統計的に未知の観測雑音を想定した線形系の状態推定

山中 一雄*・菊池 浩司**・齊藤 充行**

State Estimation in Linear Systems with Statistically Unknown Observation Noise

Kazuo YAMANAKA*, Koji KIKUCHI** and Mitsuyuki SAITO**

A solution is presented of a state estimation problem in linear systems driven by white noise. No statistical information is assumed on the observation noise except finiteness of mean power, while the driving noise is characterized by (known) constant power spectral density. The problem is considered as a game between the estimator and the noise by means of introducing a cost function that evaluates the mean-square estimation error subtracted by the mean power of the observation noise. Based on the positive definite solution of a certain Lyapunov equation, a state estimator of Kalman-Luenberger form is obtained as minimax solution of the game.

Key Words: State estimation, Mixed H_2/H_∞ filtering problem, Minimax filter

1. ま え が き

線形系の状態推定問題において、駆動雑音と観測雑音が白色雑音で、スペクトル密度が既知である場合は、カルマン・ビュシーのフィルタ¹⁾が適用することは周知のとおりである。これに対し、それらの雑音についての先験情報が不十分な場合、与えられる先験情報に応じてさまざまな解法が考えられる。

どちらの雑音に関しても平均パワーの上界のみ既知の場合には、 H_∞ フィルタが有効であるほか²⁾、雑音のスペクトル密度関数の属する集合が既知の場合に対するミニマックスフィルタ³⁾、雑音の一方が白色（スペクトル密度が既知）で、他方について平均パワーの上界のみ既知の場合に適用する混合 H_2/H_∞ フィルタ^{4),5)}などがある。さらに、雑音の平均パワーの上界すら未知の場合について、雑音へのペナルティ項を推定精度の評価指標に加えてミニマックスフィルタをつくるという解決法もある⁶⁾。内田は、この考えに沿って、駆動雑音と観測雑音に関する先験情報がない場合の連続時間系のミニマックスフィルタをある種のリッカチ方程式から導き、 H_∞ フィルタとの関連を論じた⁷⁾。

ところで、ふたつの雑音のうち、駆動雑音については始めから白色であることを前提としてよい場合もあると考えられる。たとえば、対象とする線形系が、何らかの不規則信号の状態モデルであるなら、駆動雑音は必然的に白色でありスペクトル密度も既知である。そのように限定された状態推定問題をあらためて考えると、前記以外にもいくつか論じ方があ

らたな解法を考える。基本的には文献⁷⁾と同じ原理にもとづくが、結果として、リッカチ方程式の代わりにリヤプノフ方程式が現れ、その解が正定であることを条件に、鞍点解の存在が示される。本論文ではさらに、その鞍点の特殊性について論じ、鞍点解を補完するある局所的性質を明らかにする。

2. 状態推定問題

Fig.1に示す状態推定問題を、つぎのような線形系を対象にして考える。

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bw(t) \quad (1)$$

$$y(t) = Cx(t) + v(t) \quad (2)$$

ただし、 w は駆動雑音、 v は観測雑音を表わし、 y は出力、

Fig. 1 State estimation problem

x は状態を表わす。 A は安定、 (A, B) は可制御と仮定する。 w はつぎのような白色雑音とする。

$$Ew(t) = 0, \quad Ew(t)w(s)^T = I\delta(t-s) \quad (3)$$

I は単位行列を表わす。 v は、スペクトル密度関数が未知で、 w と直交し、かつ 2 乗平均連続な弱定常 2 次確率過程と仮定する。以下、このような雑音 v の全体を Ψ で表わすことにする。

状態推定器として、カルマン-ルエンバーガー形状状態推定器

$$\frac{d\hat{x}(t)}{dt} = A\hat{x}(t) + K(y(t) - C\hat{x}(t)) \quad (4)$$

を考える。ただし、 $\hat{x}$ は状態 x の推定値を表わす。フィルタゲイン K は $A - KC$ が安定となるようにとるものとし、こ

* 茨城大学工学部 日立市中成沢 4-12-1

** 茨城大学大学院 日立市中成沢 4-12-1

* Department of Systems Engineering, Ibaraki University, Hitachi

** Graduate School of Science and Engineering, Ibaraki University, Hitachi

(Received August 25, 2005)

のようなフィルタゲインの全体を Φ で表わす。以下では、線形系 (1), (2) と状態推定器 (4) の合成系が定常状態にあるときを議論する。

3. 鞍点推定器

フィルタゲイン K を決定するための評価指標を、つぎのように定める。

$$J(K, v) \triangleq E(x(t) - \hat{x}(t))^T M(x(t) - \hat{x}(t)) - E v(t)^T v(t), \quad K \in \Phi, v \in \Psi \quad (5)$$

ただし、 M は正定な対称行列である。また、平均は定常状態においてとるものとする。これにより、フィルタゲイン K と観測雑音 v によるゲームを考える。フィルタゲイン K の目的は評価関数の最小化、観測雑音 v の目的は評価関数の最大化である。このように、状態推定問題をゲームと考えることによって、観測雑音の平均パワーに仮の上界を設定することなく状態推定問題を解くことができる⁶⁾。

A が安定と仮定していることから、リヤプノフ方程式

$$0 = M - C^T C + A^T \Pi + \Pi A \quad (6)$$

は唯一解 Π をもつ。これにもとづいてつぎの結果を示すことができる。

《定理1》 Π が正定ならば J の鞍点が存在する。すなわち、適当な $K_0 \in \Phi$ と $v_0 \in \Psi$ によってつぎの式が成立つ。

$$J(K_0, v) \leq J(K_0, v_0) \leq J(K, v_0), \quad K \in \Phi, v \in \Psi \quad (7)$$

(証明) 任意の $K \in \Phi$ と $v \in \Psi$ に対し、誤差 $e \triangleq x - \hat{x}$ は方程式

$$\frac{de(t)}{dt} = (A - KC)e(t) + Bw(t) - Kv(t) \quad (8)$$

に従う。これを用いて $Ee(t)^T \Pi e(t)$ の時間変化率を計算すると、つぎの式を得る。

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} Ee(t)^T \Pi e(t) \\ &= \text{trace} B^T \Pi B \\ &\quad + E\{[(A - KC)e(t) - Kv(t)]^T \Pi e(t) \\ &\quad + e(t)^T \Pi [(A - KC)e(t) - Kv(t)]\} \end{aligned} \quad (9)$$

両辺に $E\{e(t)^T M e(t) - v(t)^T v(t)\}$ を加え、(6) 式を用いながら右辺を $v(t)$ に関して平方完成することにより、 $J(K, v)$ に対するつぎの表現が得られる。

$$\begin{aligned} J(K, v) &= \text{trace} B^T \Pi B \\ &\quad + Ee(t)^T (C - K^T \Pi)^T (C - K^T \Pi) e(t) \\ &\quad - E(v(t) + K^T \Pi e(t))^T (v(t) + K^T \Pi e(t)) \end{aligned} \quad (10)$$

ここで、 $v_0 \in \Psi$ を

$$v_0(t) = -Cx(t) \quad (11)$$

によって定義し、 v として v_0 をとると、誤差方程式 (8) は

$$\frac{de(t)}{dt} = Ae(t) + Bw(t) + KC(x(t) - e(t)) \quad (12)$$

となるので、これを (1) 式と比較して、 $e = x$ であることがわかる。これにより、 $(C - K^T \Pi)e(t) = -(v_0(t) + K^T \Pi e(t))$ となり、(10) 式よりつぎの式が成立つ。

$$J(K, v_0) = \text{trace} B^T \Pi B, \quad K \in \Phi \quad (13)$$

つぎに、 K_0 を

$$K_0 = \Pi^{-1} C^T \quad (14)$$

で定義すると、(6) 式の変形によって得られるリヤプノフ方程式

$$0 = M + C^T C + (A - K_0 C)^T \Pi + \Pi (A - K_0 C)$$

から、 $A - K_0 C$ は安定、すなわち $K_0 \in \Phi$ であることがわかる。(10) 式において $K = K_0$ とおくと、

$$\begin{aligned} J(K_0, v) &= \text{trace} B^T \Pi B \\ &\quad - E(v(t) + Ce(t))^T (v(t) + Ce(t)) \end{aligned}$$

となるので、これと (13) 式 (ただし、 K を K_0 とおく) よりつぎの式が成立つ。

$$J(K_0, v) \leq J(K_0, v_0), \quad v \in \Psi \quad (15)$$

(15) 式と (13) 式を合わせて、(7) 式が得られる。■

(注意) 証明の過程から判る通り、(7) 式の右側の不等式は実は等式である。

上の定理にもとづき、(14) 式によって定義される K_0 をゲインとする状態推定器 (鞍点フィルタ)

$$\frac{d\hat{x}(t)}{dt} = A\hat{x}(t) + K_0(y(t) - C\hat{x}(t)) \quad (16)$$

が、状態推定問題の解となる。(11) 式から、「最悪の雑音 v_0 」は観測過程 y を 0 にする雑音であることがわかる。これは、上の注意で述べたように、(7) 式の正確な形が

$$J(K_0, v) \leq J(K_0, v_0) = J(K, v_0), \quad K \in \Phi, v \in \Psi$$

であることと関連する。この式を見るかぎり、 (K_0, v_0) はやや特殊な鞍点であり、観測雑音が「最悪の雑音 v_0 」であるかぎり、 K_0 以外のゲインを用いても推定精度は変わらない。しかしながら、詳しく調べてみると、つぎに示すように、 (K_0, v_0) は強い意味で局所的ミニマックス点になっていることがわかる。

《定理2》 (最大特異値ノルムの意味で) K_0 の適当な近傍 $\Phi_0 \subset \Phi$ をとり、各 $K \in \Phi_0$ に対して

$$J_{\max}(K) \triangleq \max_{v \in \Psi} J(K, v) \quad (17)$$

を定義すると、つぎの式が成立つ。

$$J_{\max}(K_0) \leq J_{\max}(K), \quad K \in \Phi_0 \quad (18)$$

ただし、等号が成立つのは $K = K_0$ のときにかぎる。

(証明) A が安定、 (A, B) が可制御であるから、 K_0 の適当な近傍 Φ_0 をとって、すべての $K \in \Phi_0$ に対し、 $A - K(C - K^T \Pi)$ が安定、かつ $(A - K(C - K^T \Pi), B)$ が可制御とできる。(10) 式から、任意の $K \in \Phi_0$ に対して、

Fig. 2 A sample of the minimax filtering

$v = -K^T \Pi e$ をとれば,

$$J_{\max}(K) = \text{trace} B^T \Pi B + Ee(t)^T (C - K^T \Pi)^T (C - K^T \Pi) e(t) \quad (19)$$

となる。このとき、(8) 式から推定誤差 e は

$$\frac{de(t)}{dt} = [A - K(C - K^T \Pi)]e(t) + Bw(t) \quad (20)$$

に従う弱定常過程である。また可制御性から、 $Ee(t)e(t)^T$ は正定であり²⁾、任意の行列 $N \neq 0$ に対して

$$Ee(t)^T N N^T e(t) > 0 \quad (21)$$

が成立つ。よって、(18) 式が成立ち、等号は $K = K_0 \triangleq \Pi^{-1} C^T$ のときにきがる。■

〔例題〕 つぎのような線形システムを考える。

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 20 \\ 15 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix}$$

A が安定、 (A, B) が可制御であることは容易に確かめられる。このとき、重み係数 M を

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$$

とすると、リヤプノフ方程式 (6) は単位行列 (正定) を解としてもつ。これから $K_0 \triangleq C^T = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ による鞍点フィルタ

$$\frac{d\hat{x}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} \hat{x}(t) + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} y(t)$$

が求まる。また、この鞍点に対応する観測雑音 v_0 は、スペクトル密度

$$\Sigma_{v_0}(\omega) = \frac{100}{\omega^2 + 4}$$

をもつ弱定常過程である。Fig.2は、鞍点フィルタを用いて信号 Cx を推定するシミュレーション結果を示す。

4. あとがき

線形系の駆動雑音がスペクトル密度既知の白色雑音であり、一方観測雑音は平均パワーが有限であること以外未知である

ような場合の状態推定問題を考察し、ひとつの解として、リヤプノフ方程式にもとづく鞍点フィルタを得た。

参考文献

- 1) R. E. Kalman and R. S. Bucy: New Results in Linear Filtering and Prediction Theory, Trans. ASME J. of Basic Engineering, 95/108, March (1961)
- 2) 内田, 山中: 状態推定の理論, コロナ社 (2004)
- 3) V. Poor and D. P. Looze: Minimax State Estimation for Linear Stochastic Systems with Noise Uncertainty, IEEE Transactions on Automatic Control, AC-26-4, 902/906 (1981)
- 4) 山中, 内田: 混合 H_2/H_∞ フィルタ問題の簡単な場合, 第36回自動制御連合講演会, 123/124, Oct. (1993)
- 5) P. P. Khargonekar, M. A. Rotea and E. Baeyens: Mixed H_2/H_∞ filtering, Int. J. of Robust and Nonlinear Control, 6, 313/330 (1996)
- 6) J. M. Morris: The Kalman Filter: A Robust Estimator for Some Classes of Linear Quadratic Problems, IEEE Transactions on Information Theory, IT-22-5, 526/534 (1976)
- 7) 内田健康: Kalman-Bucy 型ロバストフィルタの性質, 第31回自動制御連合講演会, 225/228, Oct. (1988)
- 8) K. Yamanaka and K. Uchida: A Noise Attenuation Property of the Kalman Filter, Proc. 33rd ISIE Int. Symposium on Stochastic Systems Theory and Its Applications, Tochigi, 246/248 (2001)