切換に起因する外乱応答の $\mathcal{L}_2$ ゲイン解析に対する必要十分条件

浅井 徹*

Necessary and Sufficient Conditions for Analysis of $\mathcal{L}_2$ Gain across Switching

Toru ASAI*

Switching in control systems often causes bumpy responses. Recently, some methods have been proposed to analyze $\mathcal{L}_2$ gain from disturbance inputs before switching to control outputs after switching for systems with uncertainty. However, the results are conservative, since the analysis is aimed for robust performance problems and the conditions given in those methods are sufficient conditions. On the other hand, by considering the corresponding nominal case, this paper gives necessary and sufficient conditions. The resultant conditions are given in terms of both Lyapunov equations and linear matrix inequalities. Moreover, the results provide generalization of the Hankel norm analysis. A numerical example shows the effectiveness of the proposed gain and the analysis conditions.

Key Words: switching, bumpless transfer, Hankel norm, Lyapunov equations, LMIs

1. はじめに

現実の制御対象を制御する場合、制御中に補償器などの要素を切換えることがある。その際、安易に切換を行なうと、切換直後に応答が大きく乱れることがある。このような応答は閉ループ系の制御性能を著しく損ない、また、制御対象に物理的な損傷を与えるなどの危険を伴うことがあるので望ましくない。そこで、このような応答を抑制する手法が必要となる。

従来より、この目的を達成するためのさまざまな手法が提案されている^{1)~3)}。しかしながら、これらの手法は、結果に対する理論的な保証がない、あるいは制御対象のモデル化誤差が考慮されていないなどの理由から、実用上の適用範囲が限定される可能性が高い。これに対し文献4)では、外乱と不確かさの存在を陽に考慮して、応答の乱れの大きさの上界を線形行列不等式(LMI)を用いて解析する手法が提案されている。具体的には、切換前の外乱から切換後の応答への $\mathcal{L}_2$ ゲインを解析する手法を与えている。また、その結果はハンケルノルム解析の一般化にもなっている。

しかしながら、文献4)で与えられている結果は十分条件であり、 $\mathcal{L}_2$ ゲインに対する上界しか得られない。さらに、現在のところ $\mathcal{L}_2$ ゲインの下界を与える手法も知られていないため、得られる上界の保守性の程度を見積ることができない。

文献4)はロバスト性能の評価を目的としている。ここで、

これまでにロバスト制御で得られてきた結果からの類推より、不確かさを考えなければ、より保守性の低い結果や、さらには必要十分条件が得られることが予想される。そこで本論文では、不確かさが存在しない場合を考え、切換前の外乱から切換後の応答への $\mathcal{L}_2$ ゲインを解析するための必要十分条件を導出することを考える。具体的には、リアプノフ方程式、LMIに基づいて必要十分条件を与えることができることを示す。また、数値例によって提案する手法の有効性を検証する。

本論文の結果を用いれば、不確かさがいない場合の $\mathcal{L}_2$ ゲインを厳密に評価することができる。さらに、不確かさを適当に固定した対象の $\mathcal{L}_2$ ゲインを解析することによって、不確かさが存在する場合の最悪 $\mathcal{L}_2$ ゲインの下界を得ることも可能となる。

本論文では以下の記法を用いる。区間 (a, b) が与えられたとき、 $\mathcal{L}_{2(a,b)}$ は以下のように定義されるベクトル値関数集合を表わす。

$$\mathcal{L}_{2(a,b)} = \left\{ x : \int_a^b \|x(t)\|^2 dt < \infty \right\}$$

ただし、 $\|\cdot\|$ はユークリッドノルムを表わす。さらに、 $\|x\|_{2(a,b)}$ は区間 (a, b) 上の $\mathcal{L}_2$ ノルム、すなわち

$$\|x\|_{2(a,b)} = \left(\int_a^b \|x(t)\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

を表わす。上記の定義は区間が (a, b) , $[a, b)$ などの場合にも同様に用いることとする。本論文ではシステムと作用素を同義のものとみなし、文脈にしたがっていずれかの表現を用いることとする。ただし、すべてのシステムは因果的であるとする。また、任意の行列 M に対して $M^\dagger$ は M の擬似逆行列を表わす。任意の半正定行列 $M \geq 0$ に対して、 $M^{\frac{1}{2}} \geq 0$ は

* 大阪大学大学院工学研究科

* Graduate School of Engineering, Osaka University
(Received August 20, 2004)

(Revised January 11, 2005)

を満足するものとする。一般に、切換前のシステムが安定であれば、 $x_p(-\infty)$ はそれが有界である限り $t=0$ での振舞いに影響を与えない。よって、導出が多少面倒にはなるが、(6) 式の仮定を $|x_p(-\infty)| < \infty$ としても同様な議論は可能である。簡単のため、本論文では (6) 式の仮定のもとで考える。

H_f の応答は切換時の状態 $x_f(0_+)$ によって一意に定められる。ここでは、 $x_f(0_+)$ は切換直前の H_p の状態 $x_p(0)$ と与えられた行列 $S \in \mathbf{R}^{n_f \times n_p}$ によってつぎのように定められるものとする。

$$x_f(0_+) = S x_p(0) \quad (7)$$

Fig. 2 のブロック線図において、ブロックの上下方向に接続されている線は状態またはメモリに対する参照、設定を意味し、破線は切換時に状態などの設定が行なわれることを表わしている。

Fig. 2 の枠組は、さまざまな切換を扱うことができる。実際、たとえば制御系の係数の変化、補償器の追加、除去などの場合を扱うことができる。また、補償器切換の場合においても、オフライン補償器の初期値を 0 にして切換える場合だけでなく、従来のバンプレス手法で行なわれているように、切換前にオフライン補償器をカルマンフィルタなどで駆動させておく場合¹⁾なども扱うことが可能である。

以上のように定義されるシステム H_p , H_f , S に対し、本論文の目的は、切換前の外乱 w が切換後の評価出力 z に与える影響の大きさを解析することである。そこで、本論文では以下の問題を考える。

[問題] H_p , H_f はそれぞれ (4), (5) 式で定義されるシステム、 $S \in \mathbf{R}^{n_f \times n_p}$ は与えられた行列とし、それらは (7) 式にしたがって切換わるものとする。このとき、以下の式で定義されるゲイン Γ を求めよ。

$$\Gamma = \sup_{w \in \mathcal{L}_2(-\infty, 0] \setminus \{0\}} \frac{\|z\|_{2(0, \infty)}}{\|w\|_{2(-\infty, 0]}} \quad (8)$$

上記の問題に対して、本論文では方程式および不等式に基づく必要十分な解析条件を与える。

切換を伴う現実の制御系では有限時間間隔で複数の切換が発生する場合もあるので、Fig. 2 の枠組は必ずしも現実に対応したものではない。しかしながら、そのような場合であっても、各切換間隔の間隔が十分長ければこの仮定に基づいた議論は実用上妥当であると考えられる。

3. 主要な結果

3.1 リアプノフ方程式に基づく解析条件

本論文の問題に対し、まず最初に、方程式に基づく結果を与える。

《定理 1》 (4), (5), (7) 式で与えられるシステムに対し、 A_p , A_f のすべての固有値は開左半平面にあるものとする。さらに、 X , Y をそれぞれ以下のリアプノフ方程式

$$A_p X + X A_p^T + B_p B_p^T = 0 \quad (9)$$

$$A_f^T Y + Y A_f + C_f^T C_f = 0 \quad (10)$$

の解とする。このとき

$$\Gamma = \sqrt{\rho(S^T Y S X)} \quad (11)$$

が成立する。また、 $\Gamma > 0$ のとき Γ を達成する w は

$$w_*(t) = B_p^T e^{-A_p^T t} x_* \quad t \in (-\infty, 0] \quad (12)$$

によって与えられる。ただし、 x_* は $S^T Y S X$ の最大固有値に対する固有ベクトルである。

定理 1 はリアプノフ方程式に基づいて Γ を解析する手法を与えている。さらに、定理 1 は Γ を達成する最悪外乱 w_* も与えている。最悪外乱は $\Gamma > 0$ のときのみ与えられているが、 $\Gamma = 0$ の場合には $\|w\|_{2(-\infty, 0]} \neq 0$ となる任意の w に対して

$$\frac{\|z\|_{2(0, \infty)}}{\|w\|_{2(-\infty, 0]}} = \Gamma = 0$$

が達成される。

後に示す定理 1 の証明では以下の 2 つの補題を用いる。

[補題 2] 任意の行列 $E \in \mathbf{R}^{n \times m}$, $F \in \mathbf{R}^{m \times n}$ に対して、 $\rho(EF) = \rho(FE)$ である。さらに、 EF あるいは FE のいずれか一方が非負の実固有値しかもたないとき、他方も非負の実固有値のみをもち、

$$\rho(EF) = \lambda_{\max}(FE) = \lambda_{\max}(EF) = \rho(FE)$$

が成り立つ。

(証明) EF と FE の零でない固有値の集合は等しいことからあきらか。□

[補題 3] $X \geq 0$ ($X \in \mathbf{R}^{n \times n}$), $Y \geq 0$ ($Y \in \mathbf{R}^{m \times m}$) をそれぞれ任意に与えられた半正定行列、 $S \in \mathbf{R}^{m \times n}$ を任意に与えられた行列とする。このとき、以下の不等式が成立する。

$$\lambda_* X - X S^T Y S X \geq 0 \quad (13)$$

$$\lambda_* X^\dagger - X^\dagger X S^T Y S X X^\dagger \geq 0 \quad (14)$$

ただし、 $\lambda_* = \rho(S^T Y S X)$ である。

(証明) 補題 2 より

$$\lambda_* = \rho(S^T Y S X^{\frac{1}{2}} X^{\frac{1}{2}}) = \rho(X^{\frac{1}{2}} S^T Y S X^{\frac{1}{2}})$$

が成り立つ。よって、 λ_* は $X^{\frac{1}{2}} S^T Y S X^{\frac{1}{2}} \geq 0$ の最大固有値となり、次式が成立する。

$$\lambda_* I - X^{\frac{1}{2}} S^T Y S X^{\frac{1}{2}} \geq 0 \quad (15)$$

(15) 式の両辺に左右からそれぞれ $X^{\frac{1}{2}}$ をかけると (13) 式を得る。さらに、(13) 式の左右からそれぞれ $X^\dagger$ をかけると (14) 式を得る。□

補題 3 の証明からわかるように、 $S^T Y S X$ の固有値はすべて非負の実数である。よって、 $\lambda_{\max}(S^T Y S X) = \rho(S^T Y S X)$ が成り立つことから、定理 1 の x_* は $\rho(S^T Y S X)$ に対する固有ベクトルである。

以上の補題を用いて、以下に定理 1 の証明を示す。

(証明) 記号を簡略するために、ここでは $\lambda_* = \rho(S^T Y S X)$ とする。以降では、まず $\|w\|_{2(-\infty, 0]} \neq 0$ を満足する任意の w に対して

$$\frac{\|z\|_{2(0,\infty)}}{\|w\|_{2(-\infty,0]}} \leq \sqrt{\lambda_*} \quad (16)$$

が成り立つことを示したうえで、(12) 式の w_* に対して、

$$\frac{\|z_*\|_{2(0,\infty)}}{\|w_*\|_{2(-\infty,0]}} = \sqrt{\lambda_*} \quad (17)$$

となることを示す。ただし、 z_* は w_* に対する出力である。

(9) 式が成り立つとき、つぎの不等式が成立する

$$\begin{bmatrix} A_p X + X A_p^T & B_p \\ B_p^T & -I \end{bmatrix} \leq 0 \quad (18)$$

ここで、 $w \in L_2(-\infty, 0]$ を任意に与えられた外乱、 $x_p(t)$ を (4) 式にしたがう状態とし、(18) 式の左右から、それぞれ以下のベクトル

$$\begin{bmatrix} X^\dagger x_p(t) \\ w(t) \end{bmatrix}^T, \quad \begin{bmatrix} X^\dagger x_p(t) \\ w(t) \end{bmatrix}$$

をかけると、つぎの不等式が成立する。

$$\begin{aligned} & x_p(t)^T X^\dagger A_p X X^\dagger x_p(t) + x_p(t)^T X^\dagger X A_p^T X^\dagger x_p(t) \\ & + x_p(t)^T X^\dagger B_p w(t) + w(t)^T B_p^T X^\dagger x_p(t) \\ & - w(t)^T w(t) \leq 0 \end{aligned} \quad (19)$$

仮定より $x_p(-\infty) = 0$ であるので、 $x_p(t)$ は任意の $t < 0$ に対して (4) 式の状態方程式の可制御部分空間に属する。すなわち、任意の $t < 0$ で $x_p(t) \in \text{Im} X$ が成立することから

$$(I - X X^\dagger) x_p(t) = 0 \quad \forall t < 0$$

つまり

$$x_p(t) = X X^\dagger x_p(t) \quad \forall t < 0 \quad (20)$$

が成立する。よって、(19) 式はつぎの不等式と等価である。

$$\begin{aligned} & x_p(t)^T X^\dagger A_p x_p(t) + x_p(t)^T A_p^T X^\dagger x_p(t) \\ & + x_p(t)^T X^\dagger B_p w(t) + w(t)^T B_p^T X^\dagger x_p(t) \\ & - w(t)^T w(t) \leq 0 \end{aligned} \quad (21)$$

(21) 式は、(4) 式のもとでつぎの不等式とも等価である。

$$\frac{d}{dt} (x_p(t)^T X^\dagger x_p(t)) - w(t)^T w(t) \leq 0 \quad (22)$$

(22) 式を区間 $(-\infty, 0]$ 上で積分することにより

$$\begin{aligned} & x_p(0)^T X^\dagger x_p(0) - x_p(-\infty)^T X^\dagger x_p(-\infty) \\ & - \|w\|_{2(-\infty, 0]}^2 \leq 0 \end{aligned}$$

が得られ、さらに仮定より $x_p(-\infty) = 0$ であるので、

$$x_p(0)^T X^\dagger x_p(0) \leq \|w\|_{2(-\infty, 0]}^2 \quad (23)$$

が成り立つ。

一方、(10) 式の解 Y に対して

$$\|z\|_{2(0,\infty)}^2 = x_f(0)^T Y x_f(0)$$

が成り立つことが知られている^{5), 6)}。よって、(7), (20) 式より

$$\begin{aligned} \|z\|_{2(0,\infty)}^2 &= x_p(0)^T S^T Y S x_p(0) \\ &= x_p(0)^T X^\dagger X S^T Y S X X^\dagger x_p(0) \end{aligned} \quad (24)$$

が成立する。

さらに、 A_p , A_f のすべての固有値は開左半平面にあるので $X \geq 0$, $Y \geq 0$ である。よって、補題 3 より次式が成立する。

$$\begin{aligned} & \lambda_* x_p(0)^T X^\dagger x_p(0) - x_p(0)^T X^\dagger X S^T Y S X X^\dagger x_p(0) \\ & = x_p(0)^T (\lambda_* X^\dagger - X^\dagger X S^T Y S X X^\dagger) x_p(0) \\ & \geq 0 \end{aligned} \quad (25)$$

このとき、(23), (24), (25) 式より

$$\lambda_* \|w\|_{2(-\infty, 0]}^2 - \|z\|_{2(0,\infty)}^2 \geq 0$$

が成り立つので、 $\|w\|_{2(-\infty, 0]} \neq 0$ となる w に対して

$$\frac{\|z\|_{2(0,\infty)}^2}{\|w\|_{2(-\infty, 0]}^2} \leq \lambda_* \quad (26)$$

が成り立つ。(26) 式の $w \in L_2(-\infty, 0] \setminus \{0\}$ は任意でよかったので次式が成立する。

$$\Gamma \leq \sqrt{\lambda_*} \quad (27)$$

つぎに、 $\lambda_* > 0$ の場合に対して、 w が (12) 式の w_* によって与えられたとする。このとき、

$$\begin{aligned} \|w_*\|_{2(-\infty, 0]}^2 &= \int_{-\infty}^0 x_*^T e^{-A_p t} B_p B_p^T e^{-A_p^T t} x_* dt \\ &= x_*^T \left(\int_0^\infty e^{A_p t} B_p B_p^T e^{A_p^T t} dt \right) x_* \end{aligned}$$

である。ここで、(9) 式のリアプノフ方程式の解が

$$X = \int_0^\infty e^{A_p t} B_p B_p^T e^{A_p^T t} dt$$

と書かれることに注意すると、 $\|w_*\|_{2(-\infty, 0]}^2$ を

$$\|w_*\|_{2(-\infty, 0]}^2 = x_*^T X x_* \quad (28)$$

と書くことができる。

一方、 $x_p(0)$ は

$$\begin{aligned} x_p(0) &= \int_{-\infty}^0 e^{A_p(0-t)} B_p B_p^T e^{-A_p^T t} x_* dt \\ &= \left(\int_0^\infty e^{A_p t} B_p B_p^T e^{A_p^T t} dt \right) x_* = X x_* \end{aligned}$$

である。よって、 w_* に対する出力を z_* とすると、 $x_f(0_+)$, $\|z_*\|_{2(0,\infty)}$ はそれぞれ

$$x_f(0_+) = S X x_* \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \|z_*\|_{2(0,\infty)}^2 &= x_f(0_+)^T Y x_f(0_+) \\ &= x_*^T X S^T Y S X x_* \end{aligned} \quad (30)$$

となる。さらに、 x_* の定義と補題 2 より

$$\lambda_* x_* - S^T Y S X x_* = (\lambda_* I - S^T Y S X) x_* = 0 \quad (31)$$

が成り立つことから、

$$\begin{aligned} 0 &= x_*^T X (\lambda_* x_* - S^T Y S X x_*) \\ &= \lambda_* x_*^T X x_* - x_*^T X S^T Y S X x_* \\ &= \lambda_* \|w_*\|_{2(-\infty, 0]}^2 - \|z_*\|_{2(0,\infty)}^2 \end{aligned} \quad (32)$$

が成り立つ。

ここで、仮に $\|w_*\|_{2(-\infty,0]}^2 = 0$ とすると (28) 式より $x_*^T X x_* = 0$ が成り立つ。さらに仮定より $X \geq 0$ であるので $X x_* = 0$ が成り立つ。このとき (31) 式より $\lambda_* x_* = 0$ となるが、これは $\lambda_* > 0$, $x_* \neq 0$ に矛盾する。よって、 $\|w_*\|_{2(-\infty,0]}^2 \neq 0$ である。

以上より、 $w = w_*$ のとき $\|w_*\|_{2(-\infty,0]}^2 \neq 0$ であり、かつ

$$\frac{\|z_*\|_{2(0,\infty)}}{\|w_*\|_{2(-\infty,0]}} = \sqrt{\lambda_*} \quad (33)$$

が成り立つ。□

3.2 LMI に基づく解析条件

前節では方程式に基づいて解析条件を与えた。方程式を用いれば、定理 1 のように最悪外乱を与えることも可能である。一方、解析条件に基づいて設計条件を導出する場合、方程式よりも不等式のほうが容易に行なえることが多い。そこで、この節では不等式に基づく解析条件も示す。ここで示す解析条件も必要十分条件である。

《定理 4》 (4), (5), (7) 式で与えられるシステムを考える。このとき、つぎの条件

- A_p , A_f のすべての固有値が開左半平面に存在する
- $\Gamma < \gamma$

が成り立つための必要十分条件は、以下の不等式を満足する $\hat{X} > 0$, $\hat{Y} > 0$ が存在することである。

$$\begin{bmatrix} \hat{X} A_p + A_p^T \hat{X} & \hat{X} B_p \\ B_p^T \hat{X} & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (34)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{Y} A_f^T + A_f \hat{Y} & \hat{Y} C_f^T \\ C_f \hat{Y} & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (35)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{X} & S^T \\ S & \hat{Y} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (36)$$

定理 4 は Γ に関する必要十分な解析手法を不等式に基づいて与えている。とくに、(34), (35), (36) 式は変数 $\hat{X}$, $\hat{Y}$ 式に関する LMI になっており、効率的に解を求めることが可能である。詳細は省略するが、(36) 式を等号のない不等式 (> 0) に置き換えても、やはり必要十分条件である。

定理 4 を証明するためには、定理 1 のほかに以下の補題が必要となる。

[補題 5] $X \geq 0$ ($X \in \mathbf{R}^{n \times n}$), $Y = Y^T \in \mathbf{R}^{m \times m}$ をそれぞれ任意に与えられた半正定行列、対称行列、 $S \in \mathbf{R}^{m \times n}$ を任意に与えられた行列とする。このとき、任意の正数 $\lambda > 0$ に対して

$$\lambda X - X S^T (\varepsilon Y) S X \geq 0 \quad (37)$$

を満足する正数 $\varepsilon > 0$ が存在する。

(証明) 任意の $\lambda > 0$ に対して十分小さな $\varepsilon > 0$ が存在して、次式が成立する。

$$\lambda I - \varepsilon X^{\frac{1}{2}} S^T Y S X^{\frac{1}{2}} \geq 0 \quad (38)$$

ここで、(38) 式の左右から $X^{\frac{1}{2}}$ をかけることにより (37) 式が成立する。□

補題 5 および定理 1 を用いれば定理 4 は以下のように証明される。ただし、十分性については文献 4) で与えられている証明とほぼ同様なので省略し、必要性の証明のみを与える。(証明) [必要性] 定理の仮定が成り立つとすると、以下の不等式を満足する $X_0 > 0$, $Y_0 > 0$ が存在する。

$$A_p X_0 + X_0 A_p^T < 0 \quad (39)$$

$$A_f^T Y_0 + Y_0 A_f < 0 \quad (40)$$

さらに、定理 1 で与えられる λ_* に対して $\gamma > \sqrt{\lambda_*}$ である。このとき、補題 5 より、(9), (10) 式を満足する $X \geq 0$, $Y \geq 0$ に対して、ある $\varepsilon > 0$ が存在して、

$$(\gamma^2 - \lambda_*) X - X S^T (\varepsilon Y_0) S X \geq 0 \quad (41)$$

が成立する。

まず、(41) 式を満足する ε を用いて、

$$Y_1 = Y + \varepsilon Y_0 > 0$$

を定義する。このとき、

$$\begin{aligned} & A_f^T Y_1 + Y_1 A_f + C_f^T C_f = \\ & (A_f^T Y + Y A_f + C_f^T C_f) + \varepsilon (A_f^T Y_0 + Y_0 A_f) < 0 \end{aligned}$$

であるので、

$$A_f Y_1^{-1} + A_f^T Y_1^{-1} + Y_1^{-1} C_f^T C_f Y_1^{-1} < 0$$

すなわち、

$$\begin{bmatrix} A_f Y_1^{-1} + A_f^T Y_1^{-1} & Y_1^{-1} C_f^T \\ C_f Y_1^{-1} & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (42)$$

が成り立つ。

また、正の実数 $\kappa > 0$ に対して

$$Y_2(\kappa) = Y_1^{-1} + \kappa W_\gamma, \quad W_\gamma = \frac{1}{\gamma^2} S X_0 S^T \geq 0$$

$$\mathcal{L}_Y(\kappa) = \begin{bmatrix} A_f Y_2(\kappa) + A_f^T Y_2(\kappa) & Y_2(\kappa) C_f^T \\ C_f Y_2(\kappa) & -I \end{bmatrix}$$

を定義すると、 $Y_1 > 0$ より任意の $\kappa > 0$ に対して $Y_2(\kappa) > 0$ であり、さらに

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_Y(\kappa) &= \begin{bmatrix} A_f Y_1^{-1} + A_f^T Y_1^{-1} & Y_1^{-1} C_f^T \\ C_f Y_1^{-1} & -I \end{bmatrix} \\ &+ \kappa \begin{bmatrix} A_f W_\gamma + A_f^T W_\gamma & W_\gamma C_f^T \\ C_f W_\gamma & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (43)$$

が成立する。よって、(42), (43) 式より、十分小さな $\kappa_* > 0$ に対して

$$\mathcal{L}_Y(\kappa_*) < 0 \quad (44)$$

が成立する。そこで、(44) 式を満足する $\kappa_* > 0$ を用いて $\hat{Y}$ を

$$\hat{Y} = \gamma Y_2(\kappa_*)$$

と定義すれば,

$$\begin{bmatrix} A_f \hat{Y} + A_f^T \hat{Y} & \hat{Y} C_f^T \\ C_f \hat{Y} & -\gamma I \end{bmatrix} = \gamma \mathcal{L}_Y(\kappa_*) < 0$$

となり, (35) 式が成り立つ.

一方, X, X_0, κ_* を用いて

$$X_1 = X + \kappa_* X_0 \quad (45)$$

を定義すると, $X \geq 0, X_0 > 0, \kappa_* > 0$ より $X_1 > 0$ である. また,

$$\begin{aligned} A_p X_1 + X_1 A_p^T + B_p B_p^T = \\ (A_p X + X A_p^T + B_p B_p^T) + \kappa_* (A_p X_0 + X_0 A_p^T) < 0 \end{aligned}$$

が成り立つので,

$$A_p^T X_1^{-1} + X_1^{-1} A_p + X_1^{-1} B_p B_p^T X_1^{-1} < 0$$

すなわち,

$$\mathcal{L}_X = \begin{bmatrix} A_p^T X_1^{-1} + X_1^{-1} A_p & X_1^{-1} B_p \\ B_p^T X_1^{-1} & -I \end{bmatrix} < 0$$

も成り立つ. よって, $\hat{X}$ を

$$\hat{X} = \gamma X_1^{-1}$$

と定義すれば,

$$\begin{bmatrix} \hat{X} A_p + A_p^T \hat{X} & \hat{X} B_p \\ B_p^T \hat{X} & -\gamma I \end{bmatrix} = \gamma \mathcal{L}_X < 0$$

となり, (34) 式が成り立つ.

上記のように定めた $\hat{X}, \hat{Y}$ に対して

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \hat{X} & S^T \\ S & \hat{Y} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{X_1^{-1}}{\sqrt{\gamma}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\gamma} \end{bmatrix} \\ &\times \begin{bmatrix} \gamma^2 X_1 & X_1 S^T \\ S X_1 & Y_2(\kappa_*) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{X_1^{-1}}{\sqrt{\gamma}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\gamma} \end{bmatrix} \quad (46) \end{aligned}$$

が成り立つ. ここで, 補題 3, (41) 式より

$$\begin{aligned} \gamma^2 X - X S^T Y_1 S X &= (\lambda_* X - X S^T Y S X) \\ &+ \{(\gamma^2 - \lambda_*) X - X S^T (\varepsilon Y_0) S X\} \geq 0 \end{aligned}$$

が成立するので

$$\begin{bmatrix} \gamma^2 X & X S^T \\ S X & Y_1^{-1} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (47)$$

である. さらに $X_1, Y_2(\kappa_*)$ の定義と (47) 式より

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \gamma^2 X_1 & X_1 S^T \\ S X_1 & Y_2(\kappa_*) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \gamma^2 X & X S^T \\ S X & Y_1^{-1} \end{bmatrix} \\ &+ \kappa_* \begin{bmatrix} \gamma I \\ \frac{1}{\gamma} S \end{bmatrix} X_0 \begin{bmatrix} \gamma I \\ \frac{1}{\gamma} S \end{bmatrix}^T \geq 0 \quad (48) \end{aligned}$$

が成り立つ. よって, (46), (48) 式より (36) 式も成立する.

□

以上の証明からあきらかなように, 定理 4 の解 $\hat{X}, \hat{Y}$ はそれぞれ定理 1 の解 X, Y の逆行列に対応する変数である.

よって, H_p が不可制御の場合, $\hat{X}$ はきわめて大きな値をとる可能性がある. H_f が不可観測の場合も $\hat{Y}$ に関して同様である. よって, LMI を用いる場合にも, H_p, H_f が不可制御もしくは不可観測モードを持つ場合には, 数値計算上の問題が生じる可能性がある⁷⁾.

3.3 ハンケルノルムの解析

(8) のノルムの定義より, ハンケルノルム⁸⁾はその特別な場合となる. よって, 本論文の結果を用いれば, ただちにハンケルノルムの解析結果を得ることができる.

以下のシステム P を考える.

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B w(t) \quad (49)$$

$$z(t) = C x(t) \quad (50)$$

このとき, P のハンケルノルム $\|P\|_H$ はつぎのように定義される.

$$\|P\|_H = \sup_{w \in L_2(-\infty, 0] \setminus \{0\}} \frac{\|z\|_{2(0, \infty)}}{\|w\|_{2(-\infty, 0]}} \quad (51)$$

(49), (50), (51) 式より, P のハンケルノルムは Fig. 2 において $A_p = A_f = A, B_p = B, C_f = C, S = I$ とした場合となる. よって, 上記の条件を定理 1, 定理 4 に適用することで, ただちに以下の結果が得られる.

[系 6] (49), (50) 式で定義されるシステム P について, A のすべての固有値は開左半平面にあるものとする. さらに, X, Y をそれぞれ以下のリアプノフ方程式

$$AX + XA^T + BB^T = 0 \quad (52)$$

$$A^T Y + YA + C^T C = 0 \quad (53)$$

の解とする. このとき

$$\|P\|_H = \sqrt{\rho(YX)} \quad (54)$$

が成り立つ.

[系 7] P を (49), (50) 式で定義されるシステムとする. このとき, つぎの条件

- A のすべての固有値が開左半平面に存在する
- $\|P\|_H < \gamma$

が成り立つための必要十分条件は, 以下の不等式を満足する $\hat{X} > 0, \hat{Y} > 0$ が存在することである.

$$\begin{bmatrix} \hat{X} A + A^T \hat{X} & \hat{X} B \\ B^T \hat{X} & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (55)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{Y} A^T + A \hat{Y} & \hat{Y} C^T \\ C \hat{Y} & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (56)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{X} & I \\ I & \hat{Y} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (57)$$

系 6 は従来より知られている結果である⁸⁾. 一方, 系 7 と同様な条件は文献 6) にも示されている. ただし, 文献 6) ではその十分性は示されているが, 必要性については言及されていない. これに対し, 系 7 は $\hat{X}, \hat{Y}$ の存在が必要条件でもあることを示している.

Fig. 3 disturbance responses

Fig. 4 disturbance responses

4. 数 値 例

提案手法の有効性を数値例を用いて検証する。ここでは、Fig. 1 のシステムを考える。ただし、 $P(s)$ 、 $K_1(s)$ 、 $K_2(s)$ は以下の伝達関数で与えられるものとする。

$$P(s) = \sum_{i=0}^2 \frac{k_i \omega_i^2}{s^2 + 2\zeta_i \omega_i s + \omega_i^2}$$

$$\omega_i = 10^i, \quad \zeta_i = 0.1, \quad k_i = 10^{-i} \quad (i = 0, 1, 2)$$

$$K_1(s) = 0.5, \quad K_2(s) = \frac{-0.01s - 0.0001}{s^2}$$

このとき、 $P(s)$ 、 $K_1(s)$ 、 $K_2(s)$ の初期値を 0 としたうえで、-50 秒の時点で w に外乱を印加しはじめ、さらに、0 秒で補償器を $K_1(s)$ から $K_2(s)$ へ切替える。

Fig. 3 は切替時以降の $P(s)$ の出力を示したものである。実線は切替前の外乱に起因する応答、一方、一点鎖線、点線はそれぞれ切替後の外乱、切替前後の外乱に起因する応答である。上記の例に対して、本論文の結果を用いて得られるゲインは $\Gamma = 54.49$ である。

つぎに、 $K_1(s)$ を

$$K_1(s) = \frac{-10}{s + 100}$$

とし、上記と同じ外乱を用いて応答を求める。Fig. 4 は得られた結果を示したものである。同じ外乱を用いているので、

切替後の外乱に起因する応答は Fig. 3 と同じである。一方、切替前の外乱に起因する応答は Fig. 3 の場合よりも小さくなっている。この場合には $\Gamma = 35.93$ であり、上記の Γ よりも小さくなっている。

以上の結果から、本論文で定義したゲイン Γ が切替に起因する応答の乱れの大きさを評価できていることが確認できる。

5. おわりに

制御系に切替が発生するとき、切替前の外乱から切替後の制御出力への L_2 ゲインを解析するための手法を与えた。得られた条件はリアプノフ方程式に基づくもの、LMI に基づくものであり、いずれも必要十分条件である。また、リアプノフ不等式に基づく結果では、最悪外乱の特徴づけも可能であることを示した。さらに、数値例によって提案手法の有効性を確認した。

謝辞 論文が明確になるよう、適切な示唆を与えて頂いた査読者の方々に感謝いたします。

参 考 文 献

- 1) R. Hanus, M. Kinnaert and J.-L. Henrotte: Conditioning Technique, a General Anti-windup and Bumpless Transfer Method, *Automatica*, **23**-6, 729/739 (1987)
- 2) J. Paxman and G. Vinnicombe: Optimal Transfer Schemes for Switching Controllers, *Proc. 39th IEEE Conf. Decision Contr.*, 1093/1098 (2000)
- 3) M. C. Turner and D. J. Walker: Linear Quadratic Bumpless Transfer, *Automatica*, **36**-8, 1089/1101 (2000)
- 4) 浅井 徹: 不確かさと切替を伴うシステムに対する外乱応答の双対な LMI 条件に基づく最悪 L_2 ゲイン解析, システム制御情報学会論文集, **16**-2, 94/100 (2003)
- 5) 児玉, 須田: システム制御のためのマトリクス理論, コロナ社 (1978)
- 6) S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron and V. Balakrishnan: *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM (1994)
- 7) T. Asai and S. Hara: Some Conditions Which Make the Constantly Scaled H_∞ Control Synthesis Problems Convex, *Int. J. Robust and Nonlin. Contr.*, **12**-1, 21/39 (2002)
- 8) K. Zhou, John C. Doyle and K. Glover: *Robust and Optimal Control*, Prentice-Hall (1995)

[著 者 紹 介]

浅 井 徹 (正会員)

1996 年東京工業大学大学院理工学研究科制御工学専攻終了。同年 1 月日本学術振興会特別研究員。99 年大阪大学大学院工学研究科助手、2002 年同研究科講師となり、現在に至る。システム制御情報学会の会員。博士 (工学)。