配位多様体におけるアファイン拘束の理論的解析

—Part I: アファイン拘束の可積分・非可積分条件と配位多様体の葉層構造—

甲斐健也*・木村英紀**

Theoretical Analysis of Affine Constraints on a Configuration Manifold

—Part I: Integrability and Nonintegrability Conditions for Affine Constraints and Foliation Structures of a Configuration Manifold—

Tatsuya KAI* and Hidenori KIMURA**

This paper is concerned with affine constraints on a configuration manifold. We first define affine constraints and some concepts. We then explain their geometric representation and show some properties of geometric representation. We next derive necessary and sufficient conditions for affine constraints in the cases of complete integrability, partial nonintegrability and complete nonintegrability. Finally, foliation structures of the configuration manifold are investigated in the respective cases.

Key Words: affine constraints, configuration manifold, geometric representation, integrability and nonintegrability conditions, foliation structure

1. はじめに

近年、制御工学やロボット工学の分野において「非ホロノミックシステム」の研究が盛んに行なわれている。非ホロノミックシステムは解析力学的に「非可積分な拘束条件が存在して、その拘束条件によって振る舞いが支配されるようなシステム」と定義され、車・トレーラ・宇宙ロボット・平面を転がる球・劣駆動マニピュレータなどはその例である^{3), 7)}。これまでの研究では、速度に関して線形な「線形拘束」が主に扱われており、その可積分性・非可積分性は分布を計算することによって判定できることが良く知られている (Frobenius の定理)^{4), 5), 8)}。一方、線形拘束よりも広いクラスで速度に関してアファインな「アファイン拘束」も存在し、初期角運動量をもつ宇宙ロボット⁷⁾、回転盤上に置いた球^{1), 3)}などは、アファイン拘束を受けることが知られている。また、劣駆動マニピュレータなどは加速度まで含む拘束条件を受けるが、それは変数を増やすことによりアファイン拘束に帰着できる。Tarn ら²⁾はその加速度拘束に対する微分形式型の可

積分条件を提案しているが、一般的なアファイン拘束に対する条件ではなく、さらに時間変数を陽に含んでいるという欠点をもっている。したがって、一般的なアファイン拘束の可積分性・非可積分性を判定するための配位多様体上のベクトル場に関する条件は導出されておらず、そのため、非線形制御論においても、アファイン拘束の理論的解析はこれまで全く行なわれていない。

本論文は配位多様体上で定義されるアファイン拘束を扱った一連の論文の第一論文であり、主にアファイン拘束の可積分・非可積分条件や配位多様体の葉層構造など、微分幾何学的な解析に焦点を当てる。一方、第二論文⁶⁾では、アファイン拘束と制御入力から一意的に導出される「運動学的非対称アファインシステム」の可到達性など、非線形制御論的な解析に焦点を当てる。

本論文の構成は以下のとおりである。まず第2章では、本論文を通して扱うアファイン拘束とそれに関連する概念の定義を行ない、アファイン拘束の幾何学的表現を導入する。また、その幾何学的表現が満たす性質を示す。つぎに第3章では、アファイン拘束が「完全可積分・部分非可積分・完全非可積分」となるためのそれぞれの必要十分条件を導出する。そして第4章では、上記の3つの場合において、アファイン拘束の積分多様体によって形成される配位多様体の葉層構造を詳しく解析する。なお、本稿で扱う多様体・関数・ベクトル場・分布・微分形式などは、すべてなめらかなクラス (C^∞ 級) のものを考えることとする。

* 大阪大学大学院工学研究科 吹田市山田丘 2-1

** 理化学研究所バイオ・ミメティックコントロール研究センター
名古屋市守山区下志段味字穴ヶ洞 2271-130

* Graduate School of Engineering, Osaka University,
Yamadaoka 2-1, Suita

** Bio-Mimetic Control Research Center, RIKEN,
Anagahora 2271-130, Shimoshidami, Moriyama-ku,
Nagoya

(Received December 28, 2004)

(Revised November 18, 2005)

2. アファイン拘束

本章では、本論文を通して扱うアファイン拘束の定義やそれに関連する諸概念を与える。そして、今後の解析に重要なアファイン拘束の幾何学的表現とその性質について説明を行なう。

2.1 アファイン拘束の定義

まず本節では、本論文で扱うアファイン拘束の定義を行なう。システムの n 次元配位多様体を Q とし、システムの一般化座標を n 次元列ベクトル $q = [q_1 \cdots q_n]^T \in \mathbf{R}^n$ のように記述して、配位多様体 Q の局所座標系と同一視して考える。これに応じて、速度ベクトル $\dot{q} \in T_q Q$ をその係数関数のみをベクトル形式で記述して $\dot{q} = [\dot{q}_1 \cdots \dot{q}_n]^T \in \mathbf{R}^n$ で表わし、システムの一般化速度を表わすとする^(注1)。本論文では、以下のような $n-m$ 個の1階常微分方程式の組

$$A_i(q) + B_{i1}(q)\dot{q}_1 + \cdots + B_{im}(q)\dot{q}_m = 0, \quad i = 1, \dots, n-m \quad (1)$$

で表わされるようなクラスの拘束条件を考える。ただし $m < n$ とする。(1)をまとめてベクトル形式で

$$A(q) + B(q)\dot{q} = 0 \quad (2)$$

と記述し、アファイン項にあたる $A(q)$ は(1)の $A_i(q)$ を第 i 成分とするような $n-m$ 次元列ベクトル、 $B(q)$ は(1)の $B_{ij}(q)$ を第 (i, j) 成分とするような $(n-m) \times n$ 型行列である。(1)または(2)は速度に関してアファインであるので、今後アファイン拘束と呼ぶこととする。ここで、アファイン拘束(2)について独立性に関する仮定を考える。その十分条件として、係数行列 $B(q)$ の行フルランク性を考えるが、一般的に $B(q)$ のランクは点に依存する。行フルランクとなる点(一般の点と呼ばれる)は Q のほとんどすべての点、つまり測度0の集合以外の点となるのが普通である⁸⁾。そこで以後は配位多様体 Q として一般の点の近傍を考え、 $B(q)$ は Q において常に行フルランクであるとする。したがって、アファイン拘束に以下のような仮定を課す。

[仮定1] アファイン拘束(2)の $B(q)$ が任意の点 $q \in Q$ において行フルランクである、つまり

$$\text{rank } B(q) = n-m, \quad \forall q \in Q \quad (3)$$

が成り立つ。

つぎに、配位多様体 Q 上の点に関して以下のような定義を与える。

[定義1] アファイン拘束(2)のアファイン項 $A(q)$ に関して、 $A(q) \neq 0$ となるような点 $q \in Q$ をアファイン正則点と

呼ぶ。逆に $A(q) = 0$ となるような点 $q \in Q$ をアファイン平衡点と呼ぶ。

定義1により、配位多様体 Q 上のすべての点はアファイン平衡点またはアファイン正則点のどちらかに分類されることになる。

2.2 アファイン拘束の幾何学的表現

つぎに本節では、今後の議論において重要な役割を果たすアファイン拘束の幾何学的表現を与え、その性質を導く。仮定1の(3)より、アファイン拘束(2)の係数行列 $B(q)$ における $n-m$ 個の各行ベクトルは、任意の $q \in Q$ において独立である。よって、この各行ベクトルの零化元となるような m 個の独立なベクトルを考え、それらを Q 上のベクトル場として $Y_1, \dots, Y_m$ と記述する。これらのベクトル場が張る空間、つまり Q 上の m 次元分布を

$$D := \text{span}\{Y_1, \dots, Y_m\} \quad (4)$$

と書く。この分布 D の基底となるベクトル場 $Y_1, \dots, Y_m$ は任意の点 $q \in Q$ において独立であるので、 D は正則な分布、つまり任意の点 $q \in Q$ において $\dim D(q) = m$ となる。

Fig. 1 Geometric representation of affine constraints

本論文を通して時間変数を t で表わし、時間は戻すことができない非可逆的なものとする^(注2)。また初期時刻を0、最終時刻をある値 $\epsilon > 0$ (∞ も含む) とし、これらを用いて時間間隔を $[0, \epsilon]$ や $[0, \epsilon)$ のように記述する。 Q 上の曲線 $q(t): [0, \epsilon] \rightarrow Q$ がアファイン拘束(2)を満たすというのは、Fig. 1のようにその曲線の速度ベクトル $\dot{q}(t) \in T_{q(t)}Q$ について、(4)で定義される分布 D と、成分に関して

$$A(q) + B(q)X(q) = 0, \quad \forall q \in Q \quad (5)$$

を満たすあるベクトル場 X ^(注3)が存在して

$$\dot{q}(t) - X(q(t)) \in D(q(t)), \quad \forall t \in [0, \epsilon) \quad (6)$$

(注2) 微分幾何学では、 t は時間変数というよりパラメータであり、可逆的なものとして扱われていることがほとんどである。

(注3) 配位多様体の点 $q \in Q$ における速度ベクトル $\dot{q} \in T_q Q$ がアファイン拘束を満たすとき、(6)より $\dot{q} - X(q) \in D(q)$ となるので、ある m 個の関数 $\alpha_1(q), \dots, \alpha_m(q)$ を用いて $\dot{q} - X(q) = \alpha_1(q)Y_1(q) + \cdots + \alpha_m(q)Y_m(q)$ と書くことができる。この式の左側から $B(q)$ を掛けると、 $B(q)$ の各行ベクトルと $Y_1(q), \dots, Y_m(q)$ は互いに零化ベクトルであるので、 $B(q)\{\dot{q} - X(q)\} = 0$ となる。よって、 $A(q) + B(q)\dot{q} = 0$ を用いて $B(q)X(q) = B(q)\dot{q} - A(q)$ となり、ベクトル場 $X(q)$ は(5)を満たすことがわかる。

(注1) 本来ならば、 $\dot{q} = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i \frac{\partial}{\partial q_i}$ と記述される。今後本論文

を通して、これと同様にそのほかのベクトル場に関しても、係数関数のみをベクトル形式で表示することとする。

Fig. 2 Diagram for the proof of Theorem 1

が成り立つことである^{1),3)}. 以上より, アファイン拘束は幾何学的に表現することができ, 以下のように定義される.

【定義 2】 アファイン拘束 (2) は幾何学的に 2 つの組 (D, X) で表わされる. ここで D は (4) で定められる配位多様体 Q 上の m 次元分布, X は (5) を満たす Q 上のベクトル場であり, アファインベクトル場と呼ばれる. ■

ベクトル場 X がアファインベクトル場と呼ばれるのは, もとのアファイン拘束 (2) のアファイン項に対応しているからである. (5) からアファインベクトル場 X の決め方は一意ではなく, また, 分布 D の基底ベクトル場 $Y_1, \dots, Y_m$ も決め方は一意ではなく, それぞれ決め方に m 個の自由度があることに注意する. そして, アファイン拘束の幾何学的表現に関する以下の補題 1 が成り立つ.

【補題 1】 アファイン拘束 (2) の幾何学的表現 (D, X) に関して, 点 $q \in Q$ がアファイン平衡点であることと, その点 q で $X(q) \in D(q)$ が成り立つことは同値である. また, 点 $q \in Q$ がアファイン正則点であることと, その点 q で $X(q) \notin D(q)$ が成り立つことは同値である.

(証明) 点 q がアファイン平衡点であるとき $A(q) = 0$ であるから, (5) より $B(q)X(q) = 0$ となり, $X(q) \in D(q)$ がいえる. 逆に点 q で $X(q) \in D(q)$ が成り立てば $B(q)X(q) = 0$, つまり (2) から $A(q) = 0$ となるので, 点 q はアファイン平衡点である. したがって, 命題の前半が示せる. そして, すべての点はアファイン平衡点とアファイン正則点に分けられるので, 補題の後半が明らかに成り立つ. ■

3. アファイン拘束の可積分・非可積分条件

微分方程式で表わされるアファイン拘束が可積分, つまり 1 回積分ができるならば, 時間変数と一般化座標のみの関数で表わされることになる. 本章では, アファイン拘束が完全可積分・部分非可積分・完全非可積分という 3 つの状態にそれぞれなるための必要十分条件を導く.

3.1 完全可積分条件

本節では, アファイン拘束の完全可積分条件について考える. ここで, C_0 を $Y_1, \dots, Y_m$ の Lie 括弧の繰り返しをすべて含み, 任意の $Z \in C_0$ について $[X, Z] \in C_0$ となるインボリュティブな最小の分布とする. つまり C_0 とは,

$Y_1, \dots, Y_m$ 単体 (X 単体は含まない) と $X, Y_1, \dots, Y_m$ を使ってできる Lie 括弧の繰り返しが張る TQ の部分バンドルである. アファイン拘束が完全可積分であるための必要十分条件が以下の定理 1 で与えられる.

《定理 1》 n 次元配位多様体 Q 上のアファイン拘束 (2) に対して以下の条件 (a)~(c) は等価であり, これらが成り立つとき, アファイン拘束は完全可積分であると呼ばれる.

(a) $n-m$ 個の独立な第 1 積分 $h_1(t, q), \dots, h_{n-m}(t, q)$ で, 任意の時刻 $t \in [0, \epsilon]$ と任意の点 $q \in Q$ において

$$\frac{\partial h_i(t, q)}{\partial t} + X(q)h_i(t, q) = 0, \quad i = 1, \dots, n-m \quad (7)$$

$$Z(q)h_i(t, q) = 0, \quad \forall Z \in D, \quad i = 1, \dots, n-m \quad (8)$$

$$dh_1 \wedge \dots \wedge dh_{n-m}(t, q) \neq 0 \quad (9)$$

を満たすものが存在する. ここで d は Q で定義される外微分演算子を表わす.

(b) Q の各点 q^0 によって決まる m 次元時変積分多様体 $S^m(t, q^0)$ が存在し, 任意の時刻 $t \in [0, \epsilon]$ において

$$T_q S^m(t, q^0) = D(q), \quad \forall q \in S^m(t, q^0) \quad (10)$$

が成り立つ.

(c) 分布 C_0 に関して, 任意の点 $q \in Q$ において

$$\dim C_0(q) = m \quad (11)$$

が成り立つ.

(証明) まず, 証明のために必要な設定を行なう. 時間変数の空間 $\mathbf{R}$ と配位多様体 Q の積多様体を $\bar{Q} := \mathbf{R} \times Q$ と記述する. つまり, $\bar{Q}$ は時間変数を含む $n+1$ 次元の拡張配位多様体となる. よって, $\bar{Q}$ 上の点 $\bar{q}$ は $\bar{q} := [t \ q^T]^T$ のように表わされる. アファイン拘束 (2) は $\bar{Q}$ 上で, 以下の $n-m$ 個の微分形式の組

$$\bar{\Omega}(\bar{q}) := A(q)dt + B(q)dq \quad (12)$$

の Pfaff 方程式 $\bar{\Omega}(\bar{q}) = 0$ で表現される. アファインベクトル場 X は $A(q) + B(q)X(q) = 0$ を満たし, $Y_1, \dots, Y_m$ は定義により $B(q)Y_i(q) = 0$ を満たすので, この微分形式 (12) の零化元である $\bar{Q}$ 上のベクトル場は

$$\bar{X} := 1 \oplus X, \quad \bar{Y}_i := 0 \oplus Y_i \quad i = 1, \dots, m \quad (13)$$

の $m+1$ 個となることがわかる^(注4)。これらのベクトル場が張る $\bar{Q}$ 上の $m+1$ 次元分布を $\bar{D} := \text{span}\{\bar{X}, \bar{Y}_1, \dots, \bar{Y}_m\}$ とおく。証明は Fig. 2 のような流れで行なう。Fig. 2 において $\bar{Q}$ における (i)~(iii) は、Frobenius の定理^{(4), (5), (8)} を適用することですべて等価であることが示せるので、この部分の証明は略する。よって (a) と (i), (b) と (ii), (c) と (iii) のそれぞれの等価性を示すことにより本定理を証明する。

初めに (a) と (i) の等価性について証明する。まず, (a) $\Rightarrow$ (i) を証明する。 Q 上で $n-m$ 個の独立な第1積分 $h_1(t, q), \dots, h_{n-m}(t, q)$ が存在して, それらが (7)~(9) を満たすとする。ここで $\bar{h}_1(\bar{q}) := h_1(t, q), \dots, \bar{h}_{n-m}(\bar{q}) := h_{n-m}(t, q)$ と定義して, これらが $\bar{Q}$ 上の独立な $n-m$ 個の第1積分である, つまり

$$\bar{Z}\bar{h}_i = 0, \quad \forall \bar{Z} \in \bar{D}, \quad i = 1, \dots, n-m \quad (14)$$

$$\bar{d}h_1 \wedge \dots \wedge \bar{d}h_{n-m} \neq 0 \quad (15)$$

が成り立つことを示せばよい。まず $\bar{X}$ の形と (7) より $\bar{X}\bar{h}_i = 0$ であり, $\bar{Y}_j$ の形と (8) より $\bar{Y}_j\bar{h}_i = Y_j h_i = 0$ となるので, (14) が成り立つ。また, $\bar{Q}$ で定義される外微分演算子を $\bar{d}$ で表わすと

$$\begin{aligned} \bar{d}h_1 \wedge \dots \wedge \bar{d}h_{n-m} \\ = \left(\frac{\partial h_1}{\partial t} dt + dh_1 \right) \wedge \dots \wedge \left(\frac{\partial h_{n-m}}{\partial t} dt + dh_{n-m} \right) \\ = dh_1 \wedge \dots \wedge dh_{n-m} + \frac{\partial h_1}{\partial t} dt \wedge dh_2 \wedge \dots \wedge dh_{n-m} \\ + \dots + \frac{\partial h_{n-m}}{\partial t} dt \wedge dh_1 \wedge \dots \wedge dh_{n-m-1} \end{aligned} \quad (16)$$

と計算できて, (9) が成り立てば (15) を満たす。よって $\bar{h}_1, \dots, \bar{h}_{n-m}$ は独立な第1積分であり, (a) $\Rightarrow$ (i) がいえる。つぎに, (a) $\Leftarrow$ (i) を証明する。 $\bar{Q}$ 上で $n-m$ 個の独立な第1積分 $\bar{h}_1(\bar{q}), \dots, \bar{h}_{n-m}(\bar{q})$ が存在して, それらが (14), (15) を満たすとする。ここで $h_1(t, q) := \bar{h}_1(\bar{q}), \dots, h_{n-m}(t, q) := \bar{h}_{n-m}(\bar{q})$ のように定義して, これらが Q 上の独立な $n-m$ 個の第1積分であることを示せばよいが, (14) を用いて, 任意の $\bar{Z} \in \bar{D}$ について

$$\frac{\partial h_i}{\partial t} + X h_i = \bar{X} \bar{h}_i = \bar{Z} \bar{h}_i = 0 \quad (17)$$

$$Z h_i = 0 + Z h_i = \bar{Z} \bar{h}_i = 0 \quad (18)$$

となり (7), (8) がいえる。そして, もし $dh_1 \wedge \dots \wedge dh_{n-m} = 0$, つまり $h_1, \dots, h_{n-m}$ は独立ではないと仮定する。すると一般性を欠くことなく, h_1 が $h_2, \dots, h_{n-m}$ の線形

結合で $h_1(t, q) = \sum_{i=2}^{n-m} a_i h_i(t, q)$ のように書くことができる。ここで a_i ($i = 1, \dots, n-m$) は定数である。よって $\bar{h}_1(\bar{q}) = \sum_{i=2}^{n-m} a_i \bar{h}_i(\bar{q})$ つまり $\bar{d}h_1(\bar{q}) = \sum_{i=2}^{n-m} a_i \bar{d}h_i(\bar{q})$ より,

$$\bar{d}h_1 \wedge \dots \wedge \bar{d}h_{n-m}$$

Fig. 3 Q and $\bar{Q}$ ($n=2, m=1$)

$$= \left(\sum_{i=2}^{n-m} a_i \bar{d}h_i \right) \wedge \bar{d}h_2 \wedge \dots \wedge \bar{d}h_{n-m} = 0 \quad (19)$$

となり (15) に反する。したがって $dh_1 \wedge \dots \wedge dh_{n-m} \neq 0$ で (9) が成り立ち, $h_1, \dots, h_{n-m}$ は独立な第1積分である。よって (a) $\Leftarrow$ (i) がいえる。以上より (a) $\Leftrightarrow$ (i) が証明できた。

2 番目に (b) と (ii) の等価性について証明する (Fig. 3 参照)。まず, (b) $\Leftarrow$ (ii) を証明する。(ii) において, $\bar{S}^{m+1}(\bar{q}^0)$ を $\bar{q}^0 \in \bar{Q}$ を初期点とする $\bar{Q}$ の $m+1$ 次元部分多様体とし

$$T_{\bar{q}} \bar{S}^{m+1}(\bar{q}^0) = \bar{D}(\bar{q}), \quad \bar{q} \in \bar{S}^{m+1}(\bar{q}^0) \quad (20)$$

が成り立つとする。時刻 t における $\bar{Q}$ を Q 上へに射影する同相写像を $\pi_t : (t, q) \mapsto q(t)$ と記述し, その微分を $d\pi_t : T_{q(t)} \bar{Q} \rightarrow T_q Q$ とする。まず, $\bar{D} := \bar{H} \oplus \bar{V}$ のように分解をする。ここで, $\bar{H} := \text{span}\{\bar{Y}_1, \dots, \bar{Y}_m\}$ である。そして, $\pi_0(\bar{q}^0) =: q^0$, $\pi_t(\bar{q}) =: q$ とおき, さらに $\bar{Q}$ 上の $\bar{S}^{m+1}(\bar{q}^0)$ を Q 上へ射影したものを $\pi_t(\bar{S}^{m+1}(\bar{q}^0)) =: S^m(t, q^0)$ と定義する。すると明らかに $d\pi_t(T_{\bar{q}} \bar{S}^{m+1}(\bar{q}^0)) = d\pi_t(T_q S^m(t, q^0))$ であり, また, (13) の形と $d\pi_t(\bar{Y}_1(\bar{q})) = Y_1(q), \dots, d\pi_t(\bar{Y}_m(\bar{q})) = Y_m(q)$ より, $d\pi_t(\bar{D}(\bar{q})) = d\pi_t(\bar{H}(\bar{q})) = D(q)$ となる。したがって, (20) より (10) が成り立つ。逆に (b) $\Rightarrow$ (ii) については, 同相写像 π_t の逆写像 $\pi_t^{-1} : q(t) \mapsto (t, q)$ を用いて上と同様に証明できる。特に Q 上の $S^m(t, q^0)$ から $\bar{Q}$ 上の部分多様体 $\bar{S}^{m+1}(\bar{q}^0) := \bigcup_{t \geq 0} \pi_t^{-1}(S^m(t, q^0))$ が構成できることに注意する。以上より (b) $\Leftrightarrow$ (ii) がいえる。

最後に (c) と (iii) の等価性について証明する。 $\bar{Q}$ において, $\bar{C}$ を $\bar{X}, \bar{Y}_1, \dots, \bar{Y}_m$ の Lie 括弧の繰り返しをすべて含み, 任意の $\bar{Z} \in \bar{C}$ について $[\bar{X}, \bar{Z}] \in \bar{C}$ となるインボリュートな最小の分布と定義する。つまり $\bar{C}$ とは, $\bar{X}, \bar{Y}_1, \dots, \bar{Y}_m$ 単体と $\bar{X}, \bar{Y}_1, \dots, \bar{Y}_m$ を使ってできる Lie 括弧の繰り返しが張る $T\bar{Q}$ の部分バンドルである。Frobenius の定理より, $\bar{Q}$ 上の拡張線形拘束 $A(q)\dot{t} + B(q)\dot{q} = 0$ が完全可積分となるための必要十分条件は,

$$\dim \bar{C}(\bar{q}) = m+1, \quad \bar{q} \in \bar{Q} \quad (21)$$

(注4) ベクトル場 $\bar{X}$ を正確に記述すると $\bar{X} := \frac{\partial}{\partial t} \oplus X$ であるが, 簡単のためこのように記述することにする。

で与えられる. $\bar{X}$ と $\bar{Y}_i (i=1, \dots, m)$ に関して Lie 括弧の繰返しを考えると

$$\begin{aligned} [\bar{X}, \bar{Y}_i] &= [1 \oplus X, 0 \oplus Y_i] = 0 \oplus [X, Y_i] \\ [\bar{X}, [\bar{X}, \bar{Y}_i]] &= [1 \oplus X, 0 \oplus [X, Y_i]] = 0 \oplus [X, [X, Y_i]] \\ &\vdots \\ [\bar{Y}_j, \bar{Y}_i] &= [0 \oplus Y_j, 0 \oplus Y_i] = 0 \oplus [Y_j, Y_i] \\ [\bar{Y}_k, [\bar{Y}_j, \bar{Y}_i]] &= [0 \oplus Y_k, 0 \oplus [Y_j, Y_i]] = 0 \oplus [Y_k, [Y_j, Y_i]] \\ &\vdots \end{aligned} \quad (22)$$

となることがわかる. (13) よりベクトル場 $\bar{X}$ とベクトル場 $\bar{Y}_1, \dots, \bar{Y}_m$ は独立となっており, (22) よりベクトル場 $\bar{X}$ と, ベクトル場 $\bar{X}, \bar{Y}_1, \dots, \bar{Y}_m$ に関する Lie 括弧の繰返しも独立になっていることもわかる. よって, (21) はベクトル場 $\bar{Y}_1, \dots, \bar{Y}_m$ と $\bar{X}, \bar{Y}_1, \dots, \bar{Y}_m$ に関する Lie 括弧の繰返しが m 次元を張ることと等価である. さらに (13), (22) の形より, $\bar{Y}_1, \dots, \bar{Y}_m$ については Q 上で $Y_1, \dots, Y_m$ を考えればよく, $\bar{X}, \bar{Y}_1, \dots, \bar{Y}_m$ に関する Lie 括弧の繰返しについては Q 上で X と $Y_1, \dots, Y_m$ の Lie 括弧の繰返しを考えればよいことがわかる. したがって, (21) は $Y_1, \dots, Y_m$ と, $X, Y_1, \dots, Y_m$ の Lie 括弧の繰返しが m 次元を張ること, すなわち (11) と等価であり, (c) $\Leftrightarrow$ (iii) がいえる.

以上より (a)~(c) は等価であることが証明された. ■

[例題 1] ここでは, アファイン拘束の完全可積分性について例を用いて考える. $n=3, m=1$ で配位多様体は

$$Q = \{q = [q_1 \ q_2 \ q_3]^T \in \mathbf{R}^3 \mid q_2 > 0, q_3 > 0\} \quad (23)$$

とし, アファイン拘束

$$\underbrace{\begin{bmatrix} q_1 q_2 q_3 \\ 0 \end{bmatrix}}_{A(q)} + \underbrace{\begin{bmatrix} q_2 q_3 & q_1 q_3 & q_1 q_2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{B(q)} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = 0 \quad (24)$$

を考え, これは Q において仮定 1 が満たされている. このアファイン拘束 (24) の幾何学的表現の 1 つは

$$X = \begin{bmatrix} -q_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} -q_1 \\ 0 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

で与えられ, これらのベクトル場に関する Lie 括弧の繰返しを計算することにより $C_0 = \text{span}\{Y\}$ が求められる. したがって, $\dim C_0 = 1 = m$ となるので, 定理 1 より (24) は完全可積分であることがわかる. 実際, 第 1 積分として $h_1(t, q) = q_1 q_3 e^t, h_2(t, q) = q_2$ が存在し, これらは簡単な計算によって (7)~(9) を満たすことがわかり, 独立な第 1 積分であることが確認できる. ■

3.2 部分非可積分条件

3.1 節ではアファイン拘束のすべてが可積分, つまり完全可積分の場合を考えた. しかし, アファイン拘束の一部が可

積分であり, 残りが非可積分であるような, 可積分と非可積分なアファイン拘束が混在している場合もありうる. そこで, 本節ではそのような部分非可積分性について考える. アファイン拘束が部分非可積分であるための必要十分条件が以下の定理 2 で与えられる.

《定理 2》 n 次元配位多様体 Q 上のアファイン拘束 (2) に対して以下の条件 (a)~(c) は等価であり, これらが成り立つとき, アファイン拘束は k 次部分非可積分であると呼ばれる. ここで, $m < k < n$ である.

(a) $n-k$ 個の独立な第 1 積分 $h_1(t, q), \dots, h_{n-k}(t, q)$ で, 任意の時刻 $t \in [0, \epsilon)$ と任意の点 $q \in Q$ において

$$\frac{\partial h_i(t, q)}{\partial t} + X(q)h_i(t, q) = 0, \quad i = 1, \dots, n-k \quad (25)$$

$$Z(q)h_i(t, q) = 0, \quad \forall Z \in C_0, \quad i = 1, \dots, n-k \quad (26)$$

$$dh_1 \wedge \dots \wedge dh_{n-k}(t, q) \neq 0 \quad (27)$$

を満たすものが存在する.

(b) Q の各点 q^0 によって決まる k 次元時変積分多様体 $S^k(t, q^0)$ が存在し, 任意の時刻 $t \in [0, \epsilon)$ において

$$T_q S^k(t, q^0) = C_0(q), \quad \forall q \in S^k(t, q^0) \quad (28)$$

が成り立つ.

(c) 分布 C_0 に関して, 任意の点 $q \in Q$ において

$$\dim C_0(q) = k \quad (29)$$

が成り立つ.

(証明) 証明は Fig. 4 のような流れで行なう. 定理 1 の証明と同様に, Fig. 4 において $\bar{Q}$ における (i)~(iii) はすべて等価であることが示せるので, (a) と (i), (b) と (ii), (c) と (iii) のそれぞれの等価性を示すことにより本定理を証明する.

初めに (a) と (i) の等価性について証明する. ここで $\bar{Q}$ において, $\bar{Y}_1, \dots, \bar{Y}_m$ の Lie 括弧の繰返しをすべて含み, 任意の $\bar{Z} \in \bar{C}_0$ について $[\bar{X}, \bar{Z}] \in \bar{C}_0$ となるインボリュートな最小の分布とする. つまり $\bar{C}_0$ とは, $\bar{Y}_1, \dots, \bar{Y}_m$ 単体 ($\bar{X}$ 単体は含まない) と $\bar{X}, \bar{Y}_1, \dots, \bar{Y}_m$ を使ってできる Lie 括弧の繰返しが張る $T\bar{Q}$ の部分バンドルである. すると

$$\bar{C} = \bar{C}_0 + \text{span}\{\bar{X}\} \quad (30)$$

が成り立つことがわかる. まず (a) $\Rightarrow$ (i) に関しては, Q 上で $n-k$ 個の独立な第 1 積分 $h_1(t, q), \dots, h_{n-k}(t, q)$ が存在して, それらが (25)~(27) を満たすとする, $\bar{Q}$ の関数 $\bar{h}_1(\bar{q}) := h_1(t, q), \dots, \bar{h}_{n-k}(\bar{q}) := h_{n-k}(t, q)$ が独立な $n-k$ 個の第 1 積分である, つまり

$$\bar{Z}\bar{h}_i = 0, \quad \forall \bar{Z} \in \bar{C}, \quad i = 1, \dots, n-k \quad (31)$$

$$d\bar{h}_1 \wedge \dots \wedge d\bar{h}_{n-k} \neq 0 \quad (32)$$

が成り立つことを示せばよい. (25) より $\bar{X}\bar{h}_i = 0$ であり, (26) より任意の $\bar{W} \in \bar{C}_0$ について $\bar{W}\bar{h}_i = 0$ となるが, これと (30) を用いることにより (31) がいえる. また (32) については, 定理 1 と同様に証明できるので, (a) $\Rightarrow$ (i) がいえる.

Fig. 4 Diagram for the proof of Theorem 2

る。逆に (a) $\Leftarrow$ (i) についても定理 1 の証明と同様に証明でき、したがって、(a) $\Leftrightarrow$ (i) が証明できた。

つぎに (b) と (ii) の等価性を証明する。まず、(b) $\Leftarrow$ (ii) を証明する。(ii) において、 $\bar{S}^{k+1}(\bar{q}^0)$ を $\bar{Q}$ における $\bar{q}^0$ を初期点とする $k+1$ 次元部分多様体とし、

$$T_{\bar{q}}\bar{S}^{k+1}(\bar{q}^0) = \bar{C}(\bar{q}), \quad \forall \bar{q} \in \bar{S}^{k+1}(\bar{q}^0) \quad (33)$$

が成り立つとする。ここでも定理 1 で用いた写像 π_t を考えると、(30) より $d\pi_t(T_{\bar{q}}\bar{S}^{k+1}(\bar{q}^0)) = d\pi_t(T_q S^k(t, q))$ 、 $d\pi_t(\bar{C}(\bar{q})) = d\pi_t(\bar{C}_0) = C_0(q)$ である。したがって (33) より (28) が成り立つ。逆に (b) $\Rightarrow$ (ii) については、逆写像 π_t^{-1} を用いて上の議論の逆をたどれば証明できる。したがって (b) $\Leftrightarrow$ (ii) がいえる。

最後に (c) と (iii) の等価性を証明する。まず (c) $\Rightarrow$ (iii) について考える。(c) より $\dim C_0 = k > m$ であるので、 $C_0 = \text{span}\{Y_1, \dots, Y_m, Y_{m+1}, \dots, Y_k\}$ とおき、 $Y_{m+1}, \dots, Y_k$ の $k-m$ 個の新たな独立なベクトル場を考える。ここで、 $\bar{Q}$ 上の分布 $\bar{C}$ を計算することになるが $\bar{Y}_i := 0 \oplus Y_i$ ($i = m+1, \dots, k$) とおくと、(13), (22) などにより $\bar{C} := \text{span}\{\bar{X}, \bar{Y}_1, \dots, \bar{Y}_m, \bar{Y}_{m+1}, \dots, \bar{Y}_k\}$ となることから $\dim \bar{C} = k+1$ となり、(c) $\Rightarrow$ (iii) がいえる。(c) $\Leftarrow$ (iii) については、上での議論の逆を考えることにより証明できる。したがって (c) $\Leftrightarrow$ (iii) がいえる。

以上より、(a)~(c) は等価であることが証明された。■

[例題 2] ここでは、アファイン拘束の部分非可積分性について例を用いて考える。 $n=3, m=1$ で配位多様体 Q は例題 1 と同じく (23) とし、以下のアファイン拘束

$$\underbrace{\begin{bmatrix} q_1 q_2 q_3 \\ q_2 q_3 \end{bmatrix}}_{A(q)} + \underbrace{\begin{bmatrix} q_2 q_3 & q_1 q_3 & q_1 q_2 \\ 0 & 1 & q_2 \end{bmatrix}}_{B(q)} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = 0 \quad (34)$$

を考え、これは Q において仮定 1 が満たされている。このアファイン拘束 (34) の幾何学的表現の 1 つは

$$X = \begin{bmatrix} -q_1 + q_1 q_3 \\ -q_2 q_3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} -q_1 + q_1 q_3 \\ -q_2 q_3 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

で与えられ、これらのベクトル場に関する Lie 括弧の繰返しを計算することにより $[X, Y] = [-q_1 q_3 \quad q_2 q_3 \quad 0]^T$ が求まり、 $C_0 = \text{span}\{Y, [X, Y]\}$ となるのがわかる。したがって $m < \dim C_0 = 2 < n$ となるので、定理 2 より (34) は $k=2$ の 2 次部分非可積分であるとわかる。実際、第 1 積分として $h(t, q) = q_1 q_2 q_3 e^t$ があり、これは簡単な計算によって (25)~(27) を満たすことがわかり、独立な第 1 積分であることが確認できる。■

3.3 完全非可積分条件

3.1 節と 3.2 節においてそれぞれ、アファイン拘束が完全可積分と部分非可積分について、つまり可積分なアファイン拘束が含まれている場合を考えたが、本節ではアファイン拘束のすべてが非可積分である場合を考える。これは非ホロノミックなシステムを考えるという意味でも重要なケースである。アファイン拘束が完全非可積分であるための必要十分条件が以下の定理 3 で与えられる。

《定理 3》 n 次元配位多様体 Q 上のアファイン拘束 (2) に対して以下の条件 (a), (b) は等価であり、これらが成り立つとき、アファイン拘束は完全非可積分であると呼ばれる。

- (a) 第 1 積分が存在しない。
- (b) 分布 C_0 に関して、任意の点 $q \in Q$ において

$$\dim C_0(q) = n \quad (35)$$

が成り立つ。

(証明) 証明は Fig. 5 のような流れで行なう。Fig. 5 において $\bar{Q}$ における (i), (ii) はすべて等価であることが示せるので、(a) と (i), (b) と (ii) の等価性を示すことにより本定理を証明する。まず、(a) $\Leftrightarrow$ (i) は明らかに自明である。そして、(b) $\Leftrightarrow$ (ii) については、定理 2 の証明で $k=n$ としたもの考えることにより示すことができる。以上より、(a), (b) は等価であることが証明された。■

[例題 3] ここでは、アファイン拘束の完全非可積分性について例を用いて考える。 $n=3, m=1$ で配位多様体は $Q = \mathbf{R}^3$ とし、以下のアファイン拘束

$$\underbrace{\begin{bmatrix} q_2 \\ -q_1 \end{bmatrix}}_{A(q)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{B(q)} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = 0 \quad (36)$$

Fig. 5 Diagram for the proof of Theorem 3

を考え、これも Q において仮定 1 が満たされている。このアファイン拘束 (36) の幾何学的表現の 1 つは

$$X = \begin{bmatrix} -q_2 \\ q_1 \\ 0 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

で与えられ、これらのベクトル場に関する Lie 括弧の繰り返しを計算することにより $C_0 = \text{span}\{Y, [X, Y], [X, [X, Y]]\}$ が求められる。したがって $\dim C_0 = 3 = n$ となり、定理 3 より (36) は完全非可積分であって第 1 積分は存在しない。■

4. 配位多様体の葉層構造

前章では、アファイン拘束が完全可積分・部分非可積分・完全非可積分となるための必要十分条件を導出したが、可積分なアファイン拘束がある場合には時変的な積分多様体が存在することがわかった。本章では、配位多様体においてその積分多様体がどのような葉層構造を形成するかについて、それぞれの場合において考える。

4.1 完全可積分の場合

3.1 節ではアファイン拘束が完全可積分であるための条件を導出した。その場合には定理 1 (b) にあるように、配位多様体において積分多様体の集合、つまり葉層構造を形成することがわかる。本節ではその葉層構造について詳しく調べる。まず、以下の補題を示す。

[補題 2] アファイン拘束 (2) が完全可積分の場合、配位多様体 Q においてアファイン正則点集合を

$$U_a^m := \{q \in Q \mid A(q) \neq 0\} \quad (37)$$

と記述し、アファイン平衡点集合

$$U_b^m := \{q \in Q \mid A(q) = 0\} \quad (38)$$

と記述する。このとき、以下の (i), (ii) が成り立つ。

- (i) $U_a^m \cap U_b^m = \emptyset$, $U_a^m \cup U_b^m = Q$
 (ii) 任意の点 $q^e \in U_b^m$ のある近傍^(注 5) $V_b^m \subset U_b^m$ について
- $$\dim V_b^m \geq m \quad (39)$$

(証明) 配位多様体 Q 上のすべての点はアファイン正則点またはアファイン平衡点のどちらかに分類されるので、明らかに (i) が成り立つ。つぎにアファイン平衡点を $q^e \in U_b^m$ とおくと、補題 1 より $X(q^e) \in D(q^e)$ となるから、ある m 個の関数 $\beta_1(q), \dots, \beta_m(q)$ を用いて

(注 5) 元の配位多様体からの相対位相が定義された相対近傍を考える。今後、本論文では断りなく同様に考える。

$$X(q^e) = \beta_1(q^e)Y_1(q^e) + \dots + \beta_m(q^e)Y_m(q^e) \quad (40)$$

と書くことができる。ここで、 $Y_1, \dots, Y_m$ は独立であるから、これらと直交する $n - m$ 個のベクトル場を考えてそれらを $Y_{m+1}, \dots, Y_n$ とし、これらのベクトル場と (40) の内積を取ると

$$\langle Y_{m+1}(q^e), X(q^e) \rangle = \dots = \langle Y_n(q^e), X(q^e) \rangle = 0 \quad (41)$$

となる。ここで $\langle \cdot, \cdot \rangle$ はベクトル場同士の内積を表す記号とする。したがって、(41) は点 q^e に関する $n - m$ 個の拘束条件であるから、陰関数定理によって点 q^e の近傍 V_b^m は m 次元以上となって (ii) が成り立つ。■

ここで、3.1 節で定義した C_0 とは別の分布を定義する。 C をベクトル場 $X, Y_1, \dots, Y_m$ を含み、任意の $Z, W \in C$ について $[Z, W] \in C$ となるインボリュティブな最小の分布とする。つまり C とは、 $X, Y_1, \dots, Y_m$ 単体と $X, Y_1, \dots, Y_m$ を使ってできる Lie 括弧の繰り返しが張る TQ の部分バンドルである。定理 1 (b) より、完全可積分の場合の配位多様体 Q の葉層構造に関して以下の命題 1 が導かれる。

[命題 1] アファイン拘束 (2) が完全可積分の場合、以下の (a), (b) が成り立つ。

- (a) 任意のアファイン正則点 $q^0 \in U_a^m$ のある近傍 $V_a^m \subset U_a^m$ において、ある局所座標系 $(U; x_1, \dots, x_n)$ が存在し、時刻 t と点 q^0 によって決まる D の m 次元時変積分多様体

$$S^m(t, q^0) := \{q \in V_a^m \mid x_{m+1}(q) = x_{m+1}(\phi_t^X(q^0)), \dots, x_n(q) = x_n(\phi_t^X(q^0))\} \quad (42)$$

によって構成される時変的な m 次元葉層構造を V_a^m 内に形成する、ここで $\phi_t^X : Q \rightarrow Q$ は任意の $t \in [0, \epsilon]$ で定義されるアファインベクトル場 X のフロー (1 パラメータ局所変換群) である。また任意の点 $q \in U_a^m$ において

$$C_0(q) = D(q), C(q) = D(q) + \text{span}\{X\}(q) \quad (43)$$

$$\dim C_0(q) = m, \dim C(q) = m + 1 \quad (44)$$

が成り立つ。

- (b) 任意のアファイン平衡点 $q^0 \in U_b^m$ のある近傍 $V_b^m \subset U_b^m$ において、ある局所座標系 $(U; x_1, \dots, x_n)$ が存在し、点 q^0 によって決まる D の m 次元時不変積分多様体

$$S^m(q^0) := \{q \in V_b^m \mid x_{m+1}(q) = x_{m+1}(q^0), \dots, x_n(q) = x_n(q^0)\} \quad (45)$$

によって構成される時不変的な m 次元葉層構造を V_b^m 内

に形成する. また任意の点 $q \in U_b^m$ において

$$C(q) = C_0(q) = D(q) \quad (46)$$

$$\dim C_0(q) = \dim C(q) = \dim D(q) = m \quad (47)$$

が成り立つ.

(証明) まず (a) について証明するが, 定理 1 の証明における (b) と (ii) の等価性の証明部分と Fig. 3 を参照されたい. $d\pi_t(\bar{X}(\bar{q})) = X(q)$ より $\pi_t(\bar{\phi}_t^X(\bar{q}^0)) = \phi_t^X(q^0)$ であり, $\bar{\phi}_t^X(\bar{q}^0) \in \bar{S}^{m+1}(\bar{q}^0)$ となることから, $\phi_t^X(q^0) \in S^m(t, q^0)$ を得る. したがって, ある局所座標系 $(U; x_1, \dots, x_n)$ を取ることに, m 次元時変積分多様体 $S^m(t, q^0)$ は (42) のように表わすことができる. また C_0, C の定義より (43), (44) が成り立つ. つぎに (b) について証明する. アファイン平衡点 $q \in V_b^m$ について $d\pi_t(\bar{X}(\bar{q})) = X(q) \in D(q)$ であるから, $\pi_0(\bar{S}^{m+1}(\bar{q}^0)) =: S^m(q^0)$ とおくと, $\phi_t^X(q^0) \in S^m(q^0)$ となる. よって, $\pi_t(\bar{S}^{m+1}(\bar{q}^0)) = S^m(q^0)$ となり, $q^0 \in S^m(q^0)$ を得る. したがって, 補題 2 より V_b^m は m 次元以上であり, ある局所座標系 $(U; x_1, \dots, x_n)$ を取ることによって m 次元時不変積分多様体 $S^m(q^0)$ は (45) のように表わすことができる. また (43), (44) において $X(q) \in D(q)$ となるから (46), (47) が成り立つ. ■

命題 1 (a), (b) に関して $n = 3, m = 1$ とした場合の説明図がそれぞれ Fig. 6, Fig. 7 に示してある. Fig. 6 (i) のように, 命題 1 (a) では V_a^m は時変的な 1 次元葉層構造に分れてしまうので, 初期点 q^0 から出発した軌道は時刻 t では積分多様体である葉 $S^m(t, q^0)$ に含まれるが, 時間とともに V_a^m 内をスライドして移動できることになる. 一方, Fig. 7 (i) のように, 命題 1 (b) では V_b^m は時不変的な 1 次元葉層構造に分れてしまうため, 初期点 q^0 から出発した軌道はつねに積分多様体である葉 $S^m(q^0)$ に含まれてしまい, ほかの葉には移ることができない.

Fig. 6 Proposition 1 (a) ($n = 3, m = 1$)

これまでの線形拘束の研究では, 命題 1 (a) にあるような時変的葉層構造が表われることは知られておらず, アファイン拘束を調べることによってその存在が初めてわかった. アファイン拘束が完全可積分であっても, 時変的葉層構造によって配位多様体を時間とともに移動できるという事実は, 第二論文⁶⁾の可到達性の解析で重要な役割を果たす.

[例題 4] ここでは, 例題 1 で用いた完全可積分なアファイン

Fig. 7 Proposition 1 (b) ($n = 3, m = 1$)

ン拘束 (24) の葉層構造について考える. この場合, アファイン正則点集合は $U_a^m = V_a^m = \{q \in Q \mid q_1 \neq 0\}$, アファイン平衡点集合は $U_b^m = V_b^m = \{q \in Q \mid q_1 = 0\}$ で与えられる. つまり $q_2 q_3$ 平面以外が V_a^m で $q_2 q_3$ 平面が V_b^m である. アファイン正則点 $q^0 \in V_a^m$ から出発した軌道は Fig. 8 (i) のように, 各時刻で点 q^0 によって決まる 1 次元時変積分多様体 $S^m(t, q^0)$ の上に各時刻で乗りながら V_a^m 内を 2 次元的に動いていく (q_2^0 は q_2 の初期値). つまり V_a^m は時変的な葉層構造を形成する. 一方, アファイン平衡点 $q^0 \in V_b^m$ から出発した軌道は Fig. 8 (ii) のように, 点 q^0 によって決まる 1 次元時不変積分多様体 $S^m(q^0)$ を 1 次元的に動いていく. つまり V_b^m は時不変的な葉層構造を形成する.

Fig. 8 Foliation structure of Example 4

4.2 部分非可積分の場合

3.2 節ではアファイン拘束が k 次部分非可積分であるための条件を考えたが, この場合にも定理 2 (b) にあるように, 配位多様体において積分多様体の集合である葉層構造を形成する. 本節でもその葉層構造について調べる. まず, 以下の補題を示す.

[補題 3] 定理 2 が成り立つとして, アファイン拘束 (2) が k 次部分非可積分の場合を考える. 配位多様体 Q において, $X(q) \notin C_0(q)$ となる点を k 次アファイン正則点と呼び, その集合を

$$U_a^k := \{q \in Q \mid X(q) \notin C_0(q)\} \quad (48)$$

と記述し, $X(q) \in C_0(q)$ となる点を k 次アファイン平衡点と呼び, その集合を

$$U_b^k := \{q \in Q \mid X(q) \in C_0(q)\} \quad (49)$$

と記述する. このとき, 以下の (i), (ii) が成り立つ.

$$(i) U_a^k \cap U_b^k = \phi, U_a^k \cup U_b^k = Q$$

(ii) 任意の点 $q^e \in U_b^k$ のある近傍 $V_b^k \subset U_b^k$ について

$$\dim V_b^k \geq k \quad (50)$$

(証明) 補題 2 と同様に、配位多様体 Q 上のすべての点は k 次アフィン正則点または k 次アフィン平衡点のどちらかに分類されるので、明らかに (i) が成り立つ。つぎに U_b^k の点を $q^e \in U_b^k$ とおくと、定義より $X(q^e) \in C_0(q^e)$ となるから、 C_0 を張るベクトル場を $Y_1, \dots, Y_m$ とさらに $Y_{m+1}, \dots, Y_k$ の k 個とすると、ある m 個の関数 $\beta_1(q), \dots, \beta_k(q)$ を用いて

$$X(q^e) = \beta_1(q^e)Y_1(q^e) + \dots + \beta_k(q^e)Y_k(q^e) \quad (51)$$

と書くことができる。ここで、 $Y_1(q), \dots, Y_k(q)$ は独立であるから、これらと直交する $n-k$ 個のベクトル場を考えてそれらを $Y_{k+1}(q), \dots, Y_n(q)$ とし、これらのベクトル場と (51) の内積を取ると

$$\langle Y_{k+1}(q^e), X(q^e) \rangle = \dots = \langle Y_n(q^e), X(q^e) \rangle = 0 \quad (52)$$

となる。したがって、(52) は点 q^e に関する $n-k$ 個の拘束条件であるから、陰関数定理によって点 q^e の近傍 V_b^k は k 次元以上となって (ii) が成り立つ。 ■

定理 2 (b) より、部分非可積分の場合の配位多様体 Q の葉層構造に関して以下の命題 2 が導かれる。

[命題 2] アフィン拘束 (2) が k 次部分可積分の場合、以下の (a), (b) が成り立つ。

(a) 任意の k 次アフィン正則点 $q^0 \in U_a^k$ のある近傍 $V_a^k \subset U_a^k$ において、ある局所座標系 $(U; x_1, \dots, x_n)$ が存在し、時刻 t と点 q^0 によって決まる C_0 の k 次元時変積分多様体

$$S^k(t, q^0) := \{q \in V_a^k \mid x_{k+1}(q) = x_{k+1}(\phi_t^X(q^0)), \dots, x_n(q) = x_n(\phi_t^X(q^0))\} \quad (53)$$

によって構成される時変的な k 次元葉層構造を V_a^k 内に形成する、また $q \in U_a^k$ について

$$C(q) = C_0(q) + \text{span}\{X(q)\} \quad (54)$$

$$\dim C_0(q) = k, \dim C(q) = k+1 \quad (55)$$

が成り立つ。

(b) 任意の k 次アフィン平衡点 $q^0 \in U_b^k$ のある近傍 $V_b^k \subset U_b^k$ において、ある局所座標系 $(U; x_1, \dots, x_n)$ が存在し、点 q^0 によって決まる C_0 の k 次元時不変積分多様体

$$S^k(q^0) := \{q \in V_b^k \mid x_{k+1}(q) = x_{k+1}(q^0), \dots, x_n(q) = x_n(q^0)\} \quad (56)$$

によって構成される k 次元葉層構造を V_b^k 内に形成する。また任意の点 $q \in U_b^k$ において

$$C(q) = C_0(q) \quad (57)$$

$$\dim C_0(q) = \dim C(q) = k \quad (58)$$

が成り立つ。

(証明) 定理 2 の (b) と (ii) の等価性の証明を参照して、命題 1 と同様に証明できる。 ■

命題 2 (a), (b) に関して $n=3, m=1, k=2$ とした場合の説明図がそれぞれ Fig. 9, Fig. 10 に示してある。Fig. 9 (i) のように、命題 2 (a) では V_a^k は時変的な 2 次元葉層構造に分れてしまうので、初期点 q^0 から出発した軌道は時刻 t では積分多様体である葉 $S^k(t, q^0)$ に含まれるが、時間とともに V_b^k 内をスライドして 3 次的に移動できることになる。一方、Fig. 10 (i) のように、命題 2 (b) では V_a^k は時不変な 2 次元葉層構造に分れてしまうため、初期点 q^0 から出発した軌道はつねに積分多様体である葉 $S^k(q^0)$ に含まれてしまい、ほかの葉には移ることができない。

Fig. 9 Proposition 2 (a) ($n=3, m=1, k=2$)

Fig. 10 Proposition 2 (b) ($n=3, m=1, k=2$)

完全可積分の場合の命題 1 (a) と同様に、部分非可積分の場合においても、命題 2 (a) で見られるような時変的な葉層構造が存在することがわかり、時変的な葉層構造によって配位多様体を時間とともに移動できるという事実は、第二論文⁶⁾の可到達性の解析で重要な役割を果たす。

[例題 5] ここでは、例題 2 で用いた $k=2$ の 2 次部分非可積分なアフィン拘束 (34) の葉層構造について考える。この場合、2 次アフィン正則点集合は $U_a^k = V_a^k = \{q \in Q \mid q_1 \neq 0\}$ で与えられ、2 次アフィン平衡点集合は $U_b^k = V_b^k = \{q \in Q \mid q_1 = 0\}$ となる。つまり $q_2 q_3$ 平面以外が V_a^k で $q_2 q_3$ 平面が V_b^k である。アフィン正則点 $q^0 \in V_a^k$ から出発した軌道は Fig. 11 (i) のように、各時刻で点 q^0 によって決まる 2 次元時変積分多様体 $S^k(t, q^0)$ の上に乗りながら V_a^k 内を 3 次的に動いていく。つまり V_a^k は時変的な葉層構造を形成することになる。一方、アフィン平衡点 $q^0 \in V_b^k$ から出発した軌道は Fig. 11 (ii) のよう

に、2次元時不変積分多様体 $S^k(q^0) = V_b^k$ を2次的に動いていく。つまり V_b^k は時不変的な葉層構造を形成することになる。

Fig. 11 Foliation structure of Example 5

4.3 完全非可積分の場合

完全非可積分の場合の葉層構造に関して、3.3節の完全非可積分条件である定理3より以下の命題3が導かれる。

[命題3] アファイン拘束(2)に対して定理3が成り立つ、つまり $n-m$ 個の拘束がすべて非可積分であると仮定する。このとき、任意の点 $q^0 \in Q$ において $X(q^0) \in C_0(q^0)$ となり、配位多様体 Q は葉層構造に分かれない。また任意の点 $q \in Q$ において

$$C(q) = C_0(q) = T_q Q \quad (59)$$

$$\dim C_0(q) = \dim C(q) = \dim T_q Q = n \quad (60)$$

が成り立つ。

(証明) 定理3や命題2(b)で $k=n$ としたものから成り立つことが証明できる。

命題3に関して、 $n=3, m=1$ とした場合の説明図がFig. 12に示してある。Fig. 12(i)のように、 Q は葉層構造には分かれず、初期点 q^0 から出発した軌道は Q 内を移動できる。

Fig. 12 Proposition 3 ($n=3, m=1$)

命題3より完全非可積分の場合には葉層構造が存在せず、軌道は移動の制限を受けないことがわかる。この事実も第二論文⁶⁾の可到達性の解析で重要な役割を果たす。

[例題6] 例題4で用いた完全非可積分なアファイン拘束(36)は、命題3より配位多様体 Q は葉層構造には分かれないことがわかる。

5. おわりに

本論文では、主に以下の2つの結果を導いた。(i) アファイン拘束について、完全可積分・部分非可積分・完全非可積分のそれぞれの場合に対して、アファイン拘束の幾何学的表現のベクトル場が満たすべき必要十分条件を導出した。(ii) 完全可積分・部分非可積分・完全非可積分のそれぞれの場合において、配位多様体の葉層構造について解析を行ない、線形拘束の場合には表われなかった「時变的葉層構造」がアファイン拘束の場合には存在することを示した。アファイン拘束から得られる運動学的非対称アファインシステムの非線形制御論的な解析に関しては第二論文⁶⁾を参照されたい。

最後に、本研究を行なうにあたり、有益なご助言を頂きました東京大学 原辰次教授、村重淳助教授、京都大学 石川将人講師に謝意を表します。

参考文献

- 1) A. D. Lewis and R. M. Murray: Variational Principles for Constrained Systems: Theory and Experiment, *Int. J. Nonlinear Mechanics*, **30**-6, 793/815 (1995)
- 2) T. J. Tarn, M. Zhang and A. Serrani: New Integrability Conditions for Differential Constraints, *Systems and Control Letters*, **49**-5, 335/345 (2003)
- 3) A. M. Bloch: *Nonholonomic Mechanics and Control*, Springer-Verlag (2003)
- 4) A. Isidori: *Nonlinear Control Systems 3rd Edition*, Springer-Verlag (1995)
- 5) H. Nijmeijer and A. J. van der Schaft: *Nonlinear Dynamical Control Systems*, Springer-Verlag (1990)
- 6) 甲斐, 木村: 配位多様体におけるアファイン拘束の理論的解析-Part II: アファイン拘束を受ける運動学的非対称アファインシステムの可到達性-, 計測自動制御学会論文集, **42**-3, 222/231 (2006)
- 7) 美多 勉: 非線形制御入門, 昭晃堂 (2000)
- 8) 小松彦三郎: ベクトル解析と多様体 I, II, 岩波書店 (1995)

[著者紹介]

甲斐健也 (正会員)

2005年東京大学大学院新領域創成科学研究科博士課程修了。同年大阪大学大学院工学研究科助手。現在に至る。非線形制御理論などの研究に従事。博士(科学)。2004年度計測自動制御学会学術奨励賞受賞。システム制御情報学会の会員。

木村英紀 (正会員)

1970年東京大学大学院工学系研究科博士課程修了。同年大阪大学助手。同講師、同助教授を経て、87年同大学教授。95年東京大学計数工学科教授。99年同大学大学院新領域創成科学研究科教授。2001年理化学研究所バイオ・ミメティックコントロール研究センターチームリーダー。現在に至る。ロボ制御理論、モデリング理論などの研究に従事。博士(工学)。計測自動制御学会フェロー、IEEEフェロー。