PWM 型制御入力に基づく安定化制御

富田 健太郎*・浅井 徹**

Stabilization based on PWM-type Control Inputs

Kentaro TOMITA* and Toru ASAI**

This paper deals with stabilization of continuous-time systems whose control inputs take two distinct values. We consider to generate control inputs based on pulse-width-modulation (PWM) and derive a discrete-time system which governs the state transitions of the continuous-time system at sampling instants. Since PWM control inputs keep pulsating, stability of fixed points for the discrete-time system implies stability of limit cycles for the continuous-time system. Based on the discrete-time system, we show analysis results for the existence of the fixed point, local controllability and local stabilizability. Furthermore, we will propose methods to synthesize locally stabilizing state and output feedback controllers based on LMIs.

Key Words: PWM, stabilization, switching, linear approximation, discretization

1. はじめに

通常の制御系解析・設計では、制御入力は連続値をとるものと仮定されている。しかし、一般に連続値を発生する、あるいは十分高い分解能をもつアクチュエータはそうでないものに対して複雑かつ高価であり、必ずしもそれらを用いることが適当でない場合もある。たとえば、電気ポットのような安価な製品では、コストダウンを図るために加熱と非加熱の2つの制御入力を切替えることで温度制御を行なっている。また、宇宙機などでは簡素な機構のアクチュエータが必要とされるので、弁の開閉のみが可能なガスジェットスラスタが用いられている。

以上の例のように、制御入力の取りうる値が有限個であるような制御対象が存在する。そのような場合には個々の値を記号と考えることができるので、それらの制御入力は記号入力と呼ばれることもある。近年、記号入力を有するシステムの可制御性および可到達性に関する解析が行なわれている^{1), 2)}。また、安定化をはじめとする制御系設計法については、ON/OFF 制御をはじめ、さまざまな切替制御則が従来より提案されている^{2), 3)}。しかしながら、これらの手法は本質的に位相面解析に基づく図的解法であるため、高次のシステムに対する設計を考えることは困難である。

一方、モーターの制御などでは、パルス幅変調 (pulse-width-modulation; PWM) を用いて 2 値あるいは 3 値の

入力の切替に基づく制御が行なわれている。PWM を用いれば、たとえば 1 サンプル周期での平均値が所望の値となるようにデューティ比を定めることによって、容易に記号入力の切替則を与えることができる。このとき、1 サンプル周期での平均値を新たな制御入力とみなせば、制御入力が連続値をとると仮定して系統的に制御系を設計することが可能である。ただし、平均値に基づく解析・設計結果は近似であり、そこから安定性に対する保証などは得られない。そのため、実際に PWM を用いる場合には、近似誤差が小さくなるように、着目する信号の帯域よりも十分高いサンプリング周波数を用いる必要がある。

制御入力が電圧などである場合には高い周波数での切替は可能であるが、弁などのような動作帯域の狭い機械要素をアクチュエータとして用いる場合には困難である。PWM を低いサンプリング周波数で用いるとき、平均値に基づく手法では理論的な意味においてだけでなく実用上においても有効な結果は得られない。しかしながら、PWM を用いればデューティ比を定めるだけで容易に切替則を与えることができ、高次の制御対象に対しても系統的な設計が可能となる。そこで本論文では、記号入力を有する制御対象に対して PWM を用いることを前提とし、さらに、その制御系の状態遷移を厳密に解析することにより系の局所的な安定性の解析や安定性を保証する制御則の設計を行なうことを考える。

PWM を伴うシステムの厳密な解析・設計については、近年、Almér らによってその安定性を解析する手法とそれに基づく制御系設計法が与えられている^{4), 5)}。本論文で扱うシステムは、文献 4), 5) で提案されているシステムの特別な場合となる。ただし本論文では、サンプル点上の振舞を与える離散時間システムについて、その不動点の存在や可制御性、可

** 大阪大学大学院工学研究科

* (株) リコー

** Graduate School of Engineering, Osaka University

* Ricoh Company

(Received April 20, 2005)

(Revised September 26, 2005)

Fig. 1 PWM-type control input

安定性に関する具体的な解析結果を与える。これらの結果は文献4), 5) では与えられていない。また, 文献4), 5) では安定性の解析ならびに安定化状態フィードバックゲインの設計に多くの連立 LMI を用いているが, 本論文では線形近似システムを用いることで, 状態および出力フィードバック安定化補償器を簡素な LMI に基づいて設計する手法を与える。

本論文で用いる記法は標準的なものである。与えられた行列 V に対して, $V^\perp$ は $V^\perp V = 0$ を満足し, 最大のランクをもつフルランクな行列である。

2. 問題設定

次式で与えられる線形時不変システムを考える。

$$\dot{\xi}(t) = A_c \xi(t) + B_c u(t) \quad (1)$$

ただし, $\xi(t) \in \mathbf{R}^n$ は状態, $u(t) \in \mathbf{R}$ は制御入力である。本論文では, $u(t)$ がとりうる値は u_L, u_H (ただし $u_H > u_L$) の2値とし, さらに, $u(t)$ はこれら2つの記号入力に関する周期 h の PWM によって与えられるものとする。すなわち, k ($k = 0, 1, \dots$) 番目のサンプル時刻で与えられるデューティ比 $d_k \in [0, 1]$ に対し, そのサンプル周期における $u(t)$ はつぎの値をとるものとする (Fig. 1)。

$$u(t) = \begin{cases} u_H & (kh \leq t < (k + d_k)h) \\ u_L & ((k + d_k)h \leq t < (k + 1)h) \end{cases} \quad (2)$$

本論文では (1) 式のシステムを上記の PWM 型制御入力を用いて安定化することを考える。ただし, PWM 型制御入力は周期 h で脈動する信号であるので, この制御入力を用いて状態を u_H あるいは u_L に対する平衡点以外の点へ収束させることは不可能である (詳細は付録 A を参照)。よって, ここで考えられる安定性は最善でも定常周期解すなわちリミットサイクルに関する安定性となる。本論文で考える問題は以下のとおりである。

[問題] (1), (2) 式で与えられるシステムが局所的に安定なリミットサイクルを生成するようにデューティ比 d_k を定めるフィードバック制御則を求めよ。

PWM 型制御入力は切換を有するため, 連続時間の振舞を直接に考慮して解析・設計を行なうのは困難である。一方, 任意の時刻における制御入力 $u(t)$ の値は各サンプル時刻 kh におけるデューティ比 d_k によって一意に定められる。さらに,

(1) 式の状態 $\xi(t)$ は各サンプル時刻での状態 $\xi(kh)$ とデューティ比 d_k によって一意に定められる。ここで, $\xi(kh)$ は $\xi(t)$ に対するポアンカレ写像を与えるので, $\xi(kh)$ が各 k に対して同一の値をとれば状態 $\xi(t)$ は連続時間 $kh \leq t \leq (k+1)h$ においてリミットサイクル上を遷移する。また, $\xi(kh)$ が $k \rightarrow \infty$ においてある一点 ξ_* に収束すれば, $\xi(t)$ は ξ_* を通過するリミットサイクルに収束する。すなわち, $\xi(kh)$ の振舞がリミットサイクルの安定性を支配している。そこで本論文では, $\xi(kh)$ の振舞に着目して考える。

サンプル時刻 kh での状態 $\xi(kh)$ を x_k と書くことにすると, 簡単な計算から x_k は以下の状態方程式にしたがうことがわかる。

$$x_{k+1} = A_d x_k + B_H(d_k) u_H + B_L(d_k) u_L \quad (3)$$

ただし,

$$\begin{aligned} A_d &= \exp(A_c h) \\ B_H(d) &= \int_{(1-d)h}^h \exp(A_c \tau) B_c d\tau \\ B_L(d) &= \int_0^{(1-d)h} \exp(A_c \tau) B_c d\tau \end{aligned}$$

である。(3) 式は (2) 式をホールド関数として (1) 式を離散化したものである。とくに, (3) 式は x_k を状態, d_k を制御入力とする (非線形) 離散時間システムとみなすことができる。そこで, (3) 式が漸近安定な不動点をもつように d_k を定めれば本論文の目的を達成することができる。以降では, d_k を状態あるいは出力フィードバックによって与えることを考え, その設計法について考える。

ここで, (2) 式の入力信号の1サンプル周期での平均値 w_k を求めると

$$w_k = u_H \cdot d_k + u_L \cdot (1 - d_k) \quad (4)$$

となる。仮定より $u_H - u_L > 0$ であるので, d_k と w_k の関係は一对一である。実際, (4) 式を d_k について解くと

$$d_k = \frac{w_k - u_L}{u_H - u_L} \quad (5)$$

となる。以上より, デューティ比 d_k を制御入力とみなすことは, 入力信号の平均値 w_k を制御入力とみなすことと等価である。以降では, 各文脈に応じて d_k あるいは w_k のうち取り扱いが容易なものを適宜用いて考えることとする。

(1), (2) 式で与えられる制御対象は, 文献4), 5) で提案されているシステムの特別な場合となる。また, PWM を伴うシステムをサンプル点上の振舞に基づいて解析することも文献4), 5) と同様である。しかしながら, 文献4), 5) では離散時間システムに対する不動点の存在やその可制御性, 可安定性などについては言及されていない。一方, 本論文では (3), (5) 式の離散時間システムに一定値入力を与えたときの不動点の存在条件を与える。さらに, その不動点まわりでの線形近似システムを求め, その可制御性, 可安定性を解析するとともに, 状態および出力フィードバックによる局所安定化補償器を簡素な LMI に基づいて設計する手法を与える。

3. 安定化制御則の設計

3.1 線形近似

ここでは, (3), (5) 式の離散時間システムを制御対象と考える. (3), (5) 式は非線形システムであるので, 一般に $x=0$ が不動点になるとは限らない. また, 連続時間の状態 $\xi(t)$ が x_k を始点とする軌道を描くことを考えると, 必ずしも $x=0$ を不動点にすることが望ましいとも限らない. そこでここでは, (3) 式のシステムに動作点を設定することを考える. さらに, その動作点まわりでの線形化を行なうことによって安定化制御則の設計法を考える.

動作点 x_* は d_k を一定値 d_* にしたときの (3) 式のシステムの不動点の中から選ぶ必要がある. d_k はデューティ比であるので, d_k が k によらず一定であったとしても $u(t)$ は一定ではない. よって, 一般に (1) 式の連続時間システムに一定値入力に対する平衡点が存在するとしても, (3) 式の離散時間システムに d_* に対する不動点が存在するとは限らない. しかしながら実際には, ほとんどすべての場合において離散時間システムにも不動点が存在する.

[補題 1] 一定値入力 $u(t) = u_* \neq 0$ に対して (1) 式のシステムには平衡点が存在すると仮定する. このとき, A_c が $\pm \frac{2\pi n}{h} j$ ($n = 1, 2, \dots$) を固有値にもたないならば, 任意の $d_* \in (0, 1)$ に対して (3) 式のシステムには不動点が存在する. またさらに, (1) 式の平衡点集合の次元と (3) 式の不動点集合の次元は同じである (証明は付録 B)

補題 1 は, 連続時間システムに一定値入力に対する平衡点が存在すれば, ほとんどすべての場合に対して非線形離散時間システムにも一定値入力に対する不動点が存在することを示している. 補題 1 はさらに, 連続時間システムの平衡点が唯一であれば, 離散時間システムの不動点も唯一であることを意味している.

実際に動作点を定めるためには d_* を定める必要があるが, その一つの方法は, たとえば $d_* \in (0, 1)$ であることを考慮して $d_* = 0.5$ などとすることである.

以降では, 与えられた d_* に対して x_* が存在するものと仮定し, x_* まわりでの線形化を行なう.

《定理 2》 与えられた $d_* \in (0, 1)$ に対する不動点 x_* が存在するものと仮定する. このとき, x_* 近傍での線形近似システムは次式で与えられる.

$$\bar{x}_{k+1} = A_d \bar{x}_k + B_d \bar{w}_k \quad (6)$$

ただし,

$$B_d = \exp\{A_c(1-d_*)h\} B_c h$$

$$\bar{x}_k = x_k - x_*, \quad \bar{w}_k = w_k - w_*$$

$$w_* = (u_H - u_L) \cdot d_* + u_L$$

である.

(証明) (3), (5) 式について

$$f(x, d) = A_d x + B_H(d) u_H + B_L(d) u_L$$

$$d(w) = \frac{w - u_L}{u_H - u_L}$$

とおく. このとき, あきらかに

$$\frac{\partial f(x, d(w))}{\partial x} = A_d$$

である. また,

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\partial f(x, d(w))}{\partial w} \right|_{w=w_*} \\ &= \left. \frac{\partial f(x, d)}{\partial d} \right|_{d=d_*} \cdot \frac{\partial d(w)}{\partial w} \\ &= [-\exp\{A_c(1-d_*)h\} B_c u_H(-h) \\ & \quad + \exp\{A_c(1-d_*)h\} B_c u_L(-h)] \cdot \frac{1}{u_H - u_L} \\ &= \exp\{A_c(1-d_*)h\} B_c h = B_d \end{aligned}$$

である. $\square$

定理 2 で得られる (6) 式の線形近似システムの可制御性, 可安定性については, つぎの結果が得られる.

《定理 3》 (A_d, B_d) が可制御となるための必要十分条件は, (A_c, B_c) が可制御かつ A_c の相異なる固有値 λ_i ($i = 1, 2, \dots$) について

$$\lambda_i = \lambda_j + j2q\pi/h \quad (7)$$

となる i, j ($i \neq j$), q ($q = \pm 1, \pm 2, \dots$) が存在しないことである.

《定理 4》 (A_d, B_d) が離散時間システムの意味で可安定となるための必要十分条件は, (A_c, B_c) が連続時間システムの意味で可安定かつ A_c の実部が非負の相異なる固有値 λ_i ($\text{Re}(\lambda_i) \geq 0, i = 1, 2, \dots$) について (7) 式を満足する i, j ($i \neq j$), q ($q = \pm 1, \pm 2, \dots$) が存在しないことである. (証明は定理 3 と同様)

定理 3 は, 連続時間システムが可安定であれば, ほとんどすべての場合において (6) 式の離散時間線形近似システムも可安定であることを示している. これは, 連続時間システムが可安定であれば, ほとんどすべての場合, PWM を用いて局所的に安定なリミットサイクルを構成することが可能であることを意味している.

定理 3 はゼロ次ホールドに基づく離散化のときに得られていた結果と同様である⁶⁾. PWM 型制御入力はそもそも 2 値しか用いないので, ゼロ次ホールドより得られる連続値の離散時間制御入力よりも低い制御能力しかもちえない. 実際, 不安定系など有界な入力で大域的な安定化が不可能な場合には, PWM 型制御入力を用いて大域的な安定化を行なうことも不可能である. しかしながら, サンプル点での局所的な安定化という意味では, 両者の能力は同等である.

3.2 状態フィードバックによる安定化

本節では (6) 式の線形近似システムに対する安定化制御則を考える. ここでは特に $\bar{w}_k$ を静的状態フィードバック

$$\bar{w}_k = F \bar{x}_k \quad (8)$$

によって与えることを考える. これは, (3), (5) 式のシステムに対し, 以下の制御則

$$w_k = F(x_k - x_*) + w_* \quad (9)$$

を与えることと等価である。Fig. 2 は (9) 式の制御則を用いるときの閉ループ系のブロック線図である。(9) 式を用いるとき x_* は Fig. 2 のシステムの不動点となる。さらに、(6), (8) 式からなる閉ループ系

$$\bar{x}_{k+1} = (A_d + B_d F) \bar{x}_k \quad (10)$$

は Fig. 2 のシステムの x_* まわりでの線形近似システムとなるので、 F が (10) 式の安定化状態フィードバックゲインであるとき x_* は局所的に漸近安定な不動点となる。

デューティ比は $d_k \in [0, 1]$ でなければならないので、制御入力も $w_k \in [u_L, u_H]$ でなければならない。この条件より、与えられた F に対して制御入力 w が許容範囲内にあるための状態 x に関する条件が以下のように与えられる。

$$-(u_H - u_L) d_* \leq F(x - x_*) \leq (u_H - u_L)(1 - d_*)$$

すなわち、制御入力 w が許容範囲となる状態 x の領域は、2つの平行な超平面

$$F x = F x_* - (u_H - u_L) d_* \quad (11)$$

$$F x = F x_* + (u_H - u_L)(1 - d_*) \quad (12)$$

に挟まれる領域となる。状態が上記の領域外になるときは制御入力は未定義となる。その場合の制御入力の定義や安定性の解析などについては別途検討が必要である。

実際に設計を行なうためには状態フィードバックゲイン F の設計法を定める必要がある。(10) 式は標準的な線形システムであり、その安定化状態フィードバックゲイン F を求めるためのさまざまな手法が従来より知られている。それら既存の手法を適用してももちろん構わないのではあるが、 F の設計手法によっては吸引領域が小さくなる場合もある。そこでここでは、線形近似システムと非線形システムとの誤差が大きくなるように状態を遷移させることをねらった以下の設計手法を用いることとする。

(3) 式にあらわれる非線形性は、制御入力 w が (2) 式によって定められることのみに起因している。このことから、線形近似システムに対する制御入力 $\bar{w}$ を小さくすることができれば、それだけ非線形性の影響を小さくすることができ、その結果、吸引領域は大きくなると考えられる。

一方、(8) 式の状態フィードバックゲイン F を定めると、各初期状態 x_0 に対して線形近似システム (10) 式の解軌跡

Fig. 2 closed-loop system

Fig. 3 State trajectory

が定まる。このとき、解軌跡が大きな $\bar{w}$ をとる領域を通過すると非線形性の影響を受けやすくなる。そこで以降では、状態遷移の過程で制御入力を大きくしないように、Fig. 3 のようにリアプノフ関数のレベルセットが $\bar{w} = F\bar{x}$ 方向につぶれた形状となるような F を求めることを考える。Fig. 3 の背景は、色が濃い領域ほど $|\bar{w}| = |F\bar{x}|$ が大きくなることを示したものである。

上記の問題を考えるために、 $\bar{w}_k$ を制御出力としたときに (6), (8) 式によって与えられる閉ループシステム

$$\bar{x}_{k+1} = A \bar{x}_k \quad (13)$$

$$\bar{w}_k = C \bar{x}_k \quad (14)$$

$$A = A_d + B_d F, \quad C = F \quad (15)$$

を考える。ただし、(13) 式のシステムは安定とする。さらに、(13) 式の状態方程式に対して、2次形式リアプノフ関数 $V(\bar{x}) = \bar{x}^T \mathcal{Y} \bar{x}$ を考える。ただし、 $\mathcal{Y}$ は次式を満足する正定行列である。

$$\mathcal{Y} - A^T \mathcal{Y} A < 0 \quad (16)$$

(16) 式を満足するように与えられた $\mathcal{Y}$ に対して、レベルセット

$$\mathcal{L} = \{\bar{x} : V(\bar{x}) \leq 1\}$$

を考える。ここでは線形システムを考えるので、レベルを 1 としても一般性を失わないことに注意しておく。また、 $\mathcal{Y}$ が (16) 式を満足することから、 $\mathcal{L}$ は (13) 式の状態方程式に対する不変集合となる。すなわち、 $\bar{x}_0 \in \mathcal{L}$ ならば、任意の $k \geq 0$ に対して $\bar{x}_k \in \mathcal{L}$ である。

一方、 $\mathcal{L}$ に属する各 $\bar{x}$ に対して (14) 式で $\bar{w}$ を定めるとき、次式が成立する。

$$\kappa = \max_{\bar{x} \in \mathcal{L}} \|\bar{w}\|^2 = \lambda_{\max} \left(\mathcal{Y}^{-\frac{1}{2}} C^T C \mathcal{Y}^{-\frac{1}{2}} \right) \quad (17)$$

よって、 $\mathcal{L}$ が不変集合であることと (17) 式から、 $\mathcal{L}$ に属する

任意の初期値 $\bar{x}_0 \in \mathcal{L}$ とすべての $k \geq 0$ に対して $\|\bar{w}_k\|^2 \leq \kappa$ が成立する。

以上より, κ を小さくする F と $\mathcal{Y}$ を求めることができれば $\bar{w}$ が小さくなるようにレベルセットを整形することができる。ここで, $\kappa < \gamma$ が成り立つための必要十分条件は,

$$\begin{aligned} \gamma I - \mathcal{Y}^{-\frac{1}{2}} C^T C \mathcal{Y}^{-\frac{1}{2}} &> 0 \\ \Leftrightarrow \gamma \mathcal{Y}^{-1} - \mathcal{Y}^{-1} C^T C \mathcal{Y}^{-1} &> 0 \\ \Leftrightarrow \mathcal{Y}^{-1} - \mathcal{Y}^{-1} C^T \frac{I}{\gamma} C \mathcal{Y}^{-1} &> 0 \\ \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \mathcal{Y}^{-1} & \mathcal{Y}^{-1} C^T \\ C \mathcal{Y}^{-1} & \gamma I \end{bmatrix} &> 0 \end{aligned} \quad (18)$$

で与えられるので, (16), (18) 式のもとで γ の最小化を考えればよい。

ただし, (16), (18) 式を満足する $\mathcal{Y}$ は定数倍の自由度をもち, $\mathcal{Y}$ を $\alpha > 0$ 倍すると κ は $\frac{1}{\alpha}$ 倍される。よって, 実際に F , $\mathcal{Y}$ を求めるためには, 何らかの正規化条件, たとえば

$$I \geq \mathcal{Y} \quad (19)$$

などを課す必要がある。また, 単に κ の最小化だけ行なうと不動点への収束が著しく遅くなることがあるので, ここでは安定度を制約条件として課すことを考える。すなわち, (16) 式の代わりに, 与えられた $\beta > 1$ を用いた次式を考える。

$$\mathcal{Y} - (\beta A)^T \mathcal{Y} (\beta A) < 0 \quad (20)$$

(20) 式を満足する $\mathcal{Y} > 0$ が存在すれば, $\rho(A) < \frac{1}{\beta}$ が成立する。

以下の補題は (18)~(20) 式を満足する F , $\mathcal{Y} > 0$ の存在条件を与えている。

[補題5] $A_d, B_d, \beta > 0$ が与えられたと仮定する。このとき, (13)~(15) 式で定義される状態方程式と与えられた $\gamma > 0$ に対して, (18)~(20) 式を満足する $F, \mathcal{Y} > 0$ が存在する必要十分条件は, 次式

$$\begin{bmatrix} X & \beta(A_d X + B_d M) \\ \beta(A_d X + B_d M)^T & X \end{bmatrix} > 0 \quad (21)$$

$$\begin{bmatrix} X & M^T \\ M & \gamma I \end{bmatrix} > 0, \quad X \geq I \quad (22)$$

を満足する $X > 0$, M が存在することである。また, そのような $X > 0$, M が存在するとき, $F = MX^{-1}$ は条件を満足する。

(証明) [必要性] (18)~(20) 式を満足する $F, \mathcal{Y} > 0$ が存在したとする。このとき, $X = \mathcal{Y}^{-1}$, $M = F\mathcal{Y}^{-1}$ とおくと, (20) 式より (21) 式, (18), (19) 式より (22) 式がそれぞれ成立する。

[十分性] (21), (22) 式を満足する $X > 0$, M が存在したとする。このとき, $\mathcal{Y} = X^{-1}$, $F = MX^{-1}$ として必要性の証明を逆にたどることにより, (18)~(20) 式が成り立つことが示される。□

補題5より, (21), (22) 式を満足する $X > 0$, M を求

めれば, (18)~(20) 式を満足する F を求めることができる。(21), (22) 式は γ, X, M に関する LMI であるので, γ を最小化することは容易である。

3.3 出力フィードバックによる安定化

つぎに, 観測出力 $\bar{y}_k$ が行列 C を用いて

$$\bar{y}_k = C\bar{x}_k \quad (23)$$

と与えられたものと仮定して, 出力フィードバック安定化制御則の設計法を考える。出力フィードバック補償器には以下の状態空間実現を仮定する。

$$\begin{aligned} z_{k+1} &= A_c z_k + B_c \bar{y}_k \\ \bar{w}_k &= C_c z_k + D_c \bar{y}_k \end{aligned} \quad (24)$$

以上の仮定は, 観測出力 $\bar{y}_k$ と (3), (5) 式の離散時間システムに印加される入力 w_k が

$$\bar{y}_k = Cx_k - Cx_* \quad (25)$$

$$w_k = \bar{w}_k + w_* \quad (26)$$

によって与えられることを意味する。ここで, Cx_k は (3) 式の離散時間システムから実際に得られる観測出力であり, Cx_* は求められた動作点を用いて与えられるオフセットである。

(24) 式の補償器が与えられたとき, (6), (23) 式のシステムに対する閉ループ系を

$$\begin{cases} \xi_{k+1} = A\xi_k \\ \bar{w}_k = C\xi_k \end{cases}, \quad \xi_k = \begin{bmatrix} \bar{x}_k \\ z_k \end{bmatrix} \quad (27)$$

とすると, A, C はつぎのように与えられる。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_d & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & B_d \\ I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I \\ C & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (28)$$

変数変換の結果^{7)~9)}より, (27), (28) 式の閉ループ系に対して, (18), (20) 式を満足する (24) 式の補償器が存在するための必要十分条件は, 以下の不等式を満足する $X > 0$, $Y > 0$ ($X, Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$), $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}$ が存在することである。

$$\begin{bmatrix} \Xi & \beta\Theta_A \\ \beta\Theta_A^T & \Xi \end{bmatrix} > 0 \quad (29)$$

$$\begin{bmatrix} \Xi & \Theta_C^T \\ \Theta_C & \gamma I \end{bmatrix} > 0 \quad (30)$$

$$\Xi = \begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} > 0 \quad (31)$$

ただし,

$$\Theta_A = \begin{bmatrix} A_d X + B_d \hat{C} & A_d + B_d \hat{D} \hat{C} \\ \hat{A} & Y A_d + \hat{B} \hat{C} \end{bmatrix} \quad (32)$$

$$\Theta_C = \begin{bmatrix} \hat{C} & \hat{D}C \end{bmatrix} \quad (33)$$

である。よって、(29)~(31) 式を用いれば (18), (20) 式を達成することができる。

状態フィードバックの場合と同様に、(29)~(31) 式も定数倍だけの自由度を有する。すなわち、ある $X, Y, \hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}, \gamma$ に対して (29)~(31) 式が成り立てば、それらは $X, \hat{C}, \gamma$ を α 倍、 $Y, \hat{B}$ を $\frac{1}{\alpha}$ 倍してもやはり成立する。そこで、 γ の最小化を行なう際には以下の正規化条件を与えることとする。

$$I \geq Y \quad (34)$$

以上より、出力フィードバックの場合には (29)~(34) 式のもとで γ を最小化すればよい。(29)~(34) 式は γ に関しても LMI であるので、 γ の最小化は容易である。

4. 数 値 例

本節では数値例を用いて PWM 型制御入力による安定化制御の有効性を検証する。以降では、提案法を不安定な 2 次システムと回転 2 慣性系 (4 次システム) に適用する。ただし、提案手法によって求められたデューティ比が $d_k < 0$ あるいは $d_k > 1$ となる場合には、それぞれ $d_k = 0, d_k = 1$ としてシミュレーションを行なう。

まず、次式で与えられる不安定な 2 次システムを考える。

$$A_c = \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, B_c = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (35)$$

$$h = 0.03, u_H = 15, u_L = -15$$

また、動作デューティ比を $d_* = 0.5$ とする。このときの動作点は

$$x_* = \begin{bmatrix} -0.112 & 0.113 \end{bmatrix}^T$$

である。

このシステムに 3.2 節の手法を適用して状態フィードバックゲイン F の設計を行なった。ただし、安定度は $\beta = 1.2$ とした。Fig. 4 は初期値

$$x_0 = \begin{bmatrix} 0.1 & -0.5 \end{bmatrix}^T$$

に対する閉ループ系の解軌跡のシミュレーション結果である。点線、丸はそれぞれ連続時間システム、非線形離散時間システムの解軌跡をあらわしている。Fig. 4 より、比較的長いサンプリング周期 $h = 0.03$ に対しても PWM 型制御入力によって漸近安定なリミットサイクルが生成されていることが確認できる。また、生成されるリミットサイクルは離散時間システムの不動点を通る閉軌道となっていることも確認できる。Fig. 5 は同じシミュレーションに対するデューティ比の推移をあらわしている。Fig. 5 より、デューティ比はその動作値 $d_* = 0.5$ に収束していることが確かめられる。

Fig. 6 は吸引領域を数値的に求めた結果を示している。図中の点は 100 ステップ後の状態と不動点との差のユークリッド

Fig. 4 state trajectories by SF

Fig. 5 duty ratio by SF

Fig. 6 domain of attraction by SF

ノルムが 0.1 より小さくなるような初期値を示したものである。また、 x_{eH}, x_{eL} は、それぞれ $u(t) = u_H, u(t) = u_L$ としたときの (1) 式の連続時間システムの平衡点である。2 つの曲線は、 $u(t) = u_H, u(t) = u_L$ としたときに、それぞれ x_{eL}, x_{eH} を通る連続時間システムの解軌道である。紙面の都合上詳細は省略するが、位相面解析を行なうことにより、これら 2 つの曲線によって囲まれる閉領域は任意の切換を許した場合に 2 値入力 u_H, u_L によって x_* へ到達可能な初期状態の集合を与えることが示される。提案法によって得られる安定化可能領域はこの閉領域と同程度の大きさになっていることが確認できる。

Fig. 7 state trajectories by OF

Fig. 8 duty ratio by OF

Fig. 9 domain of attraction by OF

Fig. 7, 8, 9 は, C を

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

と与えた場合に得られる出力フィードバック補償器に対して, それぞれ Fig. 4, 5, 6 に対応する図を示したものである. ただし, 補償器の初期値は 0 とした. また, Fig. 7, 9 は閉ループ系の状態のうち, 制御対象の状態成分の遷移のみを示したものである. 状態フィードバックの場合に比べて吸引領域は小さくなっているが, 局所的な安定化が達成できていることが確認できる.

つぎに, Fig. 10 の回転 2 慣性系を考える. q_1, q_2 は各回転体の角度, ω_1, ω_2 は角速度であり, J_1, J_2 は慣性モー

Fig. 10 rotating two-mass system

Fig. 11 Discrete-time system with linear-approximation

メント, κ はシャフトのばね定数, c はシャフトの粘性摩擦係数である. 回転体 1 へ印加されるトルクを制御入力 u とすると, 回転 2 慣性系の挙動を (1) 式の状態方程式を用いて記述することができる. ただし,

$$\xi = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \omega_1 & \omega_2 \end{bmatrix}^T$$

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\kappa}{J_1} & \frac{\kappa}{J_1} & -\frac{c}{J_1} & \frac{c}{J_1} \\ \frac{\kappa}{J_2} & -\frac{\kappa}{J_2} & \frac{c}{J_2} & -\frac{c}{J_2} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{J_1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

である. 上記のシステムは原点に 2 重極をもつ不安定系である. さらに 4 次のシステムであるので, 位相面解析に基づく設計は極めて困難である.

2 次系の場合と同様に, 上記のシステムに対して提案手法を適用して状態フィードバックゲイン F の設計を行なう. ただし, 各物理パラメータの値は

$$\kappa = 2, \quad c = 1, \quad J_1 = 1, \quad J_2 = 2$$

であり, サンプル周期は $h = 0.1$, 入力値は $u_H = 15$, $u_L = -15$ である. さらに, 動作デューティー比を $d_* = 0.5$ として, 動作点を

$$x_* = \begin{bmatrix} -5.865 \times 10^{-5} \\ 5.865 \times 10^{-5} \\ -0.3750 \\ 1.949 \times 10^{-5} \end{bmatrix}$$

と与える. 安定度は $\beta = 1.2$ である.

Fig. 11 は初期値

$$x_0 = \begin{bmatrix} 0.03 & 0.02 & 0.01 & -0.02 \end{bmatrix}^T$$

に対するシミュレーション結果である。ただし、Fig. 11 は回転体 2 に関する状態 (x_2, x_4) の軌道である。図より、提案手法によって漸近安定なリミットサイクルが生成されていることが確認できる。

この例のように、提案手法を用いれば高次の系に対しても 2 値の記号入力に基づく制御則を系統的に設計することが可能である。

5. おわりに

本論文では記号入力を有する制御対象に対して PWM 型の制御入力を仮定することによって、サンプル点上の振舞を与える非線形離散時間システムおよびその線形近似システムを導出した。さらに、その動作点の存在や可制御性、可安定性を具体的に解析し、状態および出力フィードバック安定化切換制御則の設計法を提案した。この制御則は連続時間システムの意味では局所的に安定なリミットサイクルを保証するものである。提案手法を用いることで、位相面解析では取り扱うことが出来ない高次のシステムも取り扱うことが可能である。さらに、数値例によって提案法の有効性の検証を行った。

参考文献

- 1) A. Bicchi, A. Marigo and B. Piccoli: On the Reachability of Quantized Control Systems, IEEE Trans. Automat. Contr., **47**-4, 546/563 (2002)
- 2) J. Raisch: Control of Continuous Plants by Symbolic Output Feedback, Hybrid Systems, 370/390 (1994)
- 3) I. Flugge-Lotz: Discontinuous and Optimal Control, McGraw-Hill (1968)
- 4) S. Almér, U. Jönsson, C.-Y. Kao and J. Mari: Stability Analysis of a Class of PWM Systems Using Sampled-Data Modeling, Proc. 42nd IEEE Conf. Decision Contr., 4794/4799 (2003)
- 5) S. Almér, U. Jönsson, C.-Y. Kao and J. Mari: Global Stability Analysis of DC-DC Converters Using Sampled-Data Modeling, Proc. Amer. Contr. Conf., 4549/4554 (2004)
- 6) R. Kalman, Y. Ho and K. Narendra: Controllability of linear dynamical systems, Contributions to Differential Equations, **1**, 189/213 (1963)
- 7) 増淵, 小原, 須田: LMI 条件を満たすコントローラの統一的構成法, 計測自動制御学会論文集, **31**-10, 1586/1594 (1995)
- 8) C. Scherer, P. Gahinet and M. Chilali: Multiobjective Output-Feedback Control via LMI Optimization, IEEE Trans. Automat. Contr., **42**-7, 896/911 (1997)
- 9) 浅井 徹: ロバスト制御の基礎から最先端まで 第 4 回: 線形行列不等式, 計測と制御, **42**-10, 859/866 (2003)

[著者紹介]

富田 健太郎

2005 年 3 月大阪大学大学院工学研究科電子制御工学専攻修了。同年 (株) リコーに就職し、現在に至る。

浅井 徹 (正会員)

1996 年 3 月東京工業大学大学院理工学研究科制御工学専攻修了。同年 1 月日本学術振興会特別研究員。99 年大阪大学大学院工学研究科助手、2002 年同研究科講師、2005 年同研究科助教授となり、現在に至る。システム制御情報学会の会員、博士 (工学)

《付 録》

A. 状態を特別な点以外の点に収束させることはできない

[命題 6] (1) 式の状態方程式が与えられたものとする。このとき、(2) 式の制御入力を用いて $\xi(t)$ を $u(t) \equiv u_H$ あるいは $u(t) \equiv u_L$ に対する平衡点以外の点へ収束させることはできない。

(証明) ξ_c は $u(t) \equiv u_H$ あるいは $u(t) \equiv u_L$ に対する平衡点ではないとする。このとき、

$$\zeta_H = A\xi_c + Bu_H, \quad \zeta_L = A\xi_c + Bu_L$$

を定義すると $\|\zeta_H\| > 0$, $\|\zeta_L\| > 0$ である。ここでまず $A = 0$ の場合を考える。このとき $\|Bu_H\| > 0$, $\|Bu_L\| > 0$ である。また、 k 番目のサンプル時刻において $d_k \geq \frac{1}{2}$ ならば

$$\xi\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)h\right) - \xi(kh) = \frac{h}{2} Bu_H$$

が成り立ち、一方、 $d_k \leq \frac{1}{2}$ ならば

$$\xi((k+1)h) - \xi\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)h\right) = \frac{h}{2} Bu_L$$

が成り立つ。よって、任意の k に対して次式が成立する。

$$\begin{aligned} & \max_{t_1, t_2 \in [kh, (k+1)h]} \|\xi(t_1) - \xi(t_2)\| \\ & \geq \frac{h}{2} \min(\|Bu_H\|, \|Bu_L\|) > 0 \end{aligned}$$

このとき、 $\xi(t)$ はコーシー列にならないので一点に収束しない。

つぎに $A \neq 0$ の場合を考える。ここで、

$$\delta_0 \leq \frac{1}{2\bar{\sigma}(A)} \min(\|\zeta_H\|, \|\zeta_L\|) \quad (\text{A.1})$$

を満足する任意の $\delta_0 > 0$ を考える。 $A \neq 0$ より $\bar{\sigma}(A) > 0$ である。このとき、 $\|\xi(t) - \xi_c\| \leq \delta_0$ を満足する任意の $\xi(t)$

に対して

$$\begin{aligned} \|A\xi(t) + Bu_H\| &= \|A\xi_c + Bu_H + A(\xi(t) - \xi_c)\| \\ &\geq \|\zeta_H\| - \bar{\sigma}(A)\|\xi(t) - \xi_c\| \\ &\geq \frac{1}{2}\|\zeta_H\| > 0 \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

が成り立つ。同様に

$$\|A\xi(t) + Bu_L\| \geq \frac{1}{2}\|\zeta_L\| > 0$$

も成り立つ。

一方、(1) 式の状態方程式に一定値入力 $u(t) = u_H$ を印加し続けるとき、 $\xi(t + \Delta t)$ について

$$\xi(t + \Delta t) = \xi(t) + \Delta t(A\xi(t) + Bu_H) + o(|\Delta t|) \quad (\text{A.3})$$

が成り立つ。ただし、 $o(|\Delta t|)$ は Δt だけでなく $\xi(t)$ にも依存する。 $\|\xi - \xi_c\| \leq \delta_0$ を満足する ξ の集合は有界閉集合であるので、十分小さな $\Delta t_H \in (0, \frac{h}{2})$ が存在し、任意の $\Delta t \in (0, \Delta t_H]$ と $\|\xi(t) - \xi_c\| \leq \delta_0$ を満足する任意の $\xi(t)$ に対して次式が成立する。

$$\left\| \frac{o(|\Delta t|)}{\Delta t} \right\| \leq \frac{1}{4}\|\zeta_H\| \quad (\text{A.4})$$

この Δt_H を用いて

$$\delta_H = \min \left(\delta_0, \frac{\Delta t_H \|\zeta_H\|}{8} \right)$$

と定義すると、(A.2)~(A.4) 式より次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} \|\xi(t + \Delta t) - \xi(t)\| &\geq \Delta t \left(\|A\xi(t) + Bu_H\| - \left\| \frac{o(|\Delta t|)}{\Delta t} \right\| \right) \\ &\geq \frac{\Delta t}{4}\|\zeta_H\| \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

(A.5) 式は任意の $\Delta t \in (0, \Delta t_H]$ に対して成立するので、とくに次式も成り立つ。

$$\|\xi(t + \Delta t_H) - \xi(t)\| \geq \frac{\Delta t_H}{4}\|\zeta_H\| \geq 2\delta_H \quad (\text{A.6})$$

同様に $u(t) = u_L$ を印加し続ける場合にも、ある $\Delta t_L \in (0, \frac{h}{2})$ が存在して、 $\|\xi(t) - \xi_c\| \leq \delta_L$ を満足する任意の $\xi(t)$ に対して

$$\|\xi(t + \Delta t_L) - \xi(t)\| \geq \frac{\Delta t_L}{4}\|\zeta_L\| \geq 2\delta_L \quad (\text{A.7})$$

が成り立つ。ただし、

$$\delta_L = \min \left(\delta_0, \frac{\Delta t_L \|\zeta_L\|}{8} \right)$$

である。

ここで、

$$\delta_1 \leq \min(\delta_H, \delta_L) \quad (\text{A.8})$$

を満足する任意の $\delta_1 > 0$ を考える。このとき、ある k について $\|\xi(kh) - \xi_c\| \leq \delta_1$ であったとき、以下のいずれかが成立する。

- $d_k \geq \frac{1}{2}$ である。このとき、(A.6) 式より

$$\|\xi(kh + \Delta t_H) - \xi_c\| > \delta_1$$

が成り立つ。

- $d_k < \frac{1}{2}$ かつ $\|\xi((k + d_k)h) - \xi_c\| > \delta_1$ である。
- $d_k < \frac{1}{2}$ かつ $\|\xi((k + d_k)h) - \xi_c\| \leq \delta_1$ である。このとき、(A.7) 式より、

$$\|\xi((k + d_k)h + \Delta t_L) - \xi_c\| > \delta_1$$

が成り立つ。

よって、 $\xi(t)$ は区間 $t \in (kh, (k+1)h)$ において $\|\xi(t) - \xi_c\| \leq \delta_1$ に留まり続けることはない。

以上の議論は (A.8) 式を満足する任意の δ_1 に対して成り立つので、(2) 式の制御入力を用いて状態を ξ_c に収束させることはできない。□

B. 補題 1 の証明

(証明) 与えられた $d_* \in (0, 1)$ に対して

$$v_* = B_H(d_*)u_H + B_L(d_*)u_L$$

とする。このとき、不動点が存在するための必要十分条件は $v_* \in \text{Im}(I - A_d)$ である。これは、 $\eta(I - A_d) = 0$ を満足する $\eta \in \mathbf{C}^n$ が存在すれば $\eta v_* = 0$ が成り立つことと等価である。

今、 $\eta(I - A_d) = 0$ を満足する η が存在したと仮定する。このとき、 $\eta = \eta A_d$ が成立するので、 A_d は 1 を固有値にもち、 η はその左固有ベクトルとなる。ここで、行列指数関数の性質から、 η が A_d の左固有ベクトルならば η は A_c の左固有ベクトルであり、さらに、任意の τ に対して $\exp(A_c \tau)$ の左固有ベクトルとなる。仮定より A_c は $\pm \frac{2\pi n}{h}j$ ($n = 1, 2, \dots$) を固有値にもたないので、 η は A_c の固有値 0 に対する左固有ベクトルになり、さらに $\exp(A_c \tau)$ の固有値 1 に対する左固有ベクトルとなる。よって、以下の関係が成立する。

$$\eta A_c = 0, \quad \eta \exp(A_c \tau) = \eta$$

一方、(1) 式のシステムに平衡点が存在することから、 $B_c \in \text{Im}(A_c)$ が成り立つ。すなわち、 $\eta A_c = 0$ ならば $\eta B_c = 0$ である。これらの事実から

$$\begin{aligned} \eta B_H(d_*) &= \int_{(1-d)h}^h \eta \exp(A_c \tau) B_c d\tau \\ &= \int_{(1-d)h}^h \eta B_c d\tau = 0 \end{aligned}$$

が成立する。同様に $\eta B_L(d_*) = 0$ も成り立つことから $\eta v_* = 0$ が成り立つ。

以上より、 $v_* \in \text{Im}(I - A_d)$ が成り立つので、任意の $d_* \in (0, 1)$ に対して (3) 式のシステムには不動点が存在する。

平衡点と不動点の次元については、ジョルダン標準形に基づいた議論より $\text{rank}(A_c) = \text{rank}(I - \exp(A_c \tau))$ となることからあきらか。□

C. 定理 3 の証明

(証明) (A_d, B_d) の定義より、その可制御性は (A_c, B_c) に対する座標変換に依存しない。よって、一般性を失うことなく

A_c がジョルダン標準形であると仮定しても構わない。そこでここでは、 A_c が以下の構造を有すると仮定する。

$$A_c = \text{diag}(J_1, J_2, \dots, J_r) \quad (\text{C.1})$$

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{n_i \times n_i}$$

また、 A_c に対応して B_c にも以下の分割を仮定する。

$$B_c = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_r \end{bmatrix}, \quad b_i \in \mathbf{R}^{n_i} \quad (\text{C.2})$$

A_c, B_c が (C.1), (C.2) 式の構造を有するとき、 (A_c, B_c) が可制御となるための必要十分条件は、任意の $\sigma \in \mathbf{C}$ に対して

$$\text{rank}[A_c - \sigma I \quad B_c] = n$$

が成立することであり、これはさらに、以下の2つの条件が同時に成立することと等価である⁶⁾。

- $i \neq j$ をみたとす任意の i, j に対して $\lambda_i \neq \lambda_j$ が成り立つ。
- 任意の i に対して $b_{i,n_i} \neq 0$ である。ただし、 b_{i,n_i} は b_i の第 n_i 要素である。

一方、(C.1), (C.2) 式の A_c, B_c を用いると、 A_d, B_d は以下のように与えられる。

$$A_d = e^{A_c h} = \text{diag}(e^{J_1 h}, e^{J_2 h}, \dots, e^{J_r h})$$

$$e^{J_i h} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_i h} & h & \frac{h^2}{2!} & \cdots & \frac{h^{n_i-1}}{(n_i-1)!} \\ 0 & e^{\lambda_i h} & h & \cdots & \frac{h^{n_i-2}}{(n_i-2)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & h \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_i h} \end{bmatrix}$$

$$B_d = \begin{bmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ \vdots \\ \hat{b}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{J_1(1-d_*)h} b_1 h \\ e^{J_2(1-d_*)h} b_2 h \\ \vdots \\ e^{J_r(1-d_*)h} b_r h \end{bmatrix}$$

以上の準備のもとで、以下に証明を与える。

(必要性) (A_c, B_c) が不可制御あるいは (7) 式を満足する i, j, q が存在すると仮定する。すなわち、以下の条件のいずれかが成立すると仮定する。

- (a) ある i, j ($i \neq j$) に対して $\lambda_i = \lambda_j$ が成り立つ。
- (b) ある i に対して $b_{i,n_i} = 0$ である。
- (c) ある i, j, q に対して (7) 式が成立する。

条件 (a) あるいは (c) が成り立つとき、その i, j に対して $e^{\lambda_i h} = e^{\lambda_j h}$ が成立する。ここで、

$$e^{J_s h} - e^{\lambda_i h} I = \begin{bmatrix} 0 & h & \frac{h^2}{2!} & \cdots & \frac{h^{n_s-1}}{(n_s-1)!} \\ 0 & 0 & h & \cdots & \frac{h^{n_s-2}}{(n_s-2)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & h \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (s = i, j)$$

であることから

$$\text{rank}(e^{J_s h} - e^{\lambda_i h} I) = n_s - 1$$

であり、これより

$$\text{rank}(A_d - e^{\lambda_i h} I) \leq n - 2$$

が成り立つ。ここでさらに、 $\text{rank } B_d \leq 1$ であるので、

$$\text{rank}[A_d - \lambda_i I \quad B_d] \leq n - 1 \quad (\text{C.3})$$

である。すなわち、 (A_d, B_d) は不可制御である。

一方、条件 (b) が成り立つとき、その i に対してやはり (C.3) 式が成立し、 (A_d, B_d) は不可制御である。

以上より、 (A_d, B_d) が可制御ならば (A_c, B_c) は可制御かつ (7) 式を満足する i, j, q は存在しない。

(十分性) i ($i = 1, \dots, r$) を任意の値に固定する。仮定より $j \neq i$ となる任意の j について $e^{\lambda_j h} \neq e^{\lambda_i h}$ が成り立つので、任意の s ($s = 1, \dots, r$) に対して次式が成立する。

$$\text{rank}(e^{J_s h} - e^{\lambda_i h} I) = \begin{cases} n_s & (s \neq i) \\ n_i - 1 & (s = i) \end{cases} \quad (\text{C.4})$$

一方、 (A_c, B_c) が可制御であることから、任意の i に対して

$$\hat{b}_{i,n_i} = e^{\lambda_i(1-d_*)h} b_{i,n_i} h \neq 0 \quad (\text{C.5})$$

が成立する。ただし、 $\hat{b}_{i,n_i}$ は $\hat{b}_i$ の第 n_i 要素である。(C.4), (C.5) 式より次式

$$\text{rank}[e^{J_i h} - e^{\lambda_i h} I \quad \hat{b}_i] = n_i$$

が成立するので、さらに

$$\text{rank}[A_d - e^{\lambda_i h} I \quad B_d] = n \quad (\text{C.6})$$

も成立する。 i は任意でよかったので、(C.6) 式は任意の i について成立する。よって、 (A_d, B_d) は可制御である。□