IMP の構造を用いた位相補償ロバスト制御

王 蕊*・渡部 慶二*・村松 鋭一*
有我 祐一*・遠藤 茂*

Phase-Compensated Robust Control on the basis of IMP

Rui WANG*, Keiji WATANABE*, Eiichi MURAMATSU*, Yuichi ARIGA* and Sigeru ENDO*

This paper presents a new concept of the robust control, which is named by phase-compensated robust control. The mechanism of robust stability is analyzed by internal model parametrization (IMP). To overcome the conservativeness of the traditional methods based on the small gain theorem, the phase compensation is introduced. The robust stability condition is derived for the new control scheme. The simple design method is proposed.

Key Words: robust control, phase compensation, internal model parametrization

1. はじめに

ロバスト制御系の設計は、制御対象 $G(s)(1+\Delta(s))$ のモデル誤差 $\Delta(s)$ を評価関数で見積もり、評価関数と相補感度の積が1を超えないように設計してきた¹⁾。しかし、この方法には、いくつかの問題がある。

- (1) スモールゲイン定理を基にしているため保守性が高い。
- (2) モデル誤差の情報は、拘束条件にしか使われていない。
- (3) トレードオフの関係にある複数の仕様を重み関数として与え、一般化プラントにまとめ解を求めている。解が得られるまでに重み関数の調整に多くの時間を要することがある。
- (4) モデル誤差を厳密に見積もると、安定仕様が満たされても、応答が振動的になることがある。

これらの問題は、安定性に関係するゲインと位相の2つのうち、ゲインだけを用いているからと考えられる。著者の一人は、位相も考慮した内部モデル制御²⁾のロバスト安定性について検討し、低感度でロバスト安定を得るための必要十分条件は、制御対象とモデルの相対次数が一致していることを示し³⁾、相対次数を一致させるための方法を提案した⁴⁾。内部モデル制御は内部モデルパラメトリゼーションを介し、通常のフィードバック系に帰着できるので²⁾、上記の結果は、一般のフィードバック制御系にあてはまる。山田は、上記を

別の角度から検討し⁵⁾、モデルの相対次数の方が高い場合まで拡張できることを示した⁶⁾。しかし、実際の制御対象の相対次数を正確に把握することが困難な場合や、むだ時間がある場合は、上記の理論が適用できない。

本稿は、これらの問題を根本的に解決するため、内部モデル・パラメトリゼーション(IMP)のロバスト制御構造を利用し、モデル誤差の位相情報を安定性、応答特性の改善に使う新しいロバスト制御方法を提案する。

はじめに、内部モデル・パラメトリゼーション(IMP)をもとに従来のロバスト制御を解析し、保守性の原因を解明する。つぎに、保守性を解消するため、IMPのロバスト制御構造を利用し、位相補償を行なうロバスト制御法を提案する。さらに、提案方法のロバスト安定条件を導きだし、それをもとにした設計法を提案する。最後に、本稿の有効性を、 H^∞ 制御と比較しながら示す。本法の特徴は下記の通りである。

- (1) モデル誤差の位相情報を、制御対象のステップ応答の時間遅れから求めるので、化学プラントのような応答の遅い系にも適用可能である。
- (2) モデル誤差の位相情報を安定性の改善に用いるので、保守性の少ないロバスト安定条件が得られる。
- (3) 特に安定な制御対象に対しては、位相補償するだけで、後は、モデル誤差に依存しないエラー・フリー設計ができる。
- (4) モデル誤差の位相情報が、あらかじめ、感度と相補感度関数の中に組み込まれているので、トレードオフが解消される。
- (5) モデル誤差の位相情報を安定性、応答の改善に用いており、従来のロバスト制御系設計よりも、安定性、応答特性が優れた制御系が構成可能である。

* 山形大学工学部応用生命システム工学科 米沢市城南 4-3-16

* Yamagata University, 4-3-16 Jonan, Yonezawa

(Received June 3, 2005)

(Revised October 14, 2005)

2. 内部モデル・パラメトリゼーション

Fig. 1 に示す1入力1出力制御系を考える。ただし、 $G(s)(1+\Delta(s))$ は制御対象である。 $G(s)$ はモデルで、 $1+\Delta(s)$ はモデル誤差で、 $G(s)(1+\Delta(s))$ の不安定極数は、 $G(s)$ と同じとする。 r は目標入力、 u 、 y は入出力、 d は外乱で、 $G_c(s)$ は制御器である。

すべての制御器 $G_c(s)$ は、

$$G_c(s) = \frac{P(s)}{1 - G(s)P(s)} \quad (1)$$

と内部モデル・パラメトリゼーション表示(IMP)することができる²⁾。ただし、 $P(s)$ は自由パラメータである。

(1)式を用いると、モデル誤差が $\Delta(s)=0$ のとき、 r 、 d から y 、 u までの伝達特性は次式で与えられる。

$$\begin{bmatrix} y(s) \\ u(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G(s)P(s) & (1 - G(s)P(s))G(s) \\ P(s) & -P(s)G(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r(s) \\ d(s) \end{bmatrix} \quad (2)$$

フィードバック系が内部安定のための必要十分条件は、 $P(s)$ 、 $G(s)P(s)$ 、および $(1 - G(s)P(s))G(s)$ がすべて安定なことである²⁾。出力側感度関数は、

$$S(s) = 1 - G(s)P(s) \quad (3)$$

で、相補感度関数は

$$T(s) = G(s)P(s) \quad (4)$$

で与えられる。

3. スモールゲイン定理に基づくロバスト安定化

モデル誤差が $\Delta(s) \neq 0$ のとき、(2)式は

$$\begin{bmatrix} y(s) \\ u(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{1 + G(s)P(s)\{1 + \Delta(s) - 1\}} \begin{bmatrix} G(s)P(s)(1 + \Delta(s)) & (1 - G(s)P(s))G(s)(1 + \Delta(s)) \\ P(s) & -P(s)G(s)(1 + \Delta(s)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r(s) \\ d(s) \end{bmatrix} \quad (5)$$

となる。内部安定であるための必要十分条件は、(5)式右辺の行列の要素が安定なことである。 $P(s)$ 、 $G(s)P(s)$ 、および $(1 - G(s)P(s))G(s)$ が安定とすると、(5)式が内部安定であるための必要十分条件は、

$$\bar{G}(s) = \frac{1}{1 + G(s)P(s)\{1 + \Delta(s) - 1\}} \quad (6)$$

がロバスト安定なことである。(6)式が、ロバスト安定であるための必要十分条件は、 $G(s)P(s)\{1 + \Delta(s) - 1\}$ のベクトル軌跡が $(-1, 0)$ 点の右側を通ることである。

ここで、ロバスト安定性に影響するモデル誤差が、 $\{1 + \Delta(s) - 1\}$ のように、 $1 + \Delta(s)$ と 1 の差になっているのが内部モデル・パラメトリゼーション独自の構造である。これ

Fig. 1 Feedback control system

に対し、従来のスモールゲイン定理に基づくロバスト制御は、1 の部分を消去した

$$G(s)P(s)\{1 + \Delta(s) - 1\} = G(s)P(s)\Delta(s)$$

をもとに設計を行なっている。モデル誤差を

$$|\Delta(j\omega)| < |W_T(j\omega)|, \forall \omega \geq 0 \quad (7)$$

で見積もる。 $|\Delta(j\omega)|$ は直接測定できないので、

$$\frac{\|G_p(j\omega) - |G(j\omega)|\|}{|G(j\omega)|} \leq |\Delta(j\omega)| \leq \frac{|G_p(j\omega)| + |G(j\omega)|}{|G(j\omega)|} \quad (8)$$

の関係から、低域では左辺で、高域では右辺で、(8)式を満たす重み関数 $W_T(s)$ を求める。(7)式を満たす任意のモデル誤差に対し制御系が安定であるために必要十分条件は

$$|T(j\omega)| < \frac{1}{|W_T(j\omega)|}, \forall \omega \geq 0 \quad (9)$$

を満たすことである。目標追従特性、外乱抑制特性をよくするには、適当な $W_s(s)$ を選び

$$|S(j\omega)| < \frac{1}{|W_s(j\omega)|}, \forall \omega \geq 0 \quad (10)$$

を満たすように設計する。感度を0、相補感度を1にできるのは、 $|\Delta(j\omega)|$ が1を超えない範囲に限られる。

しかし、Fig. 2 からわかるように、 $|1 + \Delta(j\omega)| \leq 1$ であっても、 $1 + \Delta(j\omega)$ の回転により $|\Delta(j\omega)|$ は1を超える。これが、保守性を高くする原因になっている。また、(7)式の左辺と右辺の差が小さいと、モデル誤差時の開ループゲインの位相余裕が小さく、混合感度仕様を満たしても、制御系の応答が振動的になる場合がある。

4. 位相補償

上記の問題は、Fig. 2 のベクトル1が固定されているからである。この問題を解決するには、 $\{(1 + \Delta(j\omega)) - 1\}$ のベクトル1を、モデル誤差 $1 + \Delta(j\omega)$ を追従できる $M(j\omega)$ に代え、 $1 + \Delta(j\omega)$ と $M(j\omega)$ の差 $\{1 + \Delta(j\omega) - M(j\omega)\}$ にすることである。そうすれば Fig. 3 に示すように、安定性や応答に影響する正味の誤差の絶対値を小さくしたり、位相を進ませることができる^{8),9)}。

Fig. 2 Relation between $1 + \Delta(j\omega)$ and 1

Fig. 3 Replacement of the vector 1 by $M(s)$

$\{1+\Delta(s)-1\}$ を, $\{1+\Delta(s)-M(s)\}$ にすることは, IMP 表示の制御器 (1) 式を

$$G_c(s) = \frac{P(s)}{1-G(s)P(s)M(s)} \quad (11)$$

に変えることである。

$1+\Delta(s)=M(s)$ とすると

$$\begin{bmatrix} y(s) \\ u(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G(s)P(s)M(s) & (1-G(s)P(s)M(s))G(s)M(s) \\ P(s) & -P(s)G(s)M(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r(s) \\ d(s) \end{bmatrix} \quad (12)$$

が成り立つ。フィードバック系が内部安定のための必要十分条件は, $P(s)$, $G(s)P(s)M(s)$ および $(1-G(s)P(s)M(s))G(s)M(s)$ がすべて安定なことである。出力側感度は

$$S(s) = 1 - G(s)P(s)M(s) \quad (13)$$

であり, 相補感度は

$$T(s) = G(s)P(s)M(s) \quad (14)$$

であり, モデル誤差の情報を含んだ形となる。

$1+\Delta(s) \neq M(s)$ のとき, (12) 式は

$$\begin{bmatrix} y(s) \\ u(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{1+G(s)P(s)\{1+\Delta(s)-M(s)\}} \begin{bmatrix} G(s)P(s)(1+\Delta(s)) & (1-G(s)P(s)M(s))G(s)(1+\Delta(s)) \\ P(s) & -P(s)G(s)(1+\Delta(s)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r(s) \\ d(s) \end{bmatrix} \quad (15)$$

となる。(12) 式の内部安定のもとで, (15) 式が内部安定であるための必要十分条件は,

$$\tilde{G}(s) = \frac{1}{1+G(s)P(s)\{1+\Delta(s)-M(s)\}} \quad (16)$$

がロバスト安定なことである。モデル誤差の項は, $\{1+\Delta(s)-1\}$ から $\{1+\Delta(s)-M(s)\}$ に代わっていることがわかる。

(16) 式のロバスト安定性を包・荒木の方法⁷⁾を応用して考える。(16) 式の特性方程式は

$$1+G(s)P(s)\{1+\Delta(s)-M(s)\}=1+T(s)Q(s)=0 \quad (17)$$

である。ただし, $T(s)$ は (14) 式で与えられ

$$Q(s) = (1+\Delta(s))M^{-1}(s)-1 \quad (18)$$

である。(17) 式は

Fig. 4 Stability criterion

$$T(s) = -\frac{1}{Q(s)} \quad (19)$$

となる。

〈定理1〉 (12) 式は, 内部安定とする。 $1+\Delta(s) \neq M(s)$ のとき, Fig. 4(a) に示すように, すべての $\omega \geq 0$ で, $T(j\omega)$ のベクトルが, $-1/Q(j\omega)$ のベクトルの延長上にいかないと, そのときに限って, (16) 式は安定である。

(証明) 開ループ伝達関数 $T(j\omega)Q(j\omega)$ のベクトル軌跡が負の実軸を横切るとき,

$$T(j\omega) = -\frac{\rho}{Q(j\omega)} \quad (20)$$

が成り立つ。ただし, $T(j\omega)Q(j\omega)$ のベクトル軌跡が点 $(-1, 0)$ 上あるいは点の左側を横切るときは $\rho \geq 1$ であり, 点 $(-1, 0)$ の右側を横切るときは $\rho < 1$ である。後者の場合, $T(j\omega)$ のベクトルは, $-1/Q(j\omega)$ のベクトルの延長上にない (証明終)。

$-1/Q(j\omega)$ はモデル誤差 $1+\Delta(j\omega)$ を含むため, 定理1を用いて安定判別することができない。安定判別ができるようにするには, $-1/Q(j\omega)$ の存在範囲を特定することが必要である。そのため, $-1/Q(j\omega)$ をつぎのように展開する。

$$\frac{1}{Q(j\omega)} = \frac{1}{1-\gamma(\omega)e^{j\theta(\omega)}} = \frac{1-\gamma(\omega)\cos\theta(\omega)+j\gamma(\omega)\sin\theta(\omega)}{1+\gamma(\omega)^2-2\gamma(\omega)\cos\theta(\omega)} \quad (21)$$

ただし,

$$\gamma(\omega) = |(1+\Delta(j\omega))M^{-1}(j\omega)| \quad (22)$$

$$\theta(\omega) = \angle(1+\Delta(j\omega)) - \angle M(j\omega) \quad (23)$$

$-1/Q(j\omega)$ の存在範囲を調べるために, γ, θ を独立したパラメータとした

$$H(\gamma, \theta) = \frac{1}{1-\gamma e^{j\theta}} = \frac{1-\gamma\cos\theta+j\gamma\sin\theta}{1+\gamma^2-2\gamma\cos\theta} \quad (24)$$

を考える。 θ をパラメータに, γ を2から0まで変えると Fig. 5 が得られる。実線が $H(\gamma, \theta)$ で, 虚軸に平衡な点線が, 点 $(0.5, 0)$ を通る直線である。原点の周りの点線の円は, 単位円である。

Fig. 5 に示されるように, $H(\gamma, \theta)$ は, $\gamma=2$ の点 $(1, 0)$ の近くから始まり, 反時計方向に回りながら, $\gamma=1$ で

$$H(1, \theta) = \frac{1}{2} + j\frac{1}{2} \cot\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (25)$$

Fig. 5 Characteristic of $H(\gamma, \theta)$

となり、点 $(0.5, 0)$ を通り虚軸に平行な直線上にくる。さらに、 γ を小さくすると右側に回りながら $\gamma=0$ で点 $(-1, 0)$ に達する。 $\gamma > 1$ で $\text{Re}[H(\gamma, \theta)] < 0.5$ で、 $\gamma < 1$ で $\text{Re}[H(\gamma, \theta)] > 0.5$ である。また、 θ が 0 から $-\pi$ に近づくにつれ、 $H(\gamma, \theta)$ は内側に縮小し、 $-\pi$ を超えると上部外側に広がる。これらのことから、(22)式の $\gamma(\omega)$ が 1 以下であれば、 $-1/Q(j\omega)$ は、点 $(0.5, 0)$ を通り虚軸に平行な直線の右側に存在する。これより、つぎの定理が得られる。

〈定理2〉 ある $\omega_c > 0$ があり、 $\omega > \omega_c$ で

$$\text{Re}\left[\frac{1+\Delta(j\omega)}{M(j\omega)}\right] < 1 \quad (26)$$

$$\text{Re}[T(j\omega)] < 0.5 \quad (27)$$

とする。 $0 \leq \omega \leq \omega_c$ で、 $T(j\omega)$ のベクトルが、 $-1/Q(j\omega)$ のベクトルの延長上にいかなければ、(16)式は安定である。

(証明) (26)式から、 $\omega > \omega_c$ で、

$$\text{Re}\left[-\frac{1}{Q(j\omega)}\right] > 0.5 \quad (28)$$

となる。これと仮定から、すべての周波数にわたり $T(j\omega)$ のベクトルは、 $-1/Q(j\omega)$ のベクトルの延長上にいくことはない。定理1から、(16)式は安定である(証明終)。

定理2と Fig. 5 からつぎのことがわかる。(22)、(23)式で、 ω が 0 から大きくなるに従い、 $\gamma(\omega)$ が 1 を超える値から 0 に、 $\theta(\omega)$ が 0 から $-\pi$ に向かうとする。 $-1/Q(j\omega)$ のベクトルは、Fig. 5 の左半平面上の点から、反時計方向に回転し、点 $(1, 0)$ に近づく。一方、 ω が大きくなるに従い $T(j\omega)$ の位相は負の方向に増加するとすると、 $T(j\omega)$ のベクトルは、実軸から時計方向に回転する。この $T(j\omega)$ の時計方向の回転と $-1/Q(j\omega)$ の反時計方向の回転で、 $T(j\omega)$ と $-1/Q(j\omega)$ のベクトルが交差するとき、 $T(j\omega)$ のベクトルが、 $-1/Q(j\omega)$ のベクトルの延長上にいかないようにするにはつぎのことが考えられる。

(注意1) (23)式で、モデル誤差 $1+\Delta(s)$ の位相遅れを $M(s)$ の位相遅れで補償し、 $\theta(\omega)$ の値を小さくする。そうす

れば、 $-1/Q(j\omega)$ のベクトルが長くなり、 $T(j\omega)$ のベクトルが $-1/Q(j\omega)$ のベクトルの延長上にいくことを妨げることができる。

(注意2) $\gamma = |(1+\Delta(j\omega))M^{-1}(j\omega)|$ が 0 に近づく前に、 $M(j\omega)$ の位相遅れを使って $T(j\omega)$ のベクトルを時計方向に回転させる。そうすれば、 $T(j\omega)$ のベクトルが $-1/Q(j\omega)$ のベクトルの延長上にいくことを妨げることができる。

(注意3) 高い周波数まで $|T(j\omega)| \approx 1$ のままで(27)式を満たすためには、 $M(j\omega)$ の回転を $-\pi$ 以内で止める必要がある。

5. 位相を考慮したモデル誤差の評価とロバスト安定条件

定理2の安定判別が適用できるように $-1/Q(j\omega)$ の存在範囲をさらに絞りこむと同時に、注意1)~3)を満たす $M(s)$ を特定できるように、モデル誤差につぎの条件を入れる。

〈仮定1〉 (位相条件)

$$-\omega L \leq \angle(1+\Delta(j\omega)), \forall \omega \geq 0 \quad (29)$$

ただし、 $L > 0$ 。

〈仮定2〉 (ゲイン条件)

$$|W_L(j\omega)| \leq |1+\Delta(j\omega)| \leq 1, \forall \omega \geq 0 \quad (30)$$

ただし、 $|W_L(j\omega)|$ は、 $\omega \geq 0$ に関し単調減少関数とする。制御対象 $G(s)(1+\Delta(s))$ が安定のときは $|W_L(j\omega)| = 0$ とする。

位相条件(29)式をラプラス変換上で考えると、左辺は e^{-sL} を意味する。したがって、(29)式を満たす L は、モデル $G(s)$ に対する制御対象 $G(s)(1+\Delta(s))$ のステップ応答の立ち上がり部分の時間遅れとして見積もることができる。

これより、注意1)の $\theta(j\omega)$ への位相補償、注意2)の $T(j\omega)$ の回転、そして注意3)の $M(j\omega)$ の回転を $-\pi$ で止める3つの条件を満たす $M(s)$ として、 e^{-sL} の Padé の1次近似

$$M(s) = \frac{1 - \frac{L}{2}s}{1 + \frac{L}{2}s} = \frac{2 - Ls}{2 + Ls} \quad (31)$$

が考えられる。

$$\angle M(j\omega) = -2 \tan^{-1} \frac{L\omega}{2} \quad (32)$$

となるので、

$$\bar{\theta}(\omega) = -\omega L + 2 \tan^{-1} \frac{L\omega}{2} \quad (33)$$

とおく。仮定1から

$$\bar{\theta}(\omega) \leq \theta(\omega) \quad (34)$$

と $\theta(\omega)$ の最大遅れが特定される。

一方、ゲイン条件は

$$\frac{|G(j\omega)(1+\Delta(j\omega))|}{|G(j\omega)|}$$

から、(8)式より正確に見積もることができる。モデルのゲインを調整することで、(30)式の上限を満たすことができる。また、(30)式の下限は、実際には、全周波数にわたり測

定する必要はなく、ある低周波領域で十分である。すなわち、(31)式から $|M(j\omega)|=1$ であり、(30)式から、すべての周波数で(26)式が成り立つ。さらに、(31)式から

$$\angle M(j\omega) = -\frac{\pi}{2} \quad (35)$$

とする角周波数 $\omega = \sqrt{2}/L$ で、 $G(j\omega)P(j\omega)$ が大きなゲインや位相進み特性をもたない限り、

$$\operatorname{Re}\left[T\left(j\frac{\sqrt{2}}{L}\right)\right] = \operatorname{Re}\left[G\left(j\frac{\sqrt{2}}{L}\right)P\left(j\frac{\sqrt{2}}{L}\right)M\left(j\frac{\sqrt{2}}{L}\right)\right] < 0.5 \quad (36)$$

を満たすことができる。これより(26)、(27)式を満たす ω_c が 0 と $\sqrt{2}/L$ の間に存在する。したがって、 $0 \leq \omega \leq \sqrt{2}/L$ の範囲で(30)式の下限をつかんでいけば、ほぼ十分である。

(33)式と Fig. 5 の特性から、 $0 \leq \omega \leq \omega_c$ のすべての $-1/Q(j\omega)$ は、 $H(\gamma, \bar{\theta}(\omega_c))(|W_I(j\omega_c)| \leq \gamma \leq 1)$ の外側にある。 $0 \leq \omega \leq \omega_c$ の個別の周波数での $-1/Q(j\omega)$ は、 $H(\gamma, \bar{\theta}(\omega))(|W_I(j\omega)| \leq \gamma \leq 1)$ の外側にある。これで、 $-1/Q(j\omega)$ の存在範囲が特定できたので、つぎの定理が成り立つ。

〈定理3〉 仮定1, 2 を満たす任意のモデル誤差に対し、ある $0 \leq \omega_c$ があり、 $\omega > \omega_c$ で

$$\operatorname{Re}[T(j\omega)] < 0.5 \quad (37)$$

とする。 $0 \leq \omega \leq \omega_c$ で、 $T(j\omega)$ のベクトルが

- (a) $H(\gamma, \bar{\theta}(\omega_c))(|W_I(j\omega_c)| \leq \gamma \leq 1)$ の内側、あるいは
- (b) $H(\gamma, \bar{\theta}(\omega))(|W_I(j\omega)| \leq \gamma \leq 1)$ の内側

にあれば、(31)式の $M(s)$ を用いた(16)式は安定である。

(証明) 仮定から、 $\omega > \omega_c$ で(26)、(27)式を満たす。また、 $0 \leq \omega \leq \omega_c$ で、 $-1/Q(j\omega)$ のベクトルは、 $H(\gamma, \bar{\theta}(\omega_c))(|W_I(j\omega_c)| \leq \gamma \leq 1)$ 、あるいは、 $H(\gamma, \bar{\theta}(\omega))(|W_I(j\omega)| \leq \gamma \leq 1)$ の外側にある。 $T(j\omega)$ のベクトルが、それらの内側にあれば、 $T(j\omega)$ のベクトルは、 $-1/Q(j\omega)$ のベクトルの延長上にいくことはない。定理2から制御系は安定である(証明終)。

制御対象が安定なとき、後で述べるように $|G(j\omega)P(j\omega)| \leq 1$ 、 $\angle G(j\omega)P(j\omega) \leq 0$ にすることができる。このとき、上記はつぎのように簡単化される。

〈定理4〉 仮定1, 2(ただし $|W_I(j\omega)|=0$) を満たす任意のモデル誤差に対し、すべての $\omega \geq 0$ で $|G(j\omega)P(j\omega)| \leq 1$ 、 $\angle G(j\omega)P(j\omega) \leq 0$ で、かつ、 $\omega > 2/(\sqrt{3}L)$ で

$$\operatorname{Re}[T(j\omega)] < 0.5 \quad (38)$$

であれば、(31)式の $M(s)$ を用いた(16)式は安定である。

(証明) $\omega_c = 2/(\sqrt{3}L)$ とおくと、 $\omega > \omega_c$ で $\operatorname{Re}[T(j\omega)] < 0.5$ である。また、

$$\bar{\theta}(\omega_c) = -\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{3} > -\frac{\pi}{28} \quad (39)$$

であるので、Fig. 5 から、 $H(\gamma, \bar{\theta}(\omega_c))(0 \leq \gamma \leq 1)$ は単位円外にある。 $T(j\omega)$ のベクトルは単位円内にあるから、 $0 \leq \omega \leq \omega_c$ で $H(\gamma, \bar{\theta}(\omega_c))$ の内側にある。したがって、定理3から、制御系は安定である(証明終)。

6. 制御器 $G_c(s)$ の設計

定理3あるいは4のロバスト安定条件、および、ステップ目標、外乱に対する定常偏差を0にするための $S(0)=0$ を満たす制御器 $G_c(s)$ は、つぎのように設計できる。

ステップ1: 制御対象のモデル $G(s)$ を、不安定零点やむだ時間を含まず、かつ、(30)式の右辺を満たすように選ぶ。 $G(s)$ の相対次数を n とする。もし、制御対象が不安定零点やむだ時間を含むときは、それらをモデル誤算 $1+\Delta(s)$ に含める。

ステップ2: モデル $G(s)$ のステップ応答に対する、制御対象のステップ応答の遅れ時間 L を求め、 $M(s)$ を(31)式とおく。

ステップ3: 制御対象が安定のとき $|W_I(j\omega)|=0$ とし、つぎのステップへ。制御対象が不安定のとき、 $0 \leq \omega \leq \sqrt{2}/L$ で

$$|W_I(j\omega)| \leq \frac{|G(j\omega)(1+\Delta(j\omega))|}{|G(j\omega)|}$$

を満たす $|W_I(j\omega)|$ を求める。

ステップ4: $\tau_i > 0 (1 \leq i \leq 2)$ を適当に選ぶ。その $1/5 \sim 1/10$ の値を残りの $\tau_i > 0 (i=3, \dots, n)$ とする。

ステップ5:

$$P_1(s) = G^{-1}(s)F(s) \quad (40)$$

とする。 $F(s)$ は $P_1(s)$ をプロパーにするローパス・フィルタ

$$F(s) = \frac{1}{\prod_{i=1}^n (1+\tau_i s)} \quad (41)$$

である。

ステップ6: 制御対象が安定のとき、 $P_2(s)=1$ とし、つぎのステップへ。制御対象が不安定のとき

$$P_2(s) = \frac{1+c_1 s + \dots + c_m s^m}{(1+\tau s)^m} \quad (42)$$

とおく。ただし、 m は $G(s)$ の不安定極数であり、 $\tau > 0$ は任意の実数である。 $c_1, \dots, c_m$ を

$$1 - G(s)P_1(s)P_2(s)M(s) = 1 - P_2(s)F(s)M(s) \quad (43)$$

が、 $G(s)$ の不安定極と同じ点に零点をもつように決める。

ステップ7:

$$P(s) = P_1(s)P_2(s) \quad (44)$$

とおく。 $T(j\omega) = F(j\omega)P_2(j\omega)M(j\omega)$ のベクトル軌跡を描き、制御対象が安定なときは、 $\omega > 2/(\sqrt{3}L)$ で $\operatorname{Re}[T(j\omega)] < 0.5$ を満たされるかどうか調べる。満たされれば、つぎのステップへ。満たされないときは、 $\tau_i > 0 (i=3, \dots, n)$ の値を小さくしてステップ5へ。制御対象が不安定なときは、 $\omega > \omega_c$ で $\operatorname{Re}[T(j\omega)] < 0.5$ を満たす ω_c があるかを調べる。なければ $\tau_i > 0 (i=3, \dots, n)$ の値を小さくしてステップ5へ。 ω_c があれば、 $0 \leq \omega \leq \omega_c$ で、 $T(j\omega)$ のベクトルが $H(\gamma, \bar{\theta}(\omega_c))(|W_I(j\omega_c)| \leq \gamma \leq 1)$ の内側にあるかどうか調べる。内側になれば $H(\gamma, \bar{\theta}(\omega))(|W_I(j\omega)| \leq \gamma \leq 1)$ の内側にあるかどうか調べる。満たしていればつぎのステップへ。そうでな

いときは, $\tau_i > 0 (i=1, 2)$ を少し大きくする. その $1/5 \sim 1/10$ の値を残りの $\tau_i > 0 (i=3, \dots, n)$ としステップ5へ.

ステップ8: $P(s)$ を(11)式に代入し, その最小実現を制御器 $G_c(s)$ とする.

上記のステップ4で, $\tau_i > 0 (1 \leq i \leq 2)$ を適当に選び, その $1/2 \sim 1/10$ の値を残りの $\tau_i > 0 (i=3, \dots, n)$ にしている. これは, $\omega > \omega_c$ で $\text{Re}[T(j\omega)] < 0.5$ にするためである.

制御対象が安定のとき, モデル誤差に依存せず, $\tau_i > 0 (1 \leq i \leq 2)$ を任意に選ぶことができるエラー・フリー設計になっている^{8),9)}. このとき感度, 相補感度は

$$S(s) = 1 - \frac{1}{\prod_{i=1}^n (1 + \tau_i s)} M(s) \quad (45)$$

$$T(s) = \frac{1}{\prod_{i=1}^n (1 + \tau_i s)} M(s) \quad (46)$$

である. 相補感度は, 任意の高い周波数まで $|T(j\omega)| \approx 1$ にできる. 感度は, $M(s)$ で決まる.

制御対象が不安定なとき, 感度, 相補感度は, それぞれ

$$S(s) = 1 - \frac{1}{\prod_{i=1}^n (1 + \tau_i s)} \frac{1 + c_1 s + \dots + c_m s^m}{(1 + \tau s)^m} M(s) \quad (47)$$

$$T(s) = \frac{1}{\prod_{i=1}^n (1 + \tau_i s)} \frac{1 + c_1 s + \dots + c_m s^m}{(1 + \tau s)^m} M(s) \quad (48)$$

となる. 上式の, $\tau_i > 0 (i=1, 2)$ の値は, $T(j\omega)$ のベクトルが $0 \leq \omega \leq \omega_c$ で $H(\gamma, \bar{\theta}(\omega_c)) (W_t(\omega_c) \leq \gamma \leq 1)$ あるいは $H(\gamma, \bar{\theta}(\omega)) (|W_t(j\omega)| \leq \gamma \leq 1)$ の内側にある範囲で任意に選ぶことができる. これより, 相補感度のゲイン $|T(j\omega)|$ を高い周波数まで1の近くで止めておくことができる. 感度の低減化は, 自動的にモデル誤差に依存する $M(s)$ で決まる. 感度と相補感度のトレードオフがなく, これが, H^∞ 制御との大きな違いである.

7. 数 値 例

7. 1 安定な対象

制御対象 $G(s)(1+\Delta(s))$ の $G(s)$, $1+\Delta(s)$ を

$$G(s) = \frac{2}{s+1}, \quad 1+\Delta(s) = \frac{1}{(1+0.4s)(1+0.2s)(1+0.1s)} \quad (49)$$

とする. 6節の設計はつぎのようになる. モデル誤差のゲインが仮定1を満たす $G(s)$ となっている. 仮定2の L を見積もる. Fig. 6 に示すように, $G(s)e^{-sL}$ のステップ応答(鎖線)が制御対象 $G(s)(1+\Delta(s))$ のステップ応答(実線)に重なるような L を求め $L=0.7$ とする.

確認のため $1+\Delta(j\omega)$ と $e^{-j\omega L}$ の位相をみると Fig. 7 となる. $L=0.7$ で仮定1が満たされていることがわかる.

位相補償器を

$$M(s) = \frac{1-0.35s}{1+0.35s} \quad (50)$$

とする. 設計アルゴリズムのステップ3で $\tau=0.05$ に選ぶと

Fig. 6 Detection of L from step responses

Fig. 7 Phase diagram of model error and delay

$$P(s) = \frac{s+1}{2} \frac{1}{1+0.05s} \quad (51)$$

$$G_c(s) = \frac{10s^2 + 38.6s + 28.6}{s(s+42.9)} \quad (52)$$

が得られる.

比較のために H^∞ 制御ではつぎのようになる. モデル誤差の評価は(8)式から行なう. 低周波では(8)式左辺を, 高周波では右辺を抑える重み関数 $W_t(s)$ と対応する感度重みを

$$W_t(s) = \frac{1+1.2s}{2}, \quad W_s(s) = \frac{1}{s+0.01} \quad (53)$$

とする. 混合感度仕様

$$\left\| \frac{W_s(s)S(s)}{W_t(s)T(s)} \right\| < 1 \quad (54)$$

を満たす H^∞ 制御器は

$$G_c(s) = \frac{3.23(s+1)}{(s+0.01)(s+4.98)} \quad (55)$$

で与えられる¹⁾.

提案方法と H^∞ 制御系の感度, 相補感度を Fig. 8 に示す. 感度は, ほぼ等しい値である. これは, 提案方法は $M(j\omega)$ で, H^∞ 制御はモデル誤差の見積もり $W_t(s)$ に依存する $W_s(s)$ によって決まり, いずれもモデル誤差に依存するためと考えられる. 相補感度は, 提案方法が高周波まで 0 dB 帯

Fig. 8 Sensitivity and complementary one

Fig. 10 Step responses

Fig. 9 Comparison of $1/\Delta$ and $-1/Q$ Fig. 11 Comparison of $T(j\omega)\Delta(j\omega)$ and $T(j\omega)Q(j\omega)$

域が延びている。

これは、定理1の Fig. 4 をもとに説明できる。従来のロバスト制御は、 $M(s)=1$, $Q(s)=\Delta(s)$ に相当する。Fig. 9 で、 $-1/\Delta(j\omega)$ のベクトル軌跡が単位円に達する角周波数は、 $\omega_A=1.87(\text{rad/s})$ である。この角周波数までに、相補感度 $T(j\omega)$ を、A 点から時計方向に回転させなければならない。これによって、 H^∞ 制御の相補感度の 0 dB 周波数帯域が制限される。一方、提案方法では、モデル誤差の位相が補償されているので、単位円に達する角周波数は、 $\omega_B=17.5(\text{rad/s})$ と高くなる。さらに、(14)式から、 $T(s)$ は $M(s)$ を含み、 $M(j\omega_B)$ のベクトルは B 点より大きく時計方向に回転しているので、高い周波数まで $G(j\omega)P(j\omega)\approx 1$ にしても安定を保つことができるのである。これが位相補償の効果である。

ステップ応答を Fig. 10 に示す。 H^∞ 制御では振動的な応答である。提案方法で立ち上がり、オーバーシュート、整定時間ともに短い良好な応答である。この違いは、従来方法の $T(j\omega)\Delta(j\omega)$ と本方法の $T(j\omega)Q(j\omega)$ のベクトル軌跡を比較した Fig. 11 からわかる。従来方法の $T(j\omega)\Delta(j\omega)$ のベクトル

軌跡は、時計方向に回転し、点 $(-1, 0)$ に近いところを通るため、ステップ応答が振動すると考えられる。一方、提案方法の $T(j\omega)Q(j\omega)$ のベクトル軌跡は、反時計方向に回転し、点 $(-1, 0)$ から離れたところを通る。これによって、良好なステップ応答になっていると考えられる。なお、 $T(j\omega)Q(j\omega)$ のベクトル軌跡が反時計方向に回転するのは、

$$T(j\omega)Q(j\omega)=G(j\omega)P(j\omega)\{1+\Delta(j\omega)-M(j\omega)\}$$

で、ベクトル $1+\Delta(j\omega)$ と $M(j\omega)$ の位置関係で、 $\{1+\Delta(j\omega)-M(j\omega)\}$ が Fig. 3 に示されるように位相進みベクトルとなるからである。これも位相補償の効果である。

7.2 不安定系

不安定制御対象 $G(s)(1+\Delta(s))$ を考える。ただし、

$$G(s)=\frac{1}{s-1}, \quad 1+\Delta(s)=\frac{1}{(1+0.1s)^3} \quad (56)$$

とする。 $G(s)e^{-sL}$ と制御対象 $G(s)(1+\Delta(s))$ のステップ応答の立ち上がり部分が合うようにむだ時間 L を求めると $L=0.3$ であり、位相補償器を

$$M(s)=\frac{1-0.15s}{1+0.15s} \quad (57)$$

Fig. 12 Stability check

Fig. 14 step responses

Fig. 13 Comparison of H^∞ control and phase-compensated robust control

とする。

つぎに $0 \leq \omega \leq \sqrt{2}/L$ で, (30)式を満たす $W_I(s)$ は

$$W_I(s) = \frac{1}{1+0.2s} \quad (58)$$

である。 $\tau=0.5$ に選ぶと

$$P_1(s) = \frac{s-1}{1+0.5s}, \quad P_2(s) = \frac{1+2.04s}{1+0.5s} \quad (59)$$

が得られる。このとき, $\omega > \omega_c = 2.85$ で $\text{Re}[T(j\omega)] < 0.5$ であり,

$$|W_I(j\omega_c)| = 0.868 \quad (60)$$

となる。 $0 \leq \omega \leq \omega_c$ で, $T(j\omega)$ のベクトルは, Fig. 12 に示されるように, $H(\gamma, \bar{\theta}(\omega_c))(|W_I(j\omega_c)| \leq \gamma \leq 1)$ の内側にある。定理3からフィードバック系は安定である。

これより制御器は次式で与えられる。

$$G_c(s) = \frac{8.18(s+0.489)(s+6.67)}{s(s+19.8)} \quad (61)$$

H^∞ 制御では, モデル誤差に対し(7)式を満たす重み関数, 感度仕様に対する重み関数を, それぞれ

$$W_T(s) = \frac{1+s}{3}, \quad W_S(s) = \frac{0.1}{s+0.01} \quad (62)$$

とする。このとき混合感度仕様を満たす解が存在し制御器は

$$G_c(s) = \frac{8.5(s+0.068)}{(s+0.01)(s+5.0)} \quad (63)$$

で与えられる。感度と相補感度のボード線図を Fig. 13 に, ステップ応答を Fig. 14 に示す。7.1 の例で述べたと同様な仕組みで, 提案方法がはるかに良い応答になっていることがわかる。

8. おわりに

IMP をもとに, 位相補償を考慮した新しいロバスト制御法を提案した。そのキーポイントは3つある。1つは, モデル誤差を $\Delta(s)$ でなく, $1+\Delta(s)$ で見積もることであり, そのため位相とゲインをより正確に, 簡単に見積もることができる。2つ目は, IMP の構造を用いて位相補償することである。これにより安定範囲の拡大や制御特性が改善できる。3つ目は, 包・荒木の方法を応用し, 位相を考慮した安定の十分条件を与えたことである。これらにより, 従来より優れた特性をもつロバスト制御系を簡単に設計することができる。

参考文献

- 1) 美多 勉: H^∞ 制御, 昭晃堂 (1994)
- 2) M. Morri and E. Zafriou: Robust Process Control, Prentice Hall (1989)
- 3) 渡部慶二: IMC の感度とロバスト安定性, 第21回制御理論シンポジウム, 203/206 (1992)
- 4) Z. B. Shu, G. Izuta, K. Watanabe and K. Yamada: Unification of modeling and control for desired control performances, IEEE CDC, 893/894 (1996)
- 5) 山田 功: 位相を考慮したロバスト安定性と低感度化, システム制御情報学会論文誌, 11-7, 375/383 (1998)
- 6) 山田 功: 位相を考慮したロバスト安定化の拡張一位相次数が不確かなシステムに対する拡張, システム制御情報学会論文誌, 12-9, 522/5303 (1999)
- 7) 包・荒木: むだ時間を含むプラントに対する状態予測制御系のロバスト安定性, システムと制御, 32-1, 58/65 (1988)
- 8) K. Watanabe and E. Muramatsu: Error-Independent Stabilization of Internal Model Control, SICE Annual Conference, 312/317 (2003)

- 9) K. Watanabe, E. Muramatsu, Y. Ariga and S. Endo: Error-Free Robust Stabilization, SICE Annual Conference, 361/366 (2004)

=====

[著者紹介]

王 蕊 (学生会員)

2002年中国東北大学自動化学科卒業。2005年山形大学大学院工学研究科電子情報工学専攻修了。同年同大学大学院理工学研究科システム情報工学専攻博士後期課程に入学し、現在に至る。ロバスト内部モデル制御、非干渉化制御の研究に従事。

渡部 慶二 (正会員)

1966年山形大学工学部電気工学科卒業。同年山形大学助手、78年講師、85年助教授、89年教授、現在、同大学応用生命システム工学科教授、理化学研究所BMC研究センター客員研究員。むだ時間系の制御、内部モデル制御、ロバスト制御等の研究に従事。工学博士。システム制御情報学会、日本ロボット学会の会員。

村松 鋭一 (正会員)

1991年名古屋大学大学院研究科情報工学専攻修士課程修了。同年住友金属工業(株)に入社、95年神戸商船大商船学部助手、99年大阪府立大学工学部講師、2002年山形大学工学部助教授となり現在に至る。システム制御理論の研究に従事、博士(工学)。システム制御情報学会、IEEEなどの会員。

有我 祐一 (正会員)

2001年千葉大学大学院自然科学研究科後期課程修了。同年石川島播磨重工業(株)(基盤技術研究所)入社。2003年山形大学工学部助手、現在に至る。主として磁気軸受、振動制御、歩行ロボットなどの研究に従事。2001年度日本AEM学会奨励賞受賞、博士(工学)。日本機械学会、日本AEM学会、日本ロボット学会の会員。

遠藤 茂

1959年山形県立長井工業高等学校電子科卒業、同年山形大学工学部勤務、現在に至る。レーザーの基礎・計測応用、メカニカルシステムの計測制御に関する研究および補助等に従事。

=====