1 リンク柔軟マニピュレータの力制御問題と指数安定性

遠藤 孝浩*・松野 文俊**

Force Control Problem and Exponential Stability for One-Link Flexible Manipulator

Takahiro ENDO* and Fumitoshi MATSUNO**

In this paper, we discuss a force control problem for a constrained one-link flexible manipulator based on distributed parameter model. The flexible manipulator is making contact with an object. In order to solve the force control problem, we propose a simple feedback control law. This proposed control law consists of bending moment at the root of the flexible manipulator and its derivative, which regulates simultaneously the contact force and the rotational angle of the motor without information of rotational angle and contact force. We prove the exponential stability of the closed-loop system by using energy multiplier method. As the control law is derived based on the distributed parameter model, we can avoid the drawbacks resulting from finite dimensional approximation.

Key Words: distributed parameter systems, force control problem, energy multiplier method, one-link flexible manipulator

1. はじめに

産業用ロボットは、消費エネルギーを少なくするという要求からアームを軽量化することが望まれる。また宇宙ロボットは、ロケットの打ち上げコストの削減や積載能力の制約の観点から軽量化が必須となっている。アームを軽量化すれば必然的に低剛性となり、剛性が不足することにより弾性振動が発生し、この振動が重大な問題となる。このような、分布的柔軟性をもつアームのダイナミクスは分布定数系として表現される。しかし、このような分布定数系の制御器設計アプローチは、有限次元近似モデルに基づいて行なわれていることが多く、この場合、いかに無限次元システムである分布定数系をうまく有限次元システムに近似するかに重点が置かれている。

有限次元近似モデルは無限個あるモードを有限個に近似することにより導出される。このため、モードの個数が増えるにつれて制御器の次元が増える、無視した高周波特性により生じるスピルオーバーがシステムを不安定にする可能性がある、などの問題が生じる¹⁾。これは、厳密には分布定数系として表現されるべきシステムに対して何らかの有限次元近似を導入した影響であると考えられる。この観点から、

分布定数系に基づいた制御器設計アプローチが提案され、その厳密な安定性が示されている^{2)~7)}。たとえば、1自由度柔軟構造物に関しては、一端固定他端自由な片持梁の漸近安定性²⁾および指数安定性³⁾が示されている。さらに、一端が制御モータに固定されており、そのモータによって水平面内を運動する1リンク柔軟マニピュレータに関しても、漸近安定性⁴⁾や指数安定性⁵⁾が示されている。一方、多自由度柔軟構造物に関しては、N本の柔軟梁が直列に結合されたシステムの指数安定性を保証する制御則が提案されている^{6),7)}が、回転関節をもつNリンク柔軟マニピュレータの安定性に関する研究は少ない。

他方、柔軟マニピュレータに対して、より複雑なタスクを行なわせるために、アーム先端位置の位置決め制御や振動抑制制御に加え、アームの先端が対象物や環境に与える接触力を制御することも、非常に重要である。文献8)において、アームの柔軟性が力制御問題の安定性に悪影響を与えるのではないかと予想され、文献9)が有限次元モーダルモデルを用いてこの予想を示して以来、有限次元近似モデルに基づいた柔軟アームの力制御に関する研究が、いくつか行なわれてきた^{10)~13)}。文献10)では、先端が対象物に拘束された1リンク柔軟アームのモデリングと、有限次元モーダルモデルに基づいたロバスト力制御が述べられている。そして、この柔軟アームの先端に非対称な剛体に取り付けられた場合の力制御についても研究が行なわれている¹¹⁾。また、特異振動を用いた柔軟アームの位置と力の制御法なども紹介されている¹²⁾。一方、有限次元近似モデルではなく、分布定数モデルに基づき、前述のアーム先端に非対称剛体を取り

* 東京工業大学大学院総合理工学研究科
横浜市緑区長津田町 4259

** 電気通信大学電気通信学部 調布市調布ヶ丘 1-5-1

* Tokyo Institute of Technology, Yokohama, Kanagawa

** University of Electro-Communications, Chofu
(Received October 21, 2004)
(Revised January 19, 2005)

Fig. 1 one-link flexible manipulator

付けられたシステムの力制御も研究されており¹³⁾、そこでは、リアプノフの方法を用いて、閉ループ系を漸近安定化する制御則が導出されている。しかしながら、制御性能の観点から考えると、閉ループ系を指数安定化するような制御則の構成が望ましい。

そこで本論文では、柔軟マニピュレータの力制御問題を分布定数モデルに基づいて考え、単純なフィードバック制御則で力制御タスクが達成されることを示す。特に、この単純なフィードバック制御則で閉ループ系が指数安定となることを示す。このように分布定数モデルに基づくことで、スピルオーバーが生じたり、制御則が複雑になるといった欠点を避けられることが期待できる。

本論文の構成は以下のとおりである。まず2節において、対象となる柔軟マニピュレータの定式化を行なう。本研究では、柔軟マニピュレータの力制御問題を考えているので、マニピュレータ先端が対象物に与える接触力を目標値に制御し、かつアームが水平面内を運動することにより発生する振動を抑制する制御則を設計することが目的となる。続いて3節で、この制御目的を達成するための単純なフィードバック制御則を提案する。そして4節において、この制御則により、閉ループ系が指数安定となることを示し、最後に結論を述べる。

2. 制御対象

2.1 運動方程式

本論文では、制御対象として Fig. 1 に示すアーム先端が対象物と接触した1リンク柔軟マニピュレータを考える。この柔軟アームの一端は制御モータに固定されており、他端には質量 m の質点に取り付けられている。そして、この先端負荷が対象物と接触をしている。柔軟アームは、根元の制御モータにより水平面内を運動し、重力の影響はないものとする。また、この柔軟アームは Euler-Bernoulli ビームモデルに従うと仮定する。

座標系は、絶対座標系として $O-XY$ をアームの根元に定め、アームの根元にそれと共に回転する座標系 $O-xy$ を Fig. 1 のように導入する。 X 軸と x 軸の角度差をアームの回転角 $\theta(t)$ とし、座標系 $O-xy$ におけるアームの弾性変位を $w(x,t)$ とする。ここで、 $\theta(t)$ および $w(x,t)$ は微小であ

ると仮定する。アームの長さ、曲げ剛性および線密度をそれぞれ l , EI および ρ とし、モータの制御入力トルク、慣性モーメントを $\tau_a(t)$, J とする。また、アーム先端に取り付けられた先端負荷が、対象物と接触していることから、拘束条件

$$\phi \equiv l\theta(t) - w(l,t) = 0 \quad (1)$$

が生じる。

以上の準備のもとで、システムの運動方程式は

$$w_{tt}(x,t) + \frac{EI}{\rho} w_{xxxx}(x,t) = x\ddot{\theta}(t) \quad (2)$$

$$w(0,t) = w_x(0,t) = w_{xx}(l,t) = 0 \quad (3)$$

$$m\{l\ddot{\theta}(t) - w_{tt}(l,t)\} + EIw_{xxx}(l,t) = \lambda(t) \quad (4)$$

$$J\ddot{\theta}(t) + \mu\dot{\theta}(t) = \tau(t) \quad (5)$$

と与えられることが知られている¹⁰⁾。ここに、 $\{\cdot\}$ は時間微分を表わしており、添字は対応する変数に関する偏微分を表わしている。また、 μ はモータの粘性摩擦係数であり、 $\tau(t)$ は $\tau(t) = \tau_a(t) - EIw_{xx}(0,t)$ である。(4) 式における $\lambda(t)$ は、拘束条件 ϕ に対応するラグランジュ乗数であり、拘束条件 (1) および (4) 式から、 $\lambda(t) = EIw_{xxx}(l,t)$ であることがわかる。よって、これを (4) 式に代入すれば、後者はつぎのようになる。

$$l\ddot{\theta}(t) - w_{tt}(l,t) = 0$$

上式は拘束条件 ϕ を2階時間微分したものに等価であるので、以下では (4) 式の代わりに、拘束条件 (1) を用いるものとする。ここで、新しい変数

$$y(x,t) = w(x,t) - x\theta(t)$$

を導入すれば、運動方程式はつぎのように書き直すことができる。

$$y_{tt}(x,t) + \frac{EI}{\rho} y_{xxxx}(x,t) = 0 \quad (6)$$

$$y(0,t) = y(l,t) = y_{xx}(l,t) = 0 \quad (7)$$

$$Jy_{xtt}(0,t) + \mu y_{xt}(0,t) = -\tau(t) \quad (8)$$

2.2 問題設定

本論文の目的は、柔軟マニピュレータの力制御である。すなわち、アーム先端を希望とする拘束力で対象物と接触させながら、完全に静止させることであり、これを達成するための制御目的は、

$$\lambda(t) \rightarrow \lambda^d, w_t(x,t) \rightarrow 0, \dot{\theta}(t) \rightarrow 0 \quad (9)$$

を達成する制御入力 $\tau(t)$ を求めることである。ただし、 λ^d は定数の目標拘束力を表わしている。制御目的 (9) が達成された場合、 $y_t(x,t) = 0$ となることから、 $y(x,t)$ は変数 x のみの関数となる。これを $y^d(x)$ と記すことにする。また、 $\dot{\theta}(t) = 0$ であることから、 $\theta(t)$ は定数となり、これを θ^d と記す。制御目的 (9) を運動方程式 (6), (7) に代入し、

$\lambda(t) = EI w_{xxx}(l, t) = EI y_{xxx}(l, t)$ および $\theta(t) = -y_x(0, t)$ に注意すれば、以下の式を得る.

$$y^d(x) = \frac{\lambda^d}{6EI} x(2l^2 - 3lx + x^2) \quad (10)$$

$$\theta^d = -\frac{l^2 \lambda^d}{3EI} \quad (11)$$

これらは、拘束力が目標値に収束した場合 ($\lambda(t) \rightarrow \lambda^d$) の、弾性変位 $y(x, t)$ の定常変形および回転角 $\theta(t)$ の角度であり、

$$y(x, t) \rightarrow y^d(x), \quad y_t(x, t) \rightarrow 0,$$

$$\theta(t) \rightarrow \theta^d, \quad \dot{\theta}(t) \rightarrow 0$$

なる制御則を構成することで、制御目的 (9) が達成される. さらに、 $y^d(x)$ と θ^d は λ^d を通じてカップリングしていることから、 $y(x, t) = y^d(x)$ となれば、 $\theta(t) = \theta^d$ となることが示せる. したがって、

$$y(x, t) \rightarrow y^d(x), \quad y_t(x, t) \rightarrow 0 \quad (12)$$

なる制御則を構成することで、制御目的 (9) が達成され、これが新しい制御目的と考えられる. ここで、 $y^d(x)$ と θ^d はカップリングしているので、拘束力を目標値にしたければモータの回転角度は任意の値に制御できず、また、モータの回転角度を目標値にしたければ拘束力を任意の目標値に制御できないことがわかる.

3. 制御則と閉ループ系

制御目的 (12) を達成するため、以下に示す制御則を提案する.

$$\tau(t) = -k_1 EI \{y_{xx}(0, t) - y_{xx}^d(0)\} - k_2 EI y_{xxt}(0, t) \quad (13)$$

ここに、フィードバックゲイン k_1 および k_2 は正の定数である. この制御則は、アーム根元の曲げモーメントとその時間微分からなっており、簡単のため、モーメント-PD 制御と記すことにする. 制御則 (13) において、第一項は $y(x, t) \rightarrow y^d(x)$ を期待して付加した項であり、また第二項は、 $y_t(x, t) \rightarrow 0$ を期待して付加した項で、これらによって制御目的 (12) が達成されることが期待される. この制御則についてまとめると、制御則はアーム根元の曲げモーメントとその時間微分からなっており、構造的にシンプルである. さらに注目すべきは、接触力や回転角の情報を必要としない点である. 以下では、簡単のため

$$y(x, t) = y(x, t) - y^d(x)$$

と平衡点を原点に移動しておく.

つぎに、モーメント-PD 制御を施した場合の閉ループ系

$$y_{tt}(x, t) + \frac{EI}{\rho} y_{xxxx}(x, t) = 0 \quad (14)$$

$$y(0, t) = y(l, t) = y_{xx}(l, t) = 0 \quad (15)$$

$$y_{xtt}(0, t) + \tilde{\mu} y_{xt}(0, t) - \tilde{k}_1 EI y_{xx}(0, t) - \tilde{k}_2 EI y_{xxt}(0, t) = 0 \quad (16)$$

を適当なヒルベルト空間上の 1 階発展方程式として定式化する. ただし、 $\{\cdot\} = \{\cdot\}/J$ を意味している. まず、文献 14) のように、以下の関数を定義する.

$$\zeta(t) = -EI y_{xx}(0, t) + \frac{1}{k_2} y_{xt}(0, t) \quad (17)$$

(17) 式を (16) 式に代入すれば、後者はつぎのように変形される.

$$\tilde{k}_2 \dot{\zeta}(t) + \tilde{k}_1 \zeta(t) + \left(\tilde{\mu} - \frac{\tilde{k}_1}{k_2} \right) y_{xt}(0, t) = 0 \quad (18)$$

つぎに、閉ループ系 (14), (15), (17) および (18) の状態空間として、以下の関数空間 H を導入する.

$$H = (H^2(0, l) \cap H_0^1(0, l)) \times L^2(0, l) \times R \quad (19)$$

ここで、 R の有界開集合 Ω に対して、空間 $H^m(\Omega)$ は m 次のソボレフ空間、空間 $H_0^m(\Omega)$ は $H^m(\Omega)$ での $C_0^\infty(\Omega)$ の閉包、そして空間 $L^2(\Omega)$ は 2 乗ルベーグ可積分な関数空間を表わしている. 状態空間 H は、内積

$$\langle z, \hat{z} \rangle_H = \frac{EI}{2} \int_0^l u_{xx} \hat{u}_{xx} dx + \frac{\rho}{2} \int_0^l v \hat{v} dx + \frac{\tilde{k}_2^2}{2(\tilde{k}_1 + \tilde{\mu} \tilde{k}_2)} \zeta \hat{\zeta} \quad (20)$$

の下で、ヒルベルト空間になることが容易に示される. ただし、 $z = (u, v, \zeta)^T \in H$, $\hat{z} = (\hat{u}, \hat{v}, \hat{\zeta})^T \in H$ である. 最後に、非有界線形作用素 $A: D(A) \subset H \rightarrow H$ を以下のように定義する.

$$Az = \begin{bmatrix} v \\ -\frac{EI}{\rho} u_{xxxx} \\ -\frac{\tilde{k}_1}{k_2} \zeta - \frac{1}{k_2} \left(\tilde{\mu} - \frac{\tilde{k}_1}{k_2} \right) v_x(0) \end{bmatrix} \quad (21)$$

さらに、作用素 A の定義域はつぎのように定義される.

$$\begin{aligned} D(A) &= \{z: u \in W_1, v \in W_2, \zeta \in R; \\ &u_{xx}(l) = 0, \zeta = -EI u_{xx}(0) + v_x(0)/\tilde{k}_2\}, \quad (22) \\ W_1 &= H^4(0, l) \cap H_0^1(0, l), \\ W_2 &= H^2(0, l) \cap H_0^1(0, l) \end{aligned}$$

以上の準備のもとで、閉ループ系 (14), (15), (17) および (18) は、以下に示すヒルベルト空間 H 上の 1 階発展方程式として書き表わすことができる.

$$\dot{z} = Az \quad (23)$$

ここで、 $z = (y, y_t, \zeta)^T$ である.

閉ループ系 (23) に対して、以下の補題を得る.

[補題 1] 作用素 A は縮小 C_0 -半群の生成素である. さらに、モーメント-PD 制御を施した場合の閉ループ系 (23) は漸近安定、すなわち、 $t \rightarrow \infty$ で

$$w(x, t) \rightarrow w^d(x), \quad w_t(x, t) \rightarrow 0$$

$$\theta(t) \rightarrow \theta^d, \quad \dot{\theta}(t) \rightarrow 0$$

$$\lambda \rightarrow \lambda^d$$

を満足する. ここに、 $w^d(x) = y^d(x) + x\theta^d$ である.

(証明) 文献16)において, $\bar{\mu} = 0$ の場合の証明が得られている. $\bar{\mu} \neq 0$ の場合も同様にして証明でき, 詳しくはそちらを参照されたい. $\square$

4. 指数安定性

ここでは, モーメント-PD 制御 (13) のもとで, 閉ループ系が指数安定になることを示す. この指数安定性を証明するために, energy multiplier method と呼ばれる方法^{6), 15)}を用いる.

【定理1】 モーメント-PD 制御 (13) のもとで, 閉ループ系 (23) は指数安定である.

(証明) まず, 以下に示すシステムのエネルギー関数 $E(t)$ から考えていく.

$$\begin{aligned} E(t) &= \langle z, z \rangle_H \\ &= \frac{EI}{2} \int_0^l u_{xx}^2 dx + \frac{\rho}{2} \int_0^l v^2 dx + \frac{C}{2} \zeta^2 \end{aligned}$$

ただし, $C = \bar{k}_2^2 / (\bar{k}_1 + \bar{\mu} \bar{k}_2)$ である. このとき, このエネルギー関数の時間微分を計算すれば, 以下のように与えられる.

$$\begin{aligned} \dot{E}(t) &= 2\langle Az, z \rangle_H \\ &= -C \frac{\bar{k}_1}{\bar{k}_2} (EI)^2 u_{xx}^2(0) - \frac{C}{\bar{k}_2^2} \bar{\mu} v_x^2(0) \\ &\leq -C_1 \zeta^2 \end{aligned}$$

ここで, 最後の不等式の導出には, 不等式

$$\zeta^2 \leq 2 \left\{ (EI)^2 u_{xx}^2(0) + \frac{v_x^2(0)}{\bar{k}_2^2} \right\} \quad (24)$$

を用いた. また, C_1 はある正の定数である. したがって, エネルギー関数の時間微分が負定にはならないので, このままでは, エネルギー関数から指数安定性の証明ができないことがわかる. そこで, 何らかの multiplier を加える必要がある.

まず, 以下に示す multiplier を考える.

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma_1 + \sigma_2 \\ \sigma_1 &= \rho \int_0^l (x-l) u_x v dx \\ \sigma_2 &= \rho u_x(0) \int_0^l (l-x) v dx \end{aligned}$$

このとき, σ_1 の時間微分を計算すれば, 以下のように与えられる.

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_1 &= \rho \int_0^l (x-l) v_x v dx - EI \int_0^l (x-l) u_x u_{xxxx} dx \\ &= -\frac{\rho}{2} \int_0^l v^2 dx - \frac{3}{2} EI \int_0^l u_{xx}^2 dx + \frac{EI}{2} l u_{xx}^2(0) \\ &\quad - EI u_x(0) \{ l u_{xxx}(0) + u_{xx}(0) \} \end{aligned}$$

さらに, σ_2 の時間微分に関しては, 以下のように得られる.

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_2 &= \rho v_x(0) \int_0^l (l-x) v dx \\ &\quad - EI u_x(0) \int_0^l (l-x) u_{xxxx} dx \end{aligned}$$

ここで, 関係式

$$\begin{aligned} -EI u_x(0) \int_0^l (l-x) u_{xxxx} dx \\ = EI u_x(0) \{ l u_{xxx}(0) + u_{xx}(0) \} \end{aligned}$$

ならびに, シュワルツの不等式, 不等式

$$|a||b| \leq 2|a||b| \leq \delta a^2 + \frac{b^2}{\delta}, \quad a, b, \delta \in R, \delta > 0 \quad (25)$$

を用いることで得られる不等式

$$\begin{aligned} \rho v_x(0) \int_0^l (l-x) v dx \\ \leq \rho \delta_1 v_x^2(0) + \frac{\rho l^2}{\delta_1} \int_0^l v^2 dx \end{aligned}$$

に注意すれば, σ_2 の時間微分はつぎのように評価することができる.

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_2 &\leq \delta_1 \rho l v_x^2(0) + \frac{\rho l^2}{\delta_1} \int_0^l v^2 dx \\ &\quad + EI u_x(0) \{ l u_{xxx}(0) + u_{xx}(0) \} \end{aligned}$$

ここに, $\delta_1 > 2l^2$ は不等式 (25) を用いた過程で得られた定数である. よって,

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}(t) &\leq -\frac{\rho}{2} \left(1 - \frac{2l^2}{\delta_1} \right) \int_0^l v^2 dx - \frac{3}{2} EI \int_0^l u_{xx}^2 dx \\ &\quad + \frac{EI}{2} l u_{xx}^2(0) + \delta_1 \rho l v_x^2(0) \end{aligned}$$

となることがわかった. さらに, $\dot{\sigma}_2$ に関する評価式を導出した場合と同様に, シュワルツの不等式, ポアンカレ不等式および不等式 (25) を用いることで, 以下の関係式が得られる.

$$|\sigma(t)| \leq C_2 E(t) \quad (26)$$

ここに, C_2 はある正の定数である.

つぎに, システムのエネルギー関数および multiplier σ を用いて, 以下に示す関数を定義する.

$$V(t) = E(t) + \varepsilon \sigma(t)$$

ここで, (26) 式に注意すれば,

$$(1 - \varepsilon C_2) E(t) \leq V(t) \leq (1 + \varepsilon C_2) E(t) \quad (27)$$

を得る. ただし, $\varepsilon > 0$ は十分小さい正の定数であり, 具体的には,

$$\varepsilon < \min \left\{ \frac{1}{C_2}, \frac{2C\bar{k}_1}{\bar{k}_2 l} EI, \frac{C\bar{\mu}}{\delta_1 \rho l \bar{k}_2^2} \right\}$$

となる. (27) 式では, $\varepsilon < 1/C_2$ であればよいのだが, 後の議論で残りの二つの条件が必要となる. 関数 $V(t)$ の時間微

分を計算すれば,

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) &= \dot{E}(t) + \varepsilon \dot{\sigma}(t) \\ &\leq -\frac{\rho}{2}\varepsilon \left(1 - \frac{2l^2}{\delta_1}\right) \int_0^l v^2 dx - \frac{3}{2}\varepsilon EI \int_0^l u_{xx}^2 dx \\ &\quad - \left\{ C \frac{\tilde{k}_1}{\tilde{k}_2} (EI)^2 - \frac{EI}{2} \varepsilon l \right\} u_{xx}^2(0) \\ &\quad - \left(\frac{C}{\tilde{k}_2} \tilde{\mu} - \varepsilon \delta_1 \rho l \right) v_x^2(0)\end{aligned}\quad (28)$$

となる. ここで, 上式の右辺について考えていく. 上式右辺を $-h$ と置く. すなわち,

$$\begin{aligned}h &\equiv \frac{\rho}{2}\kappa_1 \int_0^l v^2 dx + \frac{EI}{2}\kappa_2 \int_0^l u_{xx}^2 dx \\ &\quad + \kappa_3 (EI)^2 u_{xx}^2(0) + \kappa_4 v_x^2(0)\end{aligned}$$

と置く. ただし,

$$\begin{aligned}\kappa_1 &= \varepsilon \left(1 - \frac{2l^2}{\delta_1}\right), \quad \kappa_2 = 3\varepsilon, \\ \kappa_3 &= C \frac{\tilde{k}_1}{\tilde{k}_2} - \frac{\varepsilon l}{2EI}, \quad \kappa_4 = C \frac{\tilde{\mu}}{\tilde{k}_2} - \varepsilon \delta_1 \rho l\end{aligned}$$

である. いま, システムのエネルギー関数に注目すれば, 不等式 (24) より

$$\begin{aligned}E(t) &= \frac{EI}{2} \int_0^l u_{xx}^2 dx + \frac{\rho}{2} \int_0^l v^2 dx + \frac{C}{2} \zeta^2 \\ &\leq \frac{EI}{2} \int_0^l u_{xx}^2 dx + \frac{\rho}{2} \int_0^l v^2 dx \\ &\quad + C(EI)^2 u_{xx}^2(0) + \frac{C}{\tilde{k}_2} v_x^2(0)\end{aligned}$$

と評価できるので, この式の両辺を K 倍すれば, 以下の不等式が得られる.

$$\begin{aligned}KE(t) &\leq K \frac{EI}{2} \int_0^l u_{xx}^2 dx + K \frac{\rho}{2} \int_0^l v^2 dx \\ &\quad + KC(EI)^2 u_{xx}^2(0) + K \frac{C}{\tilde{k}_2} v_x^2(0) \\ &\leq h\end{aligned}\quad (29)$$

ただし K は,

$$0 < K \leq \min \left\{ \kappa_1, \kappa_2, \frac{\kappa_3}{C}, \frac{\tilde{k}_2 \kappa_4}{C} \right\}$$

なる定数である. よって (29) 式より,

$$-h \leq -KE(t)$$

となり, (27), (28) 式および上式から,

$$\dot{V}(t) \leq -KE(t) \leq -\frac{K}{1+\varepsilon C_2} V(t)$$

が得られる. 以上より,

$$\begin{aligned}E(t) &\leq \frac{1}{1-\varepsilon C_2} e^{-\frac{K}{1+\varepsilon C_2} t} V(0) \\ &\leq \frac{1+\varepsilon C_2}{1-\varepsilon C_2} e^{-\frac{K}{1+\varepsilon C_2} t} E(0)\end{aligned}$$

である. したがって,

$$\begin{aligned}\|z\|_H &= \sqrt{E(t)} \\ &\leq \sqrt{\frac{1+\varepsilon C_2}{1-\varepsilon C_2}} e^{-\frac{K}{2(1+\varepsilon C_2)} t} \|z(0)\|_H\end{aligned}\quad (30)$$

となり, モーメント-PD 制御 (13) が施された閉ループ系 (23) の指数安定性が証明された. $\square$

上の定理において, システム (23) の指数安定性が証明されたわけだが, このシステムは変数変換 (17) を施した後のシステムであるので, まだ元のシステム (2)-(5) および (13) が指数安定であるかはわからない. すなわち, y , y_t および ζ が指数安定であることは示されたが, w , w_t や θ , $\dot{\theta}$, さらに $\lambda(t)$ が指数安定になるかはまだ示されていない. そこで, つぎにこれらの変数に関する指数安定性について考えていく.

《定理 2》 w , w_t , θ , $\dot{\theta}$ ならびに λ は, y , y_t , ζ と同じ減衰率で指数安定となる. すなわち,

$$\begin{aligned}\|w - w^d\|_{L^2} &\leq M_1 e^{-\delta t}, \quad \|w_t\|_{L^2} \leq M_2 e^{-\delta t} \\ \|\theta - \theta^d\| &\leq M_3 e^{-\delta t}, \quad \|\theta_t\| \leq M_4 e^{-\delta t} \\ \|\lambda - \lambda^d\| &\leq M_5 e^{-\delta t}\end{aligned}$$

を満足する. ここに, M_i ($i=1, \dots, 5$) および δ はある正の定数である. また, $\|\cdot\|_{L^2}^2 = \int_0^l \cdot^2 dx$, $\|\cdot\|^2 = \cdot^2$ を表わしている.

(証明) まずはじめに, y , y_t , $y_x(0, t)$, $y_{xt}(0, t)$ ならびに $EI y_{xxx}(l, t)$ が同じ減衰率で指数安定となることを示す. (30) 式を,

$$\|z\|_H \leq M e^{-\delta t}$$

と置く. すると上式より,

$$\|y\|_{L^2} \leq K_0 M e^{-\delta t} \quad (31)$$

$$\|y_t\|_{L^2} \leq K_1 M e^{-\delta t} \quad (32)$$

が得られる. ここに, K_0 , K_1 はある正の定数であり, K_0 はポアンカレ不等式を用いた過程で導出されたものである. また, 関係式

$$\begin{aligned}y_x(0, t) &= y_x(x, t) - \int_0^x y_{xx}(s, t) ds \\ &\leq |y_x(x, t)| + \int_0^l |y_{xx}(s, t)| ds\end{aligned}$$

およびシュワルツの不等式より, 以下を得る.

$$\begin{aligned}\int_0^l y_x^2(0, t) dx &\leq \int_0^l y_x^2(x, t) dx + l^2 \int_0^l y_{xx}^2(x, t) dx \\ &\quad + 2 \int_0^l |y_x(x, t)| dx \int_0^l |y_{xx}(x, t)| dx\end{aligned}$$

この関係式の最後の項に, 不等式 (25) を用いれば,

$$y_x^2(0, t) \leq K_2 \int_0^l y_{xx}^2 dx$$

を得る。ただし、 K_2 はある正の定数である。この関係式に注意すれば、

$$\frac{EI}{2K_2} y_{xt}^2(0, t) \leq \frac{EI}{2} \int_0^l y_{xx}^2 dx \leq E(t) \leq M^2 e^{-2\delta t}$$

より、

$$\|y_x(0, t)\| \leq \sqrt{\frac{2K_2}{EI}} M e^{-\delta t} \quad (33)$$

を得る。

つぎに、 $y_{xt}(0, t)$ の指数安定性を考えていく。 $z_0 \in D(A)$ に対して、

$$\begin{aligned} \|z\|_{D(A)} &= \|e^{At} z_0\|_{D(A)} = \|\mathfrak{A}^{At} z_0\|_H + \|e^{At} A z_0\|_H \\ &\leq M_1 e^{-\delta t} \|z_0\|_H + M_1 e^{-\delta t} \|A z_0\|_H \\ &= M_1 e^{-\delta t} \|z_0\|_{D(A)} \\ &\equiv M_2 e^{-\delta t} \end{aligned}$$

が得られる。ここに、 $\|z\|_{D(A)}$ はグラフノルム、

$$\|z\|_{D(A)} = \|z\|_H + \|Az\|_H$$

であり、 $M_1 = \sqrt{(1 + \varepsilon C_2)/(1 - \varepsilon C_2)}$ である。ここで、 $y_x^2(0, t)$ の場合と同様に、不等式

$$y_{xt}^2(0, t) \leq K_3 \int_0^l y_{xxx}^2 dx \quad (34)$$

が得られる。これに注意すれば、

$$\begin{aligned} \frac{EI}{2K_3} y_{xt}^2(0, t) &\leq \frac{EI}{2} \int_0^l y_{xxx}^2 dx \leq \|Az\|_H^2 \\ &\leq M_2^2 e^{-2\delta t} \end{aligned}$$

となることから、 $y_{xt}(0, t)$ の指数安定性に関する以下の不等式が得られる。

$$\|y_{xt}(0, t)\| \leq \sqrt{\frac{2K_3}{EI}} M_2 e^{-\delta t} \quad (35)$$

続いて、 $EI y_{xxx}(l, t)$ が指数安定であることを示す。これを示すために、まず以下に定義する式について考えていく。

$$h_1 \equiv \frac{C}{2} h_2 + \frac{EI}{2} \int_0^l y_{xxx}^2 dx$$

ここで、

$$\begin{aligned} h_2 &= \left\{ -EI y_{xx}(0, t) + \frac{1}{k_2} y_{xt}(0, t) \right\}^2 \\ &= (EI)^2 y_{xx}^2(0, t) - \frac{2}{k_2} EI y_{xx}(0, t) y_{xt}(0, t) \\ &\quad + \frac{1}{k_2^2} y_{xt}^2(0, t) \end{aligned}$$

である。上式において、不等式 (25) を用いれば、

$$\begin{aligned} \frac{2}{k_2} EI y_{xx}(0, t) y_{xt}(0, t) &\leq \delta_2 (EI)^2 y_{xx}^2(0, t) + \frac{1}{\delta_2 k_2^2} y_{xt}^2(0, t) \end{aligned}$$

であることから、 h_2 は

$$h_2 \geq (1 - \delta_2) (EI)^2 y_{xx}^2(0, t) + \frac{1}{k_2^2} \left(1 - \frac{1}{\delta_2}\right) y_{xt}^2(0, t)$$

と評価される。この h_2 に関する評価式および (34) を用いれば、 h_1 は

$$\begin{aligned} h_1 &\geq \frac{C}{2} (1 - \delta_2) (EI)^2 y_{xx}^2(0, t) \\ &\quad + \frac{C}{2} \left(\frac{1}{\tilde{k}_2^2} - \frac{1}{k_2^2 \delta_2} + \frac{EI}{K_3 C} \right) y_{xt}^2(0, t) \end{aligned}$$

と評価される。ただし δ_2 は、

$$\delta_2 \in \left(\frac{1}{1 + \frac{\tilde{k}_2^2 EI}{K_3 C}}, 1 \right)$$

なる定数である。これから、

$$\begin{aligned} \|z\|_{D(A)}^2 &= \|Az\|_H^2 + \|z\|_H^2 \\ &= h_1 + \frac{\rho}{2} \int_0^l \frac{(EI)^2}{\rho^2} y_{xxxx}^2 dx \\ &\quad + \frac{EI}{2} \int_0^l y_{xx}^2 dx + \frac{\rho}{2} \int_0^l y_t^2 dx \\ &\quad + \frac{C}{2} \left\{ -\frac{\tilde{k}_1}{k_2} \zeta - \frac{1}{k_2} \left(\tilde{\mu} - \frac{\tilde{k}_1}{k_2} \right) y_{xt}^2(0, t) \right\}^2 \\ &\geq \frac{C}{2} (1 - \delta_2) (EI)^2 y_{xx}^2(0, t) \\ &\quad + \frac{(EI)^2}{2\rho} \int_0^l y_{xxxx}^2 dx \\ &\geq K_4 \left\{ \int_0^l y_{xxxx}^2 dx + (EI)^2 y_{xx}^2(0, t) \right\} \quad (36) \end{aligned}$$

が得られる。ただし、

$$K_4 \leq \min \left\{ \frac{C}{2} (1 - \delta_2), \frac{(EI)^2}{2\rho} \right\}$$

である。他方、 $y_x^2(0, t)$ に関する不等式を導出した場合と同様に、シュワルツの不等式、ポアンカレ不等式および不等式 (25) を用いることで、

$$\begin{aligned} (EI)^2 y_{xxx}^2(l, t) &\leq K_5 \left\{ \int_0^l y_{xxxx}^2 dx + (EI)^2 y_{xx}^2(0, t) \right\} \quad (37) \end{aligned}$$

と評価できる。ただし、 K_5 はある正の定数である。よって、(36) および (37) 式より、 $EI y_{xxx}(l, t)$ の指数安定性に関する不等式

$$\|EI y_{xxx}(l, t)\| \leq \sqrt{\frac{K_5}{K_4}} M_2 e^{-\delta t} \quad (38)$$

が得られる。

したがって、(31)-(33) 式、(35) および (38) 式より、 y 、 y_t 、 $y_x(0, t)$ 、 $y_{xt}(0, t)$ ならびに $EI y_{xxx}(l, t)$ は、同じ減衰率で指数安定となることが示された。ここで、変数変換の式 $y(x, t) = y(x, t) - y^d(x)$ ならびに $y(x, t) = w(x, t) - x\theta(t)$ 、さらに $\lambda(t) = EI w_{xxx}(l, t)$ であることに注意すれば、目標の関係式が得られる。□

また、フィードバックゲイン k_1 および k_2 の設計については、まず k_1 を目標の立ち上がり時間を達成できるくらい大きさに設定し、その後 k_2 を小さい値から大きくしてい

き、振動が小さくなるように設計すれば良いのではないかと考えている。なお、数理的に系統だったフィードバックゲインの設計法については今後の課題である。

5. おわりに

本論文では、1リンク柔軟マニピュレータに対する力制御問題について考えた。分布定数モデルに基づき、単純な制御則としてモーメント-PD 制御を提案した。この制御則は、アーム根元の曲げモーメントとその時間微分からなっており、構造的にシンプルである。さらに、アームの回転角や接触力の情報を用いる必要さえない。そして、モーメント-PD 制御によって、力制御が達成されることを示した。特に、この単純なフィードバック制御則で、閉ループ系が指数安定にすることを示した。

今後の課題としては、提案した制御則の実験的検証、ハードウェア上の制約によって実験では検証できない現象、たとえばモータ性能の限界によって達成できない高速運動などに対するシミュレーションによる検証、ならびにモータ部の粘性摩擦係数 μ が不在の場合の指数安定性の証明などが挙げられる。

参考文献

- 1) M. J. Balas: Active control of flexible systems, J. Opt. Theory and Appl., **25**-3, 415/436 (1978)
- 2) M. Slemrod: Feedback stabilization of a linear control system in hilbert space with an a priori bounded control, Math. Control Signals Systems, **2**, 265/285 (1989)
- 3) Ö. Morgül: Stabilization and disturbance rejection for the beam equation, IEEE Trans. Automat. Contr., **46**-12, 1913/1918 (2001)
- 4) Z. H. Luo: Direct strain feedback control of flexible robot arms: new theoretical and experimental results, IEEE Trans. Automat. Contr., **38**-11, 1610/1622 (1993)
- 5) B. Guo and Z. Luo: Initial-boundary value problem and exponential decay for a flexible-beam vibration with gain adaptive direct strain feedback control, Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Appl., **27**-3, 353/365 (1996)
- 6) G. Chen, M. C. Delfour, A. M. Krall and G. Payre: Modeling, stabilization and control of serially connected beams, SIAM J. Control Optim., **25**-3, 526/546 (1987)
- 7) F. Conrad: Stabilization of beams by pointwise feedback control, SIAM J. Control Optim., **28**-2, 423/437 (1990)
- 8) S. D. Eppinger and W. P. Seering: On dynamic models of robot force control, Proc. IEEE ICRA, 29/34 (1986)
- 9) B. C. Chiou and M. Shahinpoor: Dynamic stability analysis of a one-link force-controlled flexible manipulator, J. Robotic Syst., **5**-5, 443/451 (1988)
- 10) F. Matsuno and S. Kasai: Modeling and robust force control of constrained one-link flexible arms, J. Robotic Syst., **15**-8, 447/464 (1998)
- 11) Y. Morita, Y. Kobayashi, H. Kando, F. Matsuno, T. Kanzawa and H. Ukai: Robust force control of a flexible arm with a nonsymmetric rigid tip body, J. Robotic Syst., **18**-5, 221/235 (2001)
- 12) B. Siciliano and L. Villani: Parallel force and position control of flexible manipulator, IEE Proc. Control Theory Appl., **147**-6, 605/612 (2000)
- 13) 森田, 松野, 小林, 池田, 鶴飼, 神藤: 曲げねじり変形を考慮した 1 リンクフレキシブルアームのダイナミクスベースト力制御, 計測自動制御学会論文集, **38**-6, 549/556 (2002)
- 14) F. Conrad and Ö. Morgül: On the stabilization of a flexible beam with a tip mass, SIAM J. Control Optim., **36**-6, 1962/1986 (1998)
- 15) B. Rao: Recent progress in non-uniform and uniform stabilization of the scolo model with boundary feedbacks, Boundary control and variation, ed. J. P. Zolésio, Marcel Dekker, Inc. (1994)
- 16) T. Endo and F. Matsuno: Dynamics based force control of one-link flexible arm, Proc. SICE Ann. Conf., 2736/2741 (2004)

[著者紹介]

遠藤 孝浩 (学生会員)

2001 年明治大学理工学部機械情報工学科卒業。2003 年東京工業大学大学院総合理工学研究科知能システム科学専攻修士課程修了。同年、同大学院同専攻博士課程進学。現在に至る。

松野 文俊 (正会員)

1957 年 7 月 26 日生。1986 年大阪大学大学院基礎工学研究科博士課程修了。大阪大学基礎工学部助手, 神戸大学工学部講師, 助教授, 東京工業大学大学院総合理工学研究科助教授を経て, 2003 年電気通信大学教授 (知能機械工学科) となり, 現在に至る。主に, ロボティクス・制御理論・レスキュー学に関する研究に従事。2002 年より NPO 国際レスキューシステム研究機構理事・川崎ラボリーダ。89 年度日本ロボット学会研究奨励賞, 93 年度システム制御情報学会論文賞, 97 年度消防防災科学論文賞 (消防庁長官表彰), 2001 年度計測自動制御学会論文賞・武田賞などを受賞。IEEE, 日本機械学会, GIS 学会, 情報処理学会などの会員。工学博士。