$ 以上の項を恒等的に 0 にすることである. ε に依存しない状態フィードバックコントローラ (36) を与える.

$$\begin{aligned} u_{\text{app}}(t) &= K_{\text{app}} x(t) \\ &= \text{block diag} \begin{pmatrix} u_{1\text{app}}(t) & \cdots & u_{N\text{app}}(t) \end{pmatrix} \\ &= -\text{block diag} \begin{pmatrix} B_{11}^{2T} \bar{P}_{11} & \cdots & B_{NN}^{2T} \bar{P}_{NN} \end{pmatrix} x(t) \end{aligned} \quad (36)$$

ε に依存しない近似状態フィードバックコントローラ (36) による H_∞ ノルムの劣化に関して以下の系を得ることができる。

[系 1] 仮定 1-4 のもと、近似状態フィードバックコントローラ (36) による閉ループシステムの H_∞ ノルムに関して不等式 (37) が成立する。

$$\|\bar{G}(s)\|_\infty < \gamma + O(\varepsilon) \quad (37)$$

ただし、 $\bar{G}(s) := (C + DK_{\text{app}})(sI_n - A_\varepsilon - B_\varepsilon^2 K_{\text{app}})^{-1} B_\varepsilon^1$ である。

(証明) 証明はコントローラ (28) に対して $k = 0$ とおき、定理 5 と同様にして行なわれるので省略する。□

不等式 (37) は不等式 (29) に対して $k = 0$ としたときの結果に相当することに注意されたい。

6. シミュレーション

Table 1

ε	$\bar{\gamma}$
0.5065	5.042969
10^{-1}	4.796875
10^{-2}	4.761719
10^{-3}	4.726563
10^{-4}	4.726563
10^{-5}	4.726563

Table 2

k	$\ G(P_\varepsilon^{(k)})\ $
0	4.5205×10
1	4.0651×10
2	3.0826
3	2.0354×10^{-2}
4	8.3071×10^{-7}
5	5.9002×10^{-10}

提案されたアルゴリズムおよびコントローラの性能を評価するためにシミュレーションを行なう。本論文で扱われる弱結合システムは、文献 2) で紹介されている 4 次元のサブシステムが 3 つで構成されている実務的な電力システムを題材としている。システム行列をつぎのページで与える²⁾。ただし、外乱の係数行列 B_{ii}^1 は任意に設定されている。弱結合パラメータの値は $\varepsilon = 0.5065$ である。まず、低次元リッカチ方程式 (7) が正定対称安定化をもつための設計パラメータ γ_i の値をそれぞれ計算すると、容易に $\gamma_1 = 3.144531$, $\gamma_2 = 4.832031$, $\gamma_3 = 2.582031$ が得られる。したがって、定理 1 によりリッカチ方程式 (4) は十分小さなパラメータ ε に対して $\gamma > \bar{\gamma} = \max\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\} = 4.832031$ の範囲で正定対称安定化をもつことがわかる。一方、 $\varepsilon = 0.5065$ でのリッカチ方程式 (4) は MATLAB を利用して $\gamma > \bar{\gamma} = 5.042969$ の範囲で解をもつ。 $\varepsilon = 0.5065$ が比較的大きな値なので、 $\bar{\gamma} = 4.832031$ および $\bar{\gamma} = 5.042969$ には $\bar{\gamma} < \bar{\gamma}$ なる矛盾関係がある。しかしながら、 ε を小さく変化させたときの $\bar{\gamma}$ を計算すれば Table 1 より $\varepsilon \rightarrow +0$ で $\bar{\gamma} > \bar{\gamma}$ であることが確認される。したがって、 ε が十分に小さい範囲で定理 1 の結果が十分条件であることが容易に理解される。

以下、 $\gamma = 8.0$ ($> \bar{\gamma}$) としてリッカチ方程式 (4) を解くことを考える。 $\|G(P_\varepsilon^{(k)})\| < 10^{-9}$ の収束条件のもとニュートン法 (12a) によるアルゴリズムは $k = 5$ 回の繰返し計算で収束した。収束のようすを Table 2 に示す。また、異なった ε に対する収束のようすを Table 3 に与える。Table 2, 3 より、アルゴリズム (12a) が二次収束であることが確認され

る。以上より、条件式 (14) が妥当であることが理解される。

収束判別式についての結果は Table 4 に与えられる。Table 4 よりすべての ε に対しても $2\theta \gg 1$ となり、収束判別式を満足していないことが確認される。したがって、収束判別式を満足していなくてもすべての ε に対してアルゴリズム (12a) が二次収束しているため、収束判別式 (20) は非常に保守的な十分条件であることが容易に理解される。本論文のシミュレーションの場合、行列 B_{33}^2 に 10^3 である大きな値を含むため、 $\|S_\varepsilon\| = \|B_\varepsilon^2 B_\varepsilon^{2T} - \gamma^{-2} B_\varepsilon^1 B_\varepsilon^{1T}\| = 10^6$ の値になり、これが収束判別式を満足しない大きな要因となっている。本来、 $\varepsilon \rightarrow 0$ であるとき、Table 4 より $\|S_\varepsilon\| \rightarrow (\text{constant})$, $\|J^{-1}(\varepsilon_0)\|^2 \rightarrow (\text{constant})$, $\|G(P_\varepsilon^{(k)})\| \rightarrow 0$ であるので十分小さな ε に対して、収束判別式を満足するはずである (Table 4 より $\varepsilon = 10^{-13}$ の十分小さな値では収束判別式を満足することが予想される)。しかしながら、 $\|B_{33}^2\| = 10^3$ であるため計算機の精度が倍精度でも 10^{-14} でなく、せいぜい 10^{-10} 程度の精度しか保証しない。その結果、桁落ちなどの誤差の影響により収束判別式を満足しないことは注意すべきである。これは、Table 2 より、いくら繰返し計算回数 k を増やしても 10^{-10} 程度しか精度が保証できないことから確認することが可能である。本論文で扱った例題では、係数行列の値のオーダーが 10^3 程度の大きな違いを有するので、収束判別式を満足することはなかったが、係数行列の値のオーダーが違わないような例題では収束判別を行なうことが可能である。

定理 4 の関係式 (24) を確認するために $\varepsilon = 10^{-3}$ としたときの (23) の残差を繰返し計算ごとに Table 5 に与える。ただし、

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{ii} &:= X_{ii}^{(m)} \Lambda_{ii} + \Lambda_{ii}^T X_{ii}^{(m)} \\ &\quad + \varepsilon^2 \sum_{l \neq i} (X_{il}^{(m)} \Lambda_{li} + \Lambda_{li}^T X_{li}^{(m)}) + U_{ii} \\ \mathcal{F}_{ij} &:= X_{ij}^{(m)} \Lambda_{jj} + \Lambda_{ii}^T X_{ij}^{(m)} + X_{ii}^{(m)} \Lambda_{ij} + \Lambda_{ji}^T X_{jj}^{(m)} \\ &\quad + \varepsilon \sum_{l \neq i, j} (X_{il}^{(m)} \Lambda_{lj} + \Lambda_{li}^T X_{lj}^{(m)}) + U_{ij} \end{aligned}$$

であり、ニュートン法の繰返しは $k = 1$ のときだけを抽出している。Table 5 により、アルゴリズム (23) が一次収束であることが容易に確認される。したがって、残差の程度を表わす (24) が妥当であることが確認される。

最後に H_∞ 状態フィードバックコントローラの設計を行なう。アルゴリズム (12a) によって得られた解 $P_\varepsilon^{(5)}$ によるコントローラを (38) に与える。一方、弱結合パラメータ ε に依存しないコントローラを (39) に与える。このとき、高近似コントローラ (38) による閉ループシステムの H_∞ ノルムの値は $\|G^{(5)}(s)\|_\infty = 6.3135$ である。他方、 ε に依存しないコントローラ (39) による閉ループシステムの H_∞ ノルムの値は $\|\bar{G}(s)\|_\infty = 7.8331$ である。 ε が $\varepsilon = 0.5065$ と比較的大きな値であるのに対して、どちらのコントローラも $\gamma < 8$ を満足している点では ε に依存しないコントローラ

$$u_{\text{exa}}(t) = \begin{bmatrix} -1.5544 & -9.6804 \times 10^{-1} & -6.5388 & -1.0004 \times 10^{-1} & -8.4543 \times 10^{-2} & -8.8126 \times 10^{-4} \\ -4.2823 \times 10^{-2} & -1.9261 \times 10^{-3} & 1.2613 & -2.2955 \times 10^{-1} & -1.4572 & -9.9575 \times 10^{-1} \\ 5.2422 \times 10^{-2} & 1.3625 \times 10^{-3} & 1.6398 & 2.1950 \times 10^{-2} & 1.2885 \times 10^{-1} & 1.5566 \times 10^{-3} \\ -9.7472 \times 10^{-1} & 3.3846 \times 10^{-1} & 4.9245 \times 10^{-2} & 4.9185 \times 10^{-5} & 1.3835 & -1.1395 \times 10^{-2} \\ -9.0012 & 1.0285 \times 10^{-1} & 1.2276 \times 10^{-1} & 1.2281 \times 10^{-4} & 2.9708 & 8.6494 \times 10^{-2} \\ 2.9009 & -2.4165 \times 10^{-1} & -1.7466 & -9.8194 \times 10^{-1} & -5.6680 & 3.7396 \times 10^{-1} \end{bmatrix} x(t). \quad (38)$$

$$u_{\text{app}}(t) = \text{block diag} \left(K_{1\text{app}} \ K_{2\text{app}} \ K_{3\text{app}} \right) x(t) \quad (39)$$

$$K_{1\text{app}} = \begin{bmatrix} -1.5873 & -9.6891 \times 10^{-1} & -7.3115 & -2.5624 \times 10^{-2} \end{bmatrix}$$

$$K_{2\text{app}} = \begin{bmatrix} -1.4191 & -9.9528 \times 10^{-1} & -8.1191 & 1.0093 \times 10^{-1} \end{bmatrix}$$

$$K_{3\text{app}} = \begin{bmatrix} -1.5406 & -9.8174 \times 10^{-1} & -3.6463 & 2.5935 \times 10^{-1} \end{bmatrix}$$

Table 3

k	$\varepsilon = 10^{-1}$ $\ G(P_\varepsilon^{(k)})\ $	$\varepsilon = 10^{-2}$ $\ G(P_\varepsilon^{(k)})\ $	$\varepsilon = 10^{-3}$ $\ G(P_\varepsilon^{(k)})\ $	$\varepsilon = 10^{-4}$ $\ G(P_\varepsilon^{(k)})\ $	$\varepsilon = 10^{-5}$ $\ G(P_\varepsilon^{(k)})\ $
0	8.9250	8.9250×10^{-1}	8.9250×10^{-2}	8.9250×10^{-3}	8.9250×10^{-4}
1	6.0885×10^{-1}	5.4669×10^{-3}	5.6214×10^{-5}	5.6384×10^{-7}	5.7314×10^{-9}
2	3.5602×10^{-3}	4.1067×10^{-7}	1.8069×10^{-10}	1.9164×10^{-10}	1.6374×10^{-10}
3	3.9044×10^{-8}	1.9935×10^{-10}			
4	2.8851×10^{-10}				

Table 4

ε	$\ S_\varepsilon\ $	$\ J^{-1}(\varepsilon_0)\ ^2$	$\ G(P_\varepsilon^{(0)})\ $	2θ
0.5065	1.0000×10^6	3.4482×10^4	4.5205×10	6.2350×10^{12}
10^{-1}	1.0000×10^6	1.7580×10^4	8.9250	6.2761×10^{11}
10^{-2}	1.0000×10^6	1.6994×10^4	8.9250×10^{-1}	6.0668×10^{10}
10^{-3}	1.0000×10^6	1.6988×10^4	8.9250×10^{-2}	6.0646×10^9
10^{-4}	1.0000×10^6	1.6988×10^4	8.9250×10^{-3}	6.0646×10^8
10^{-5}	1.0000×10^6	1.6988×10^4	8.9250×10^{-4}	6.0646×10^7

Table 5

m	$\ \mathcal{F}_{11}\ $	$\ \mathcal{F}_{22}\ $	$\ \mathcal{F}_{33}\ $	$\ \mathcal{F}_{12}\ $	$\ \mathcal{F}_{13}\ $	$\ \mathcal{F}_{23}\ $
0	4.7886×10^{-5}	1.6056×10^{-4}	1.5658×10^{-4}	1.2648×10^{-2}	3.1556×10^{-1}	1.9554×10^{-1}
1	3.3315×10^{-8}	1.3449×10^{-7}	2.8451×10^{-8}	5.7023×10^{-5}	1.3445×10^{-4}	1.4745×10^{-4}
2	2.5399×10^{-11}	7.8958×10^{-11}	2.1680×10^{-10}	2.4816×10^{-8}	1.4617×10^{-7}	1.0797×10^{-7}
3	3.8079×10^{-12}	5.2667×10^{-11}	1.0915×10^{-10}	1.9989×10^{-11}	2.5246×10^{-11}	3.1293×10^{-11}

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -0.266 & -0.009 \\ -2.75 & -2.78 & -1.36 & -0.037 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4.95 & 0 & -55.5 & -0.039 \end{bmatrix}, \quad \varepsilon A_{12} = \begin{bmatrix} 0.0024 & 0 & -0.087 & 0.002 \\ -0.185 & 0 & 1.11 & -0.011 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.222 & 0 & 8.17 & 0.004 \end{bmatrix}, \quad \varepsilon A_{13} = \begin{bmatrix} 0.073 & 0 & -0.25 & 0.003 \\ -0.46 & 0 & 2.8 & -0.02 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.924 & 0 & 17.5 & 0.02 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon A_{21} = \begin{bmatrix} 0.021 & 0 & 0.121 & 0.003 \\ -1.1 & 0 & -1.62 & -0.015 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2.43 & 0 & 1.37 & -0.034 \end{bmatrix}, \quad A_{22} = \begin{bmatrix} -0.21 & 1 & -1.6 & -0.005 \\ -1.9 & -1.8 & 9.3 & -0.12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3.1 & 0 & -56 & 0.032 \end{bmatrix}, \quad \varepsilon A_{23} = \begin{bmatrix} 0.06 & 0 & 0.46 & 0.002 \\ -1 & 0 & 1.49 & -0.04 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.12 & 0 & 29.8 & -0.028 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon A_{31} = \begin{bmatrix} -0.002 & 0 & 0.83 & 0 \\ -6.78 & 0 & -10.1 & 0.09 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.24 & 0 & 0.498 & -0.017 \end{bmatrix}, \quad \varepsilon A_{32} = \begin{bmatrix} 0.011 & 0 & 0.22 & 0 \\ -2.1 & 0 & 1.7 & -0.123 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.07 & 0 & 6.38 & -0.011 \end{bmatrix}, \quad A_{33} = \begin{bmatrix} -0.197 & 1 & -1.2 & -0.003 \\ -54.5 & -20 & 70.1 & -2.37 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3.4 & 0 & -21.0 & -0.017 \end{bmatrix}$$

$$B_\varepsilon^1 = \text{block diag} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right), \quad B_\varepsilon^2 = \text{block diag} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 36.1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 78.9 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 10^3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right), \quad C = \begin{bmatrix} C_0 \\ O_{6 \times 12} \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} O_{6 \times 3} \\ D_0 \end{bmatrix}, \quad C_0 = \text{block diag} \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right), \quad D_0 = \text{block diag} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

(39) の利用で十分である。しかしながら、 ε が既知である場合には、閉ループシステムの H_∞ ノルムに余裕がある高

似コントローラ (38) の利用が適切であると考えられる。

シミュレーションの結果から、たとえサブシステムの数

4 個以上であるとしても、コントローラーの設計に必要とされる計算ワークスペースが 4 次元で行なえるというところに有用性が存在する。すなわち、弱結合システム (1) が N 個の 4 次元のサブシステムで構成されているとしても、必要とされる計算ワークスペースは 4 次元であるところに本論文で提案されたアルゴリズムの価値があると考えられる。

7. ま と め

本論文では弱結合システムのための H_∞ 状態フィードバック制御を扱った。大規模な次元を伴うリッカチ方程式を解くために、ニュートン法および不動点アルゴリズムを結合したアルゴリズムは新たに提案された。提案された数値計算アルゴリズムが再帰的アルゴリズム⁴⁾のような既存の方法と非常に異なっており、結果として、リッカチ方程式に対してはニュートン法を適用することによって、収束速度を向上させた。また、ニュートン法によって導出されたリアプノフ方程式に対しては、不動点アルゴリズムを適用することによって行列計算に必要なワークスペースを低減させることに成功した。さらに、新たに提案された高近似 H_∞ 状態フィードバックコントローラーが最適な H_∞ コストに対して $O(\varepsilon^{2^k})$ 近似を達成するということを明らかにした。同様に、弱結合パラメータ ε が未知な場合を想定して、最適な H_∞ コストに対して $O(\varepsilon)$ 近似を達成する ε に依存しないコントローラーを提案した。最終的に、本論文で提案されたコントローラーがサブシステムの次元と比較して同じ次元で計算されることができるので、提案された設計方法は非常に有用でそして信頼性が高いと考えられる。

本論文では考慮しなかったが、弱結合システムのための H_∞ 出力フィードバック制御問題があげられる。出力フィードバック制御問題を考えることによって、実システムへの適用範囲が拡張されると期待される。そこで、 H_∞ 出力フィードバック制御の適用を考えてみる。良く知られているように、 H_∞ 出力フィードバック制御問題は、状態フィードバック制御問題に現れるリッカチ方程式の双対型のリッカチ方程式を解くことによってコントローラーを得ることが可能である。したがって、本論文で提案されたアルゴリズムを利用すれば容易に双対型リッカチ方程式の解を得ることができる。以上より、弱結合システムにおける H_∞ 出力フィードバック制御問題への拡張は簡単であり、実システムへの応用も無理なく実行できると期待される。

最後に、本論文に対して、有益なコメントを頂きました査読者の皆様に謝意を表します。

参 考 文 献

- 1) D. D. Siljak : Large-Scale Dynamic Systems : Stability and Structure, North Holland, Amsterdam (1978)
- 2) J. D. Delacour, M. Darwish and J. Fantin : Control strategies for large-scale power systems, Int. J. Control, **27-5**, 753/767 (1978)
- 3) 新岡, 横山, 藤田, 白井 : 多機電力システムの分散型励磁系安定化制御, 電気学会論文誌 B, **120-6**, 808/814 (2000)

- 4) X. Shen, Q. Xia, M. Rao and V. Gourishankar : Optimal control for large-scale systems: a recursive approach, Int. J. Systems Sci., **25-12**, 2235/2244 (1994)
- 5) H. Mukaidani, H. Xu and K. Mizukami : New iterative algorithm for algebraic Riccati equation related to H_∞ control problem of singularly perturbed systems, IEEE Trans. Automatic Control, **46-10**, 1659/1666 (2001)
- 6) 向谷, 水上, 徐 : 標準, 非標準特異摂動システムにおける H_∞ 制御問題のための再帰的アルゴリズム, 計測自動制御学会論文集, **34-6**, 555/562 (1998)
- 7) H. Mukaidani : New results for H_2 state feedback control of large-scale Systems, Proceedings of 2003 European Control Conference, CD-Rom, Cambridge (2003)
- 8) H. Mukaidani : Numerical computation for H_∞ state feedback control of large-scale systems, Proceedings of the 10th IFAC/IFORS/IMACS/IFIP Symposium on Large Scale Systems : Theory and Applications, 310/316 (2004)
- 9) H. Mukaidani, H. Xu and K. Mizukami : Near-optimal H_∞ state feedback control of power systems, Proceedings of IEEE Conference on Control Applications (CCA), 1657/1661 (2004)
- 10) Z. Gajic, D. Petkovski and X. Shen : Singularly Perturbed and Weakly Coupled Linear System-A Recursive Approach : Lecture Notes in Control and Information Sciences, **140**, Springer-Verlag, Berlin (1990)
- 11) A. J. Laub : A Schur method for solving algebraic Riccati equations, IEEE Trans. Automatic Control, **24-6**, 913/921 (1979)
- 12) V. Ionescu, C. Oară and M. Weiss : Generalized Riccati Theory and Robust Control, John Wiley and Sons, New York (1999)
- 13) D. L. Kleinman : On the iterative technique for Riccati equation computations, IEEE Trans. Automatic Control, **13-1**, 114/115 (1968)
- 14) T. Yamamoto : A method for finding sharp error bounds for Newton's method under the Kantorovich assumptions, Numerische Mathematik, **49**, 203/220 (1986)
- 15) K. Zhou : Essentials of Robust Control, Prentice Hall, New Jersey (1998)
- 16) J. R. Magnus and H. Neudecker : Matrix Differential Calculus with Applications in Statistics and Econometrics, John Wiley and Sons, New York (1999)

[著 者 紹 介]

向 谷 博 明 (正会員)

1994 年広島大学大学院工学研究科情報工学専攻博士課程前期修了。97 年 10 月同大学大学院工学研究科情報工学専攻博士課程後期修了。博士 (工学)。98 年広島市立大学情報科学部助手。2002 年広島大学大学院教育学研究科講師。2005 年同大学大学院教育学研究科助教授となり現在に至る。主として、特異摂動システム、ロバスト制御、数値解析に関する研究に従事。IEEE、電気学会および機械学会会員。