エネルギー制御法による劣駆動ロボットの振り上げ制御と その動きの解析：Acrobot の場合

忻 欣*・兼 田 雅 弘*

Design and Analysis of Energy Based Swinging up Control
for an Underactuated Robot: the Acrobot Case

Xin XIN* and Masahiro KANEDA*

This paper addresses the energy based swinging up control problem of the Acrobot, which is a two link underactuated planar robot. Based on the Lyapunov stability theory, this paper proposes an energy based control law, provides a complete analysis of the convergence of the energy and the motion of the Acrobot, and illustrates clearly several unique characteristics of the closed-loop system of the Acrobot. Specifically, for *any initial state* of the Acrobot, this paper provides a necessary and sufficient condition for non-existence of any singular point in the control law, and shows clearly how to choose the control parameters such that starting from *any initial state*, the Acrobot will eventually either be swung up to any arbitrarily small neighborhood of the upright equilibrium point, or remain at the downward equilibrium point. Moreover, this paper shows that the downward equilibrium point is unstable and *hyperbolic* for the closed-loop system. This proves theoretically that the proposed energy based control is effective for swinging up the Acrobot for all initial conditions except a set of zero measure. Simulation results are provided to validate the theoretical results.

Key Words: the Acrobot, the Lyapunov stability theory, energy based control, swinging up control, underactuated systems

1. はじめに

近年、ロボットの軽量化を極限まで追求した結果、可動部分の数よりも少ないアクチュエータしかもたない“劣駆動”ロボットが出現した^{1), 4), 15)}。このようなロボットでは、アクチュエータの数が全駆動システムに比べて少なく済むため、コスト、重量、信頼性の点で優れている。そのため、宇宙、深海などでの極限作業ロボットのみならず、今後は家庭での作業ロボットなどの開発においても非常に期待されている。しかし、そのような劣駆動ロボットは一般化加速度まで含む積分不可能な2階非ホロノミックな拘束が一般に存在するため、その姿勢制御は挑戦的な課題として近年盛んに研究されている^{1), 8), 10), 12), 15)}。

劣駆動ロボットの代表例である Acrobot^{1), 4), 15)} は、体操選手の手を非駆動関節で、腰を駆動関節とモデル化した2リンクロボットで、鉄棒運動をする体操選手の動きを模擬することなどから興味深い制御対象として注目されている。

Acrobot の姿勢制御では、その振り上げ制御・安定化制御はよく研究されている^{7), 15), 16)}。それは Acrobot が鉛直下向きの位置にある状態から振り上げて倒立させる振り上げ制御と、Acrobot を鉛直上向きの位置に静止した状態（真上平衡点）を保つ安定化制御からなるものである¹⁵⁾。Spong¹⁵⁾ は、部分線形化法による振り上げ制御則を提案しているが、Acrobot の真上平衡点近傍での線形近似モデルを用いて設計した安定化制御則の引き込み領域が狭いため、Acrobot をその領域に振り上げるような制御パラメータの調整が困難であると指摘している。

一般に、劣駆動ロボットのダイナミクスは完全に線形化できないため、その姿勢制御問題に対して、部分線形化法^{1), 14), 15)} がよく用いられている。しかし、閉ループ系の解がそのロボットの初期状態と、制御パラメータに依存する零ダイナミクスによって決定されるため、その動きの解析は困難で、制御目的の達成は保証されない。そのため、近年、劣駆動ロボットの受動性あるいはエネルギーの保存則を利用し、Lyapunov の安定性理論を用いた制御則の開発が注目を集めている^{2), 3), 6)}。

Spong^{15), 16)} はエネルギーに着目した Acrobot の振り上げ制御則も提案しているが、Acrobot の動きに関する解析は行っていない。Fantoni ら²⁾ は、関節1が駆動、関

* 岡山県立大学情報工学部 総社市窪木 111

* Faculty of Computer Science and System Engineering
Okayama Prefectural University, Soja
(Received September 22, 2005)
(Revised December 21, 2005)

節 2 が非駆動の 2 リンクロボット Pendubot¹⁴⁾ を対象とし、そのエネルギー制御法による振り上げ制御則を提案し、Pendubot の初期状態がある条件を満たすとき、Pendubot の動きに関する解析を行なっている。Kolesnichenko ら⁶⁾ は、一般の劣駆動 Euler-Lagrange システムに対して、システムの総エネルギーと駆動関節の一般化角度・角速度を制御するというエネルギー制御法の提案を試み、Pendubot の振り上げ制御問題に対して、その制御則の設計とその動きに関する解析を行なっているが、ほかの劣駆動ロボットへの応用の可能性は不明である。Fantoni ら³⁾ は、台車型の倒立振子、回転式倒立振子、ボール・ビームシステムなどのエネルギー制御法による姿勢制御に関する成果を紹介しているが、劣駆動ロボットの代表例と言われる Acrobot については、言及していない。

そこで、著者ら^{18), 19)} は、エネルギー制御法による Acrobot の振り上げ制御とその解析という未解決課題を研究してきた。エネルギー制御法^{2), 6)} を適用し、Acrobot の振り上げ制御則は導出できるが、Acrobot と Pendubot の駆動機構が異なるため、Acrobot のエネルギーの収束値とその動きに関する大域的解析は、Pendubot の結果⁶⁾ と比べれば、困難な課題であった。また、本論文では、Acrobot の振り上げ制御則のパラメータの選定と Acrobot の動きの大域的解析について、Pendubot の結果^{2), 6)} と比べれば、いくつかの新しい結果を与えている。それらについて、以降の章では、具体的に論じる。

本論文では、Acrobot を任意の初期状態から真上平衡点の任意の近傍まで振り上げる制御則の設計と、Acrobot の動きに関する大域的解析を目的とする。まず、エネルギー制御法^{2), 6)} を適用し、振り上げ制御則を導出するとともに、その制御則に特異点が存在しないための制御パラメータに関する必要十分条件を与える。つぎに、その振り上げ制御則での Acrobot の動きを大域的に解析する。具体的には、本論文では、Acrobot は任意の初期状態から、真上平衡点の任意の近傍まで振り上げられるか、あるいは、ある平衡点集合に属する 1 つの平衡点に収束するか、の何れかになることを明らかにする。さらに、その平衡点集合が真下平衡点のみを持つような制御パラメータをいかに選ぶかを示し、その点が閉ループ系の不安定双曲型平衡点であることを示す。このことから、提案した制御則のもとで、Acrobot は、ある測度が 0 である集合を除いた任意の初期状態から、真上平衡点の任意の近傍まで振り上げられることがいえる。

本論文の構成を述べる。2 章で 2 リンク劣駆動ロボットに関する準備知識を与え、3 章で Acrobot のエネルギー制御法による振り上げ制御則を与え、その制御則に特異点が存在しないための必要十分条件を示す。4 章で Acrobot のエネルギーの収束値とその動きに関する解析を行ない、5 章で振り上げ制御の目的を達成するための制御パラメータに関する条件を示す。6 章で数値シミュレーションにより提案法の妥当性を確認し、7 章で結論を述べる。

2. 準備知識

Fig. 1 に示す垂直平面における 2 リンクロボットの運動方程式は以下のように表わせる^{2), 15)}。

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau, \quad (1)$$

$$\text{ただし, } q = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 \end{bmatrix}^T, \tau = \begin{bmatrix} \tau_1 & \tau_2 \end{bmatrix}^T,$$

$$M(q) = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 \cos q_2 & \alpha_2 + \alpha_3 \cos q_2 \\ \alpha_2 + \alpha_3 \cos q_2 & \alpha_2 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

$$C(q, \dot{q})\dot{q} = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} = \alpha_3 \begin{bmatrix} -2\dot{q}_1\dot{q}_2 - \dot{q}_2^2 \\ \dot{q}_1^2 \end{bmatrix} \sin q_2, \quad (3)$$

$$G(q) = \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \cos q_1 + \beta_2 \cos(q_1 + q_2) \\ \beta_2 \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix}, \quad (4)$$

ただし、

$$\begin{cases} \alpha_1 = m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + I_1 \\ \alpha_2 = m_2 l_{c2}^2 + I_2, \quad \alpha_3 = m_2 l_1 l_{c2} \\ \beta_1 = (m_1 l_{c1} + m_2 l_1)g, \quad \beta_2 = m_2 l_{c2}g \end{cases} \quad (5)$$

ここで、リンク i ($i = 1, 2$) に対して、 m_i はその質量、 l_i はその長さ、 l_{ci} は関節 i からリンク i の重心までの長さ、 I_i はその重心回りの慣性モーメントである。また、 g は重力加速度、 τ_i は関節 i に加わるトルクである。

Fig. 1 A two-link planar robot

関節 1 が非駆動、すなわち、 $\tau_1 \equiv 0$ のとき、それは Acrobot^{4), 15)} と呼ばれる。一方、関節 2 が非駆動、すなわち、 $\tau_2 \equiv 0$ のとき、それは Pendubot¹⁴⁾ と呼ばれる。

以下は、この 2 種類のロボットの平衡点について述べる。 $\dot{q} = 0$ と $\ddot{q} = 0$ より、 $(q, 0)$ を Pendubot の平衡点とすると、Pendubot に対しては、

$$q_1 + q_2 = \pm\pi/2 \pmod{2\pi} \quad (6)$$

が成り立ち、Pendubot のリンク 2 が水平軸 (X 軸) に垂直の姿勢をとる。

一方、 $(q, 0)$ が Acrobot の平衡点とすると、

$$G_1 = \beta_1 \cos q_1 + \beta_2 \cos(q_1 + q_2) = 0 \quad (7)$$

が成り立つ。また、その重心の座標 (X_G, Y_G) が

$$(X_G, Y_G) = \frac{(G_1, \beta_1 \sin q_1 + \beta_2 \sin(q_1 + q_2))}{(m_1 + m_2)g} \quad (8)$$

を満たすことから、Acrobot の平衡点はすべてその重心が鉛直軸 (Y 軸) 上にある。

平衡点における 2 つ関節角度に関する制約は、Pendubot の (6) 式に比べれば、Acrobot の (7) 式のほうが複雑である。それは Pendubot に関する結果^{2), 6)}を容易に Acrobot へ拡張できない理由の 1 つと考えられる。

つぎの補題 (証明は付録 A を参照されたい) を示しておく。

[補題 1] (5) 式の $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2$ は

$$\alpha_2 \beta_1 > \alpha_3 \beta_2, \quad (9)$$

$$\alpha_3 \beta_1 \geq \alpha_1 \beta_2 \quad (10)$$

を満たす。

補題 1 は、2 リンクロボットの機械パラメータに関する新たな性質で、定理 2 と定理 4 の証明で用いられて、本論文での Acrobot の動きに関する解析において重要な役割を果たす。

3. Acrobot の振り上げ制御則

まず、エネルギー制御法^{2), 6)}を適用し、Acrobot の振り上げ制御則を導出する。つぎに、導出した制御則に特異点が存在しないための必要十分条件を示す。その条件は本章の主な結果である。

本論文では、Acrobot の真上平衡点を次式で表わす。

$$q_1 = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}, q_2 = 0, \dot{q}_1 = \dot{q}_2 = 0, \quad (11)$$

なお、本論文では、 q_1 は非駆動関節の角度であるため、モジュロ 2π の意味で扱う。

まず、Acrobot のエネルギーは運動エネルギーと位置エネルギーの和で、つぎのように表わせる。

$$E(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} + P(q). \quad (12)$$

ただし、Acrobot の重心の Y 軸座標を用いて、その位置エネルギーはつぎのように表わせる。

$$P(q) = (m_1 + m_2)gY_G = \beta_1 \sin q_1 + \beta_2 \sin(q_1 + q_2). \quad (13)$$

エネルギー E と入力 τ の関係

$$\dot{E} = \dot{q}^T \tau = \dot{q}_2 \tau_2 \quad (14)$$

に着目し、つぎの Lyapunov 関数の候補を選ぶ。

$$V = \frac{1}{2}(E - E_r)^2 + \frac{1}{2}k_D \dot{q}_2^2 + \frac{1}{2}k_P q_2^2, \quad (15)$$

ただし、 E_r は真上平衡点のエネルギーで、(12) 式より、 E_r は次式で表わされる。

$$E_r = E(q, \dot{q})|_{q_1=\pi/2, q_2=0, \dot{q}=0} = \beta_1 + \beta_2 \quad (16)$$

スカラー k_D, k_P は正数である。

(1) 式に沿って V の時間微分を取り、(14) 式を用いると、

$$\dot{V} = \dot{q}_2((E - E_r)\tau_2 + k_D \dot{q}_2 + k_P q_2)$$

が得られる。ここで、ある正数 k_V に対して、

$$(E - E_r)\tau_2 + k_D \dot{q}_2 + k_P q_2 = -k_V \dot{q}_2 \quad (17)$$

が満たされるように τ_2 が求められれば、次式が成り立つ。

$$\dot{V} = -k_V \dot{q}_2^2 \leq 0. \quad (18)$$

つぎに、(17) 式を満たす τ_2 はどのような条件で存在するかについて議論する。このため、まず、(1) 式より、

$$\ddot{q}_2 = (M_{11}\tau_2 + M_{21}(H_1 + G_1) - M_{11}(H_2 + G_2))/\Delta$$

を求める。ただし、

$$\Delta = M_{11}M_{22} - M_{12}M_{21} = \alpha_1\alpha_2 - \alpha_3^2 \cos^2 q_2. \quad (19)$$

なお、 $M(q) > 0$ から、 $\Delta > 0$ といえる。上式の $\ddot{q}_2$ を (17) 式に代入すると、次式が得られる。

$$(k_D + (E - E_r)\Delta/M_{11})\tau_2 = -(k_V \dot{q}_2 + k_P q_2)\Delta/M_{11} - k_D(M_{21}(H_1 + G_1) - M_{11}(H_2 + G_2))/M_{11}. \quad (20)$$

したがって、

$$k_D + (E - E_r)\Delta/M_{11} \neq 0, \quad \forall t \geq 0 \quad (21)$$

が成り立つとき、 τ_2 は (20) 式よりつぎのように表わせる。

$$\tau_2 = \frac{-(k_V \dot{q}_2 + k_P q_2)\Delta}{(E - E_r)\Delta + k_D M_{11}} - \frac{k_D(M_{21}(H_1 + G_1) - M_{11}(H_2 + G_2))}{(E - E_r)\Delta + k_D M_{11}}. \quad (22)$$

つぎに、(21) 式について解析する。 $E(q, \dot{q}) \geq P(q)$ より、

$$k_D + (E(q, \dot{q}) - E_r)\Delta/M_{11} \geq k_D + (P(q) - E_r)\Delta/M_{11}$$

が得られる。ただし、等号は $\dot{q} = 0$ が成り立つときに限る。さらに、 $P(q) \leq E_r$ より、Acrobot の任意の状態に対して、(21) 式が成り立つ、すなわち、(22) 式の制御則に特異点が存在しないための必要十分条件は

$$k_D > -\inf_{q, \dot{q}} \frac{(E - E_r)\Delta}{M_{11}} = -\min_q \frac{(P(q) - E_r)\Delta}{M_{11}} \quad (23)$$

が成立することである。 $(P(q) - E_r)\Delta/M_{11}$ の最小値を取りうる q が

$$\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{(P(q) - E_r)\Delta}{M_{11}} \right) = 0 \quad (24)$$

を満たし、 Δ/M_{11} が q_2 のみの関数であるため、次式が成り立つ。

$$\frac{\partial P(q)}{\partial q_1} = G_1 = \beta_1 \cos q_1 + \beta_2 \cos(q_1 + q_2) = 0. \quad (25)$$

また、(25) 式が成り立つとき、

$$P^2 = P^2 + G_1^2 = \beta_1^2 + \beta_2^2 + 2\beta_1\beta_2 \cos q_2$$

より、 $P(q)$ は次式で表わせる q_2 のみの関数である。

$$P(q) = \pm \Phi(q_2); \quad \text{when } G_1 = 0. \quad (26)$$

ただし、

$$\Phi(q_2) = \sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2 + 2\beta_1\beta_2 \cos q_2}. \quad (27)$$

したがって、(23) 式は、(26) 式の $P(q)$ の負値を取ることで、

$$k_D > -\min_q \frac{(-\Phi(q_2) - E_r)\Delta}{M_{11}},$$

すなわち、

$$k_D > \max_{q_2 \in [0, 2\pi]} \frac{(\Phi(q_2) + E_r)\Delta(q_2)}{M_{11}(q_2)} \quad (28)$$

と表わせる。ここで、(23) 式の $(E(q, \dot{q}) - E_r)\Delta/M_{11}$ が最小値を取りうる $(q, \dot{q})$ は、Acrobot の重心が Y 軸の負方向にある平衡点であることに注意する。

続いて、ある正数 c に対して、集合

$$\Psi = \{(q, \dot{q}) \mid V(q, \dot{q}) \leq c\} \quad (29)$$

を定義する。(18) 式に示す $\dot{V} \leq 0$ 、すなわち、 V が単調非増加であるため、Acrobot と (22) 式の制御則からなる閉ループシステムに対して、 Ψ 内の任意の初期状態から始まる解 $(q(t), \dot{q}(t))$ は、 Ψ にとどまる。したがって、LaSalle 定理⁵⁾ (p. 128, 定理 4.4) により、その解 $(q(t), \dot{q}(t))$ は、 $t \rightarrow \infty$ のとき、集合

$$\Gamma = \{(q(t), \dot{q}(t)) \mid \dot{V} = 0\} \quad (30)$$

に含まれる最大不変集合 W に収束する。

さらに、(18) 式の $\dot{V} = -k_V q_2^2$ より、最大不変集合 W においては、 $\dot{V} = 0$ 、等価的に、 $q_2 = 0$ が恒等的に成立するため、 V 、 q_2 はそれぞれある定数 V^* 、 q_2^* であり、また、(15) 式の Lyapunov 関数 V の式から、 E はある定数 E^* である。よって、 $(q(t), \dot{q}(t))$ が $t \rightarrow \infty$ のとき最大不変集合 W に収束することにより、 E と q_2 は $t \rightarrow \infty$ のときそれぞれ定数 E^* 、 q_2^* に収束する、すなわち、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E = E^*, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} q_2 = q_2^* \quad (31)$$

が成り立つ。

ここで、 $q_2 \equiv q_2^*$ 、 $E \equiv E^*$ を (12) 式に代入し、次式を得る。

$$\dot{q}_1^2 = \frac{2E^* - 2\beta_1 \sin q_1 - 2\beta_2 \sin(q_1 + q_2^*)}{\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 \cos q_2^*}. \quad (32)$$

よって、不変集合 W は以下のように表わせる。

$$W = \{(q, \dot{q}) \mid (q, \dot{q}) \text{ は (32) 式と } q_2 \equiv q_2^* \text{ を満たす}\}. \quad (33)$$

最後に、本章の結果をまとめると、つぎの定理が得られる。

《定理 1》 k_D 、 k_P 、 k_V を正のパラメータとする。Acrobot の任意の状態に対して、(22) 式の制御則に特異点が存在しないための必要十分条件は k_D が (28) 式を満たすことである。このとき、Acrobot と (22) 式の制御則からなる閉ループシステムに対して、(31) 式が成立し、その解 $(q(t), \dot{q}(t))$ は $t \rightarrow \infty$ のとき (33) 式の不変集合 W に収束する。 ■

【注意 1】 Pendubot の振り上げ制御則に特異点が存在しないための十分条件^{2), 6)} と異なり、本論文では、Acrobot に対して、 $M(q)$ が駆動角度 q_2 のみの関数という性質と Acrobot の平衡点の性質を用いることで、その必要十分条件を与えている。 ■

4. エネルギーの収束値と Acrobot の動きに関する解析

本章では、エネルギーの収束値 E^* を解析することによって、(33) 式の不変集合 W を特徴づけ、Acrobot の動きに関する解析を行なう。

まず、 $E \equiv E^*$ 、 $q_2 \equiv q_2^*$ を (17) 式に代入し、次式を得る。

$$k_P q_2^* + (E^* - E_r)\tau_2 = 0. \quad (34)$$

つぎに、エネルギーの収束値 E^* について、 $E^* = E_r$ と $E^* \neq E_r$ の 2 つの場合に分けて解析する。

Case 1: $E^* = E_r$

$E^* = E_r$ のとき、 $q_2^* = 0$ は (34) 式からいえる。 $E^* = E_r$ と $q_2^* = 0$ を (32) 式に代入すると、

$$\dot{q}_1^2 = \frac{2(\beta_1 + \beta_2)}{\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3} (1 - \sin q_1) \quad (35)$$

が得られる。したがって、閉ループシステムの解 $(q(t), \dot{q}(t))$ は $t \rightarrow \infty$ のとき、つぎの不変集合

$$W_r = \{(q, \dot{q}) \mid (q, \dot{q}) \text{ は (35) 式と } q_2 \equiv 0 \text{ を満たす}\} \quad (36)$$

に収束する。また、Acrobot が (35) 式に沿って動く場合を考え、次式が成り立つことを以下に示す。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} q_1 = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{q}_1 = 0. \quad (37)$$

まず、(35) 式の第 1 式をつぎのように書き換える。

$$\dot{q}_1 = \omega \sqrt{1 - \sin q_1}, \quad (38)$$

あるいは

$$\dot{q}_1 = -\omega \sqrt{1 - \sin q_1}, \quad (39)$$

ただし、 $\omega = \sqrt{2(\beta_1 + \beta_2)/(\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3)}$ 。

つぎに、(38) 式の場合を考えよう。 q_1 はモジュロ 2π の意味で扱うため、 $q_1 \in [-3\pi/2, \pi/2]$ のみを考えればよい。 $-3\pi/2 < q_1(t) < \pi/2$ のとき、 $\dot{q}_1(t) > 0$ より、 $(q_1(t), \dot{q}_1(t))$ が $t \rightarrow \infty$ のとき $(\pi/2, 0)$ に収束する。よって、(37) 式が成り立つ。なお、 $(q_1, \dot{q}_1) = (-3\pi/2, 0)$ と $(q_1, \dot{q}_1) = (\pi/2, 0)$ は (38) 式の同じ平衡点であるため、(38) 式は Homoclinic 軌道^{9), 13)} である。また、(39) 式に対しても同様に (37) 式が示せる。

したがって、閉ループシステムの解 $(q(t), \dot{q}(t))$ が $t \rightarrow \infty$ のとき、不変集合 W_r への収束性から、Acrobot は真上平衡点の任意の近傍まで振り上げられることがわかる。

Case 2: $E^* \neq E_r$

$E^* \neq E_r$ のとき、(34) 式を満たす τ_2 は次式を満たす定数 τ_2^* になる。

$$k_P q_2^* + (E^* - E_r)\tau_2^* = 0. \quad (40)$$

また、 $q_2 \equiv q_2^*$ 、 $\tau \equiv [0, \tau_2^*]^T$ を (1) 式に代入すると、

$$M_{11}\ddot{q}_1 + \beta_1 \cos q_1 + \beta_2 \cos(q_1 + q_2^*) = 0, \quad (41)$$

$$M_{21}\ddot{q}_1 + \alpha_3 \dot{q}_1^2 \sin q_2^* + \beta_2 \cos(q_1 + q_2^*) = \tau_2^* \quad (42)$$

が得られる。

本論文の解析にとって重要な結果をつぎの定理で述べる。その証明は付録Bを参照されたい。

《定理2》 Acrobot に対して, $q_2(t)$, $\tau_2(t)$, $E(t)$ がそれぞれ恒等的にある定数 q_2^* , τ_2^* , E^* ($E^* \neq E_r$) とする。 $q_1(t)$, q_2^* , τ_2^* が (40), (41), (42) 式を満たすとき, $q_1(t)$ はある定数 q_1^* となる。 ■

【注意2】 Pendubot の関連結果⁶⁾ と比べれば, 付録Bに示すように, 定理2を厳密に証明することは容易ではなかった。その原因として, Pendubot と Acrobot の平衡点の構造が異なることや $M(q)$ が q_2 のみの関数であることなどが考えられる。 ■

まとめると, $E^* \neq E_r$ が起これば, Acrobot は平衡点 $(q_1^*, q_2^*, 0, 0)$ にある。ただし, (q_1^*, q_2^*) は (7) と (40) 式を満たす。その平衡点に対して, そのエネルギー E^* は $P(q_1^*, q_2^*)$ となり, τ_2^* は (1), (4) 式より得られる。よって, (40) 式の E^* , τ_2^* はつぎのように表わせる。

$$\begin{cases} E^* = \beta_1 \sin q_1^* + \beta_2 \sin(q_1^* + q_2^*) \neq E_r \\ \tau_2^* = \beta_2 \cos(q_1^* + q_2^*) \end{cases} \quad (43)$$

ここで, つぎの平衡点集合

$$\Omega = \{(q, \dot{q}) \mid q \text{ は (7), (40), (43) 式を満たす, } \dot{q} = 0\} \quad (44)$$

を定義し, Case 1 と Case 2 に関する解析結果をまとめると, つぎの定理が得られる。

《定理3》 k_D が (28) 式を満たし, $k_P > 0$, $k_V > 0$ とする。(22) 式の制御則のもとで, Acrobot のエネルギーの収束値とその動きに関して, $t \rightarrow \infty$ のとき, 以下の2つの結論の何れかが成立する。

- i). $E^* = E_r$ が成り立ち, 閉ループシステムの解 $(q(t), \dot{q}(t))$ は (36) 式の不变集合 W_r に収束する。
- ii). $E^* \neq E_r$ が成り立ち, 閉ループシステムの解 $(q(t), \dot{q}(t))$ は (44) 式の平衡点集合 Ω に収束する。 ■

5. 制御パラメータと Acrobot の動きとの関係に関する解析

前章では, Case 2 が起これば, 閉ループシステムの解 $(q(t), \dot{q}(t))$ は $t \rightarrow \infty$ のとき (44) 式の Ω に属する1つの平衡点 $(q_1^*, q_2^*, 0, 0)$ に収束することを示した。もし, その平衡点が安定であれば, Acrobot がその平衡点に留まるため, 振り上げ制御目的が実現できない。本章では, 制御パラメータ k_P と平衡点集合 Ω の関係に関する解析を行なう。

つぎの定理を与える。

《定理4》 k_D が (28) 式を満たし, k_P が

$$k_P > 2\beta_1\beta_2 \quad (45)$$

を満たし, $k_V > 0$ とする。(22) 式の制御則のもとで $E^* \neq E_r$ が起これば,

- 1) (44) 式の平衡点集合 Ω は $(-\pi/2, 0, 0, 0)$ のみをもつ。

- 2) $(-\pi/2, 0, 0, 0)$ は閉ループシステムの不安定な双曲型平衡点である。 ■

証明1). 証明の準備として, (7), (40), (43) 式から q_1^* を消去し, q_2^* のみを含む式を導出し, その式を満たす q_2^* と k_P との関係を解析する。なお, 記号の簡潔のため, q_1^* , q_2^* , E^* と τ_2^* の $*$ を省略する。

(7), (40), (43) 式と $E(q, 0) = P(q)$ より, q_1 , q_2 は以下の式を満たす。

$$\beta_1 \cos q_1 + \beta_2 \cos(q_1 + q_2) = 0, \quad (46)$$

$$k_P q_2 + (P - \beta_1 - \beta_2)\beta_2 \cos(q_1 + q_2) = 0, \quad (47)$$

$$\beta_1 \sin q_1 + \beta_2 \sin(q_1 + q_2) = P. \quad (48)$$

(48) 式 $\times \cos(q_1 + q_2)$ - (46) 式 $\times \sin(q_1 + q_2)$ という計算を行なうと, 次式が得られる。

$$P \cos(q_1 + q_2) = -\beta_1 \sin q_2. \quad (49)$$

(47) 式の $\cos(q_1 + q_2)$ は, 上式と (26) 式の $P = \pm \Phi(q_2)$ を用いて, $P \neq 0$ のとき, 消去できる。

ここでは, Case 2 に対して, さらに, $P > 0$ (Case 2a), $P = 0$ (Case 2b), $P < 0$ (Case 2c) の3つの場合に分ける。それらはそれぞれ Acrobot の重心が Y 軸の正方向, 原点, Y 軸の負方向にある場合である。以下は, (45) 式が成り立つとき, Case 2c しかありえない, かつ, Acrobot が真下平衡点にあることを証明する。

Case 2a. Acrobot の重心が Y 軸の正方向にある

$P = \Phi(q_2) > 0$ を用いて, (49) 式から

$$\cos(q_1 + q_2) = -\frac{\beta_1 \sin q_2}{\Phi(q_2)} \quad (50)$$

を得る。これを (47) 式に代入すると, 次式が得られる。

$$\frac{k_P}{\beta_1\beta_2} q_2 - \frac{(\Phi(q_2) - \beta_1 - \beta_2) \sin q_2}{\Phi(q_2)} = 0. \quad (51)$$

これから, (45) 式が成り立つとき, (51) 式と $E(q, 0) = P = \Phi(q_2) \neq E_r$ を満たす q_2 が存在しないことを示す。

まず, $q_2 = 0$ は (51) 式の一つの解であるが, $P = \Phi(0) = E_r$ となり, $P \neq E_r$ に反する。

つぎに, $q_2 \neq 0$ のとき, (51) 式をつぎのように変形する。

$$q_2 \left(\frac{k_P}{\beta_1\beta_2} - \eta(q_2) \right) = 0, \quad (52)$$

ただし,

$$\eta(q_2) = \frac{(\Phi(q_2) - \beta_1 - \beta_2) \sin q_2}{\Phi(q_2) q_2}. \quad (53)$$

したがって, (52) 式が $q_2 \neq 0$ の解をもたないための必要十分条件は

$$k_P > \beta_1\beta_2 \sup_{q_2 \neq 0} \eta(q_2) \quad (54)$$

が成り立つことである。一方, 付録Cに示される不等式

$$\sup_{q_2 \neq 0} \eta(q_2) \leq \frac{2}{\pi} \min \left(1, \frac{\beta_2}{\beta_1} \right) \quad (55)$$

より, (45) 式が成り立てば, (54) 式が成り立つため, (52) 式は $q_2 \neq 0$ の解を持たない. よって, Case 2a はありえない.

Case 2b. Acrobot の重心が原点にある

$P = \Phi(q_2) = 0$ は $\beta_1 = \beta_2$ かつ $\cos q_2 = -1$ が成り立つときに限る. したがって, このとき, (47) 式は

$$k_P q_2 + 2\beta_1^2 \cos q_1 = 0 \quad (56)$$

となる. 一方, $\cos q_2 = -1$ から, $q_2 = \pm\pi, \pm3\pi, \dots$ がいえるため, (45) 式が成り立つとき,

$$|k_P q_2| \geq k_P \pi > 2\beta_1^2 \pi \geq 2\beta_1^2 |\cos q_1|$$

が成立する. これは (56) 式に反する. よって, Case 2b もありえない.

Case 2c. Acrobot の重心が Y 軸の負方向にある

$P = -\Phi(q_2) < 0$ を用いて, (49), (47) 式から次式を得る.

$$\frac{k_P}{\beta_1 \beta_2} q_2 - \frac{(\Phi(q_2) + \beta_1 + \beta_2) \sin q_2}{\Phi(q_2)} = 0. \quad (57)$$

明らかに, $q_2 = 0$ は上式の解である. $q_2 \neq 0$ のとき, 上式をつぎのように変形する.

$$q_2 \left(\frac{k_P}{\beta_1 \beta_2} - \xi(q_2) \right) = 0, \quad (58)$$

ただし,

$$\xi(q_2) = \frac{(\Phi(q_2) + \beta_1 + \beta_2) \sin q_2}{\Phi(q_2) q_2}. \quad (59)$$

一方, 付録 D で示すつぎの重要な式

$$\sup_{q_2 \neq 0} \xi(q_2) = 2; \quad \xi(q_2) < 2, \quad \text{for } q_2 \neq 0 \quad (60)$$

より, (57) 式が $q_2 \neq 0$ の解をもたない必要十分条件は $k_P \geq 2\beta_1 \beta_2$ (等号がある) が成り立つことである. (45) 式 (等号がない) が成り立てば, (58) 式が $q_2 \neq 0$ の解をもたない, すなわち, (57) 式が唯一解 $q_2 = 0$ をもつことがいえる. このとき, $P = -\beta_1 - \beta_2$ と (48) 式より, $\sin q_1 = -1$, すなわち, $q_1 = -\pi/2 \pmod{2\pi}$ が成り立つ.

2). ある非線形系の双曲型平衡点とは, その平衡点におけるヤコビ行列の固有値が虚軸上にないということである⁹⁾. この定義にしたがって, Acrobot と制御器 (22) からなる閉ループ系に対して, (45) 式が成り立つとき, $(-\pi/2, 0, 0, 0)$ におけるヤコビ行列は実部が 0 の固有値をもたないこと, かつ実部が正である固有値をもつことと示せばよい.

そのためには, 平衡点 $(-\pi/2, 0, 0, 0)$ の回りで, 閉ループ系を線形近似し, その平衡点におけるヤコビ行列 J を求め, ラウスの安定判別法 (たとえば, 文献¹⁷⁾ の pp. 57-61 を参照されたい) により, その平衡点が不安定な双曲型であることと示す. Mathematica を用いて計算すると, J の特性多項式がつぎのように表わせる.

$$|sI - J| = s^4 + a_1 s^3 + a_2 s^2 + a_3 s + a_4. \quad (61)$$

ただし, $a_1, \dots, a_4$ は

$$\begin{aligned} a_1 &= M_{11}(0)k_V/\delta, \\ a_2 &= (M_{11}(0)k_P + E_r(k_D - 2(\alpha_2\beta_1 + \alpha_1\beta_2)))/\delta, \\ a_3 &= E_r k_V/\delta, \\ a_4 &= E_r(k_P - 2\beta_1\beta_2)/\delta \end{aligned} \quad (62)$$

で表わせる. ただし, $\delta = M_{11}(0)k_D - 2\Delta(0)E_r$, $M_{11}(0) = \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3$, $\Delta(0) = \alpha_1\alpha_2 - \alpha_3^2$.

まず, k_D の条件 (28) より, $\delta > 0$ がいえ, また, k_P の条件 (45) より, $a_4 > 0$ がいえ, さらに, $k_V > 0$ より, $a_1 > 0$, $a_3 > 0$ がいえる.

つぎに, ラウス表から, $R_2 = (a_1 a_2 - a_3)/a_1 \neq 0$ のとき, ラウス表の第 1 列目は 1, a_1 , R_2 , R_3 , a_4 となることとわかる. ただし,

$$R_3 = \frac{a_1 a_2 a_3 - a_3^2 - a_1^2 a_4}{a_1 R_2}. \quad (63)$$

次式が成り立つことに注意する.

$$R_2 R_3 = -2k_V E_r \rho^2 / (M_{11}(0)\delta^2) < 0, \quad (64)$$

ただし, $\rho = \alpha_2\beta_1 - \alpha_3\beta_2 + \alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_2$, また, 補題 1 より, $\rho > 0$ が成り立つ.

ラウスの安定判別法によって, R_2 が正, 0, 負によらず, 行列 J が虚軸上に固有値をもたないこと, および, 不安定な固有値を 2 個もつことがわかる. よって, $(-\pi/2, 0, 0, 0)$ は不安定な双曲型平衡点である. □

【注意 3】 $(-\pi/2, 0, 0, 0)$ が不安定であることのみを判定するならば, 上記に示したそのヤコビ行列による方法を用いなくても, その平衡点近傍のある点とその平衡点のそれぞれの V の値を比較することによって証明できる¹⁹⁾. その詳細は紙面の都合によって省略する. ■

定理 3, 4 をまとめると, つぎの定理が得られる.

《定理 5》 k_D が (28) 式を満たし, k_P が (45) 式を満たし, $k_V > 0$ とする. このとき, (22) 式の制御則のもとで, $t \rightarrow \infty$ のとき, 閉ループシステムの解 $(q(t), \dot{q}(t))$ は

$$W = W_r \cup \{(-\pi/2, 0, 0, 0)\} \quad (65)$$

に収束する. ただし, W_r は (36) 式で定義される不変集合である. また, $(-\pi/2, 0, 0, 0)$ は閉ループシステムの不安定な双曲型平衡点である. ■

【注意 4】 制御パラメータが定理 5 に示された条件を満たすとき, $(-\pi/2, 0, 0, 0)$ が閉ループシステムの不安定で, 双曲型平衡点であるため, その平衡点に収束する状態の集合の測度は 0 である¹¹⁾. また, 初期状態がその集合に入ったとしても, 実際的には外乱などによって, Acrobot はその集合から離れていく. したがって, 提案した制御則のもとで, Acrobot は, その測度 0 の集合を除いた任意の初期状態から, 真上平衡点の任意の近傍まで振り上げられるため, 本論文の振り上げ制御目的が実現できる. 一方, (62) 式より, もし $k_P = 2\beta_1\beta_2$ であれば, $a_4 = 0$ となり, J は 0 の固有値をもつ. その場合, $(-\pi/2, 0, 0, 0)$ は不安定であるが, 双

曲型ではない。これらの結果は Acrobot の振り上げ制御において興味深いものと考えられる。■

【注意5】本章の解析と Pendubot の関連結果⁶⁾と比較すると、Acrobot のほうがはるかに困難である。これは、平衡点における2つの関節角度に関する制約において、Acrobot のほうが複雑であるためと考えられる。なお、Pendubot の収束する最大不変集合に含まれる唯一の望ましくない平衡点が双曲型かどうかは示されていない。■

6. 数値シミュレーション結果

文献^{1), 4), 15)}で紹介された Acrobot を対象とし、上述の理論的な結果を数値シミュレーションによって確認した。ここでは、文献¹⁵⁾の Acrobot を用いたシミュレーション結果のみを述べる。その Acrobot の機械パラメータは以下のものである。 $m_1 = 1[\text{kg}]$, $m_2 = 1[\text{kg}]$, $l_1 = 1[\text{m}]$, $l_2 = 2[\text{m}]$, $l_{c1} = 0.5[\text{m}]$, $l_{c2} = 1[\text{m}]$, $I_1 = 0.083[\text{kg}\cdot\text{m}^2]$, $I_2 = 0.33[\text{kg}\cdot\text{m}^2]$ 。また、 $g = 9.8[\text{m/s}^2]$ 。

文献¹⁵⁾と同じ初期状態 $(q_1(0), q_2(0), \dot{q}_1(0), \dot{q}_2(0)) = (-1.4, 0, 0, 0)$ を用いた。これは真下平衡点から少し離れた初期状態である。

まず、振り上げ制御を行なう。条件(28), (45)は以下の不等式になる。

$$k_D > 35.7406, \quad k_P > 288.1200. \quad (66)$$

さらに、 $k_V > 0$ が成立すれば、定理5より、Acrobot を真上平衡点の任意の近傍まで振り上げることができる。

ここでは、(66)式を満たし、かつ、より速く Acrobot を振り上げるように $k_D = 36.5$, $k_P = 342.4$, $k_V = 21.22$ を選んだ。上記の制御パラメータでのシミュレーション結果を Fig. 2～Fig. 4 に示す。

Fig. 2 Time responses of $q_1(t) - \pi/2$ and $q_2(t)$ for the swinging up phase

Fig. 2 より、 q_2 が 0 に収束すること、リンク1が鉛直上方向に振り上げられることがわかる。Fig. 3 より、 E が E_r に収束することと V が単調非増加であることがわかる。ま

Fig. 3 Time responses of $E(t) - E_r$, $V(t)$ for the swinging up phase

Fig. 4 Time responses of τ_2 , and phase portrait of $(q_1 - \pi/2, \dot{q}_1)$ for the swinging up phase

た、Fig. 4 より、 $(q_1, \dot{q}_1)$ が Homoclinic 軌道 (35) に収束することがわかる。

つぎに、Acrobot が真上平衡点の指定した近傍に入ると、振り上げ制御則から安定化制御則に切り替える振り上げ・安定化制御を行なう。その安定化制御則は、Acrobot の真上平衡点の近傍での線形モデルに対して、文献¹⁵⁾と同様に LQR 法により以下のように設計した。

$$\tau_2 = -Fx, \quad (67)$$

$$\text{ただし、} x = \begin{bmatrix} q_1 - \pi/2 & q_2 & \dot{q}_1 & \dot{q}_2 \end{bmatrix}^T,$$

$$F = [-246.4813 \quad -98.6903 \quad -106.4640 \quad -50.1381].$$

なお、 F は Matlab 関数 “lqr” ($Q = I$, $R = 1$) によって得られたものである。ここでは、2つの制御則の切り替え条件は

$$|x_1| + |x_2| + 0.1|x_3| + 0.1|x_4| < \zeta \quad (68)$$

と定めた。 $\zeta = 0.3$ のとき、Acrobot の振り上げ・安定化制御のシミュレーション結果を Fig. 5 に示す。切り替えは時

刻 $t = 20(s)$ あたりで行なわれた。

Fig. 5 Time responses of $q_1(t) - \pi/2$ and $q_2(t)$ for the swinging up and stabilization phases

7. 結 論

本論文では、エネルギー制御法による振り上げ制御則を提案するとともに、その制御則に特異点が存在しないための制御パラメータに関する必要十分条件を与えた。また、Acrobot のエネルギーの収束値とその動きを大域的に解析した。その解析により、提案した制御則で、Acrobot は、任意の初期状態から、真上平衡点の任意の近傍まで振り上げられるか、あるいは、ある平衡点集合に属する 1 つの平衡点に収束するかの何れかになることを明らかにした。また、その平衡点集合が真下平衡点のみをもつような制御パラメータをいかに選ぶかを示し、その点が閉ループ系の不安定な双曲型平衡点であることを示した。したがって、Acrobot は、ある測度が 0 である集合を除いた任意の初期状態から、真上平衡点の任意の近傍まで振り上げられることを解明した。これにより、エネルギー制御法が Acrobot の振り上げ制御に有効であることを理論的に示した。

多自由度の劣駆動システムの制御に関する研究はまだ少なく、興味深い挑戦課題の 1 つである。本論文の解析法は、多自由度の劣駆動システムに対して、エネルギー制御法による閉ループシステムの振る舞いに関する解析に新たな糸口を与えている。

謝辞 本研究はウエスコ財団研究助成金、中国電力技術財団研究助成金および文部科学省科学研究費補助金 (No.14750375) のもとに行なわれた。ここに感謝の意を表す。

付録 A. 補題 1 の証明

まず、(9) 式はつぎのように直接確認できる。

$$\alpha_2\beta_1 - \alpha_3\beta_2 > m_2l_{c2}^2 \cdot m_2l_1g - m_2^2l_1l_{c2}^2g = 0.$$

つぎに、(10) 式に対して、次式

$$\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_2 = \beta_2(m_1l_1l_{c1} - m_1l_{c1}^2 - I_1)$$

から、

$$m_1l_1l_{c1} \geq m_1l_{c1}^2 + I_1 \quad (A1)$$

を証明すればよいことがわかる。

そこで、 z をリンク 1 のある点と原点の距離とし、 $\sigma(z)$ をその点の密度とすると、 l_{c1} は、関節 1(原点) からリンク 1 の重心までの長さであるため、つぎのように表わせる。

$$l_{c1} = \frac{1}{m_1} \int_0^{l_1} z\sigma(z)dz. \quad (A2)$$

また、 $m_1l_{c1}^2 + I_1$ は、原点に関する慣性モーメントであるため、

$$m_1l_{c1}^2 + I_1 = \int_0^{l_1} z^2\sigma(z)dz \leq l_1 \int_0^{l_1} z\sigma(z)dz = m_1l_1l_{c1}$$

を満たす。これで (A1) 式が証明できた。□

付録 B. 定理 2 の証明とその他

付録 B.1 準備

まず、(41)、(42) 式から $\ddot{q}_1$, $\dot{q}_1$ を消去する。(41) 式から

$$\ddot{q}_1 = -(\beta_1 \cos q_1 + \beta_2 \cos(q_1 + q_2^*)) / M_{11} \quad (B1)$$

を求めて、(42) 式に $\ddot{q}_1$ を代入すると、

$$\begin{aligned} & -\frac{M_{21}(q_2^*)}{M_{11}(q_2^*)} (\beta_1 \cos q_1 + \beta_2 \cos(q_1 + q_2^*)) \\ & + \alpha_3 q_1^2 \sin q_2^* + \beta_2 \cos(q_1 + q_2^*) = \tau_2^*. \end{aligned} \quad (B2)$$

が得られる。上式の時間微分を取り、(B1) 式を用いて整理すると次式が得られる。

$$\dot{q}_1(A(q_2^*) \sin q_1 + B(q_2^*) \cos q_1) = 0, \quad (B3)$$

ただし、

$$\begin{aligned} A(q_2^*) &= 3\alpha_3\beta_2 \cos^2 q_2^* - (\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_2) \cos q_2^* \\ &\quad - (\alpha_2\beta_1 + 2\alpha_3\beta_2), \end{aligned} \quad (B4)$$

$$B(q_2^*) = (3\alpha_3\beta_2 \cos q_2^* + 2\alpha_3\beta_1 + \alpha_1\beta_2) \sin q_2^*. \quad (B5)$$

(B3) 式をつぎのように書き直す。

$$\dot{q}_1(t) \sqrt{A^2(q_2^*) + B^2(q_2^*)} \sin(q_1(t) + \phi(q_2^*)) = 0, \quad (B6)$$

ただし、 $\phi(q_2^*)$ は $A(q_2^*)$ と $B(q_2^*)$ によって定まる定数である。さらに、(B6) 式を時間 t について積分をし、次式を得る。

$$\sqrt{A^2(q_2^*) + B^2(q_2^*)} \cos(q_1(t) + \phi(q_2^*)) = \text{a constant}. \quad (B7)$$

以下のことに注意する。もし、 $\sqrt{A^2(q_2^*) + B^2(q_2^*)} = 0$, すなわち、

$$A(q_2^*) = 0, \quad B(q_2^*) = 0 \quad (B8)$$

を満たす q_2^* が存在すれば、(B7) 式のみからは $\cos(q_1(t) + \phi(q_2^*))$ が定数、すなわち、 $q_1(t)$ が定数であることがいえない。

つぎの補題 B1 (証明は付録 B.3 を参照されたい) を示す。

[補題 B1] (B4) 式の $A(q_2^*)$ と (B5) 式の $B(q_2^*)$ に対して、(B8) 式を満たす q_2^* が存在するための必要十分条件は

$$(\alpha_1 - \alpha_3)\beta_2 = (\alpha_3 - \alpha_2)\beta_1 \quad (B9)$$

を満たすことである。このとき、以下の式が成り立つ。

$$\cos q_2^* = -1. \quad (B10)$$

付録 B.2 定理 2 の証明

背理法で証明する。\$q_1(t)\$ が定数でないと仮定すると、(B8) 式が成立する。補題 B1 より、Acrobot の機械パラメータが (B9) 式を満たし、なおかつ、\$q_2^*\$ が (B10) 式を満たす。(B2) 式の \$\tau_2^*\$ は、(B9)、(B10) 式を用いると、

$$\tau_2^* = \frac{(\alpha_3 - \alpha_2)\beta_1 - (\alpha_1 - \alpha_3)\beta_2}{\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3} \cos q_1 = 0 \quad (B11)$$

となる。これを (40) 式に入れると、\$q_2^* = 0\$ が成り立つ。これは (B10) 式に反する。したがって、\$q_1(t)\$ は定数となることが示せた。□

付録 B.3 補題 B1 の証明

まず、\$B(q_2^*) = 0\$ より、(B8) 式の解 \$q_2^*\$ (もし存在するとき) は以下の式の 1 つを満たす。

$$\cos q_2^* = -\alpha_0, \quad (B12)$$

$$\cos q_2^* = 1, \quad (B13)$$

$$\cos q_2^* = -1, \quad (B14)$$

ただし、\$\alpha_0 = (2\alpha_3\beta_1 + \alpha_1\beta_2)/(3\alpha_3\beta_2)\$。

つぎに、以下のことを示す。

- a) (B12) 式が成立するとき、(B8) 式が成立しない；
- b) (B13) 式が成立するとき、(B8) 式が成立しない；
- c) (B14) 式が成り立つとき、(B8) 式が成立するのは (B9) 式が成り立つときに限る。

はじめに、a) について、背理法で証明する。(B12) 式と (B8) 式が成り立つとすると、

$$\begin{cases} \alpha_0 \leq 1 \\ A|_{\cos q_2^* = -\alpha_0} = 0 \end{cases} \quad (B15)$$

が成り立つ。それを整理すると次式が得られる。

$$\begin{cases} \alpha_1 g + 2l_1\beta_1 \leq 3l_1\beta_2 \\ \alpha_2\beta_1 g + 2l_1\beta_2^2 = (\alpha_1 g + 2l_1\beta_1)\beta_1 \end{cases} \quad (B16)$$

上式の第 1 の不等式から、

$$l_{c2} \geq \frac{\alpha_1 g + 2l_1\beta_1}{3m_2 l_{1g}} \quad (B17)$$

を得る。ところで、(B16) 式から、\$\alpha_2 g \beta_1 + 2l_1 \beta_2^2 \leq 3l_1 \beta_1 \beta_2\$、すなわち、

$$(\alpha_2 g / \beta_2) \beta_1 + 2l_1 \beta_2 \leq 3l_1 \beta_1 \quad (B18)$$

が成り立つ。また、\$\alpha_2 g / \beta_2 = (m_2 l_{c2}^2 + I_2) / (m_2 l_{c2}) \geq l_{c2}\$ を用いると、(B18) 式からつぎの不等式が得られる。

$$l_{c2} \leq \frac{3l_1\beta_1}{\beta_1 + 2m_2 l_{1g}} \quad (B19)$$

よって、(B17) 式の右辺の項は (B19) 式の右辺の項より小さい。これを用いると、

$$\alpha_1 + 2m_2 l_{1g} \alpha_1 \frac{g}{\beta_1} + 2l_1 \frac{\beta_1}{g} \leq 5m_2 l_1^2 \quad (B20)$$

を得る。しかし、\$\alpha_1 > m_2 l_1^2\$ と

$$2m_2 l_{1g} \alpha_1 \frac{g}{\beta_1} + 2l_1 \frac{\beta_1}{g} \geq 4\sqrt{m_2 l_1^2 \alpha_1} > 4m_2 l_1^2$$

より、(B20) 式の左辺の項は \$5m_2 l_1^2\$ より大きい。これは矛盾で、a) が証明できた。

つぎに、b) について、(B13) 式が成立するとき、

$$A|_{\cos q_2^* = 1} = \alpha_3 \beta_2 + \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1 - \alpha_3 \beta_1 \quad (B21)$$

となる。補題 1 の (9)、(10) 式から、\$A|_{\cos q_2^* = 1} = \alpha_3 \beta_2 + \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1 - \alpha_3 \beta_1 < 0\$ が成り立ち、b) が証明できた。

最後に、c) について、(B8) 式が成り立つための必要十分条件は \$A|_{\cos q_2^* = -1} = 0\$、すなわち、(B9) 式が成り立つことである。□

付録 B.4 (B9) 式を満たす Acrobot の一例

以下の Acrobot の機械パラメータを考える。\$l_{c1} = l_1/2\$、\$I_1 = m_1 l_1^2/12\$、\$l_{c2} = l_2/2\$、\$I_2 = m_2 l_2^2/12\$。また、\$(\alpha_1 - \alpha_3)\beta_2 - (\alpha_3 - \alpha_2)\beta_1 = -m_1 m_2 l_1 l_2 (l_1 - (2 + m_2/m_1)l_2)g/12\$ より、\$l_1 = (2 + m_2/m_1)l_2\$ が成立すれば、(B9) 式が成立する。

付録 C. (55) 式の証明

(53) 式の \$\eta(q_2)\$ は偶関数であるため、\$q_2 > 0\$ のみを考えればよい。\$\Phi(q_2) \leq \beta_1 + \beta_2\$ が成り立ち、\$((2n-1)\pi, 2n\pi)\$ (\$n\$ は自然数) において \$\sin q_2 < 0\$ が成立するため、

$$\sup_{q_2 \neq 0} \eta(q_2) = \sup_n \left\{ \sup_{q_2 \in ((2n-1)\pi, 2n\pi)} \eta(q_2) \right\} = \sup_{q_2 \in (\pi, 2\pi)} \eta(q_2)$$

が成り立つ。また、(50) 式を用いて、(53) 式の \$\eta(q_2)\$ をつぎのように書き直す。

$$\eta(q_2) = \frac{(\beta_1 + \beta_2 - \Phi(q_2)) \cos(q_1 + q_2)}{\beta_1 q_2}.$$

さらに、\$\Phi(q_2) \geq |\beta_1 - \beta_2|\$ より、次式が得られる。

$$\begin{aligned} \sup_{q_2 \in (\pi, 2\pi)} \eta(q_2) &\leq \sup_{q_2 \in (\pi, 2\pi)} \frac{(\beta_1 + \beta_2 - \Phi(q_2))}{\beta_1 \pi} \\ &= \frac{\beta_1 + \beta_2 - |\beta_1 - \beta_2|}{\beta_1 \pi} = \frac{2}{\pi} \min \left(1, \frac{\beta_2}{\beta_1} \right). \end{aligned}$$

□

付録 D. (60) 式の証明

\$\xi(q_2)\$ が偶関数であるため、\$q_2 > 0\$ のみを考えればよい。\$[(2n-1)\pi, 2n\pi]\$ (\$n\$ は自然数) において \$\sin q_2 \leq 0\$ が成立するため、\$\xi(q_2) \leq 0\$ が成り立つ。また、\$\sup_{q_2 \in (2(n-1)\pi, (2n-1)\pi)} \xi(q_2)\$ が \$n\$ に対して単調減少であるため、\$\sup_{q_2 \neq 0} \xi(q_2) = \sup_{q_2 \in (0, \pi)} \xi(q_2)\$ が成立する。また、\$\lim_{q_2 \rightarrow 0} \xi(q_2) = 2\$ が成り立つため、(60) 式を証明するのに、\$(0, \pi)\$ において \$\xi(q_2) < 2\$ を証明すればよい。

つぎに、不等式 (証明は付録 D の最後を参照されたい)

$$4q_2(q_2 - \sin q_2) > (1 - \cos q_2)^2, \quad \forall q_2 \in (0, \pi) \quad (D1)$$

の両辺に $\Phi^2(q_2)$ をかけ、 $\Phi^2(q_2) \geq 2\beta_1\beta_2(1 + \cos q_2)$ を用いると、次式が成立する。

$$\begin{aligned}\Phi^2(q_2) \cdot 4q_2(q_2 - \sin q_2) &> 2\beta_1\beta_2(1 + \cos q_2) \cdot (1 - \cos q_2)^2 \\ &= 2\beta_1\beta_2(1 - \cos q_2) \sin^2 q_2.\end{aligned}$$

上式の両辺に $\Phi^2(q_2) \sin^2 q_2$ を足して平方完成すると、

$$\Phi^2(q_2)(2q_2 - \sin q_2)^2 > (\beta_1 + \beta_2)^2 \sin^2 q_2$$

が得られる。(0, π) において $q_2 > \sin q_2 > 0$ が成立するため、 $\Phi(q_2)(2q_2 - \sin q_2) > (\beta_1 + \beta_2) \sin q_2$ 。よって、 $\xi(q_2) < 2$ が成り立つことがいえる。□

(D1) 式の証明. $y(q_2) = 4q_2(q_2 - \sin q_2) - (1 - \cos q_2)^2$ とし、 $q_2 \in (0, \pi/2]$, $q_2 \in (\pi/2, 2\pi/3]$, $q_2 \in (2\pi/3, \pi)$ に対して、(D1) 式を証明する。

i). $q_2 \in (0, \pi/2]$ のとき、 y' , y'' and y''' を計算する。

$$y' = 8q_2 - 6\sin q_2 - 4q_2 \cos q_2 + \sin 2q_2,$$

$$y'' = 8 - 10\cos q_2 + 4q_2 \sin q_2 + 2\cos 2q_2,$$

$$y''' = 14\sin q_2 + 4q_2 \cos q_2 - 8\sin q_2 \cos q_2.$$

$y''' > 6\sin q_2 + 4q_2 \cos q_2 > 0$ が成り立つため、 $y''|_{q_2=0} = 0$ を用いると、 $y''(q_2) > 0$ が得られる。これと $y'|_{q_2=0} = 0$ より、 $y'(q_2) > 0$ をえる。さらに、 $y|_{q_2=0} = 0$ より、 $y(q_2) > 0$ が成り立つことがわかる。

ii). $q_2 \in (\pi/2, 2\pi/3]$ のとき、 $0 < \sin q_2 < 1$, $1 < 1 - \cos q_2 \leq 3/2$ を用いると、 $y(q_2) > 4q_2^2 - 4q_2 - 9/4$ が得られる。 $q_2 > (2 + \sqrt{13})/4 = 1.4013 (< \pi/2)$ ならば、 $4q_2^2 - 4q_2 - 9/4 > 0$ が成立するため、 $q_2 \in (\pi/2, 2\pi/3]$ において $y(q_2) > 0$ が成り立つ。

iii). $q_2 \in (2\pi/3, \pi)$ のとき、 $q_2 - \sin q_2 > 1$, $1 - \cos q_2 < 2$ より、 $y(q_2) > 4 \cdot 2\pi/3 - 4 > 0$ が得られる。□

参考文献

- 1) M.D. Berkemeier and R.S. Fearing: Tracking fast inverted trajectories of the underactuated Acrobot, *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, **15**-4, 740/750 (1999)
- 2) I. Fantoni, R. Lozano and M.W. Spong: Energy based control of the Pendubot, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **45**-4, 725/729 (2000)
- 3) I. Fantoni and R. Lozano: *Non-linear Control for Underactuated Mechanical Systems*. Springer, Berlin (2002)
- 4) J. Hauser and R.M. Murray: Nonlinear controllers for non-integrable systems: the Acrobot example, *Proceedings of American Control Conference*, 669/670 (1990)
- 5) H.K. Khalil: *Nonlinear Systems*, third edition. Prentice-Hall, New Jersey (2002)
- 6) O. Kolesnichenko and A.S. Shiriaev: Partial stabilization of underactuated Euler-Lagrange systems via a class of feedback transformations, *Systems & Control Letters*, **45**-2, 121/132 (2002)
- 7) X.Z. Lai, J.H. She, Y. Ohyama and Z.X. Cai: A fuzzy control strategy for acrobots combining model-free and model-based control, *IEE Proceedings -Control Theory and Applications*, **146**-6, 505/510 (1999)
- 8) I. Kolmanovsky and N.H. McClamroch: Developments in nonholonomic control problems, *IEEE Control Systems Magazine*, **15**-6, 20/36 (1995)

- 9) 俣野 博: 岩波講座応用数学 7—微分方程式 1, 岩波書店 (1993)
- 10) 美多 勉: 非線形制御入門—劣駆動ロボットの技能制御論—, 昭晃堂 (2000)
- 11) R. Ortega, M.W. Spong, F. Gomez-Estern and G. Blankenstein: Stabilization of a class of underactuated mechanical systems via interconnection and damping assignment, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **47**-8, 1218/1233 (2002)
- 12) M. Reyhanoglu, A. van der Schaft, N.H. McClamroch and I. Kolmanovsky: Dynamics and control of a class of underactuated mechanical systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **44**-9, 1663/1671 (1999)
- 13) S. Sastry: *Nonlinear Systems: Analysis, Stability, and Control*. Springer, New York (1999)
- 14) M.W. Spong and D.J. Block: The Pendubot: a mechatronic system for control research and education, *Proceedings of the 34th IEEE Conference on Decision and Control*, 555/556 (1995)
- 15) M.W. Spong: The swing up control problem for the Acrobot, *IEEE Control Systems Magazine*, **15**-1, 49/55 (1995)
- 16) M.W. Spong: Energy based control of a class of underactuated mechanical systems, *Proceedings of 1996 IFAC World Congress*, **F**, 431/435 (1996)
- 17) 杉江, 藤田: フィードバック制御入門, コロナ (1999)
- 18) X. Xin and M. Kaneda: The swing up control for the Acrobot based on energy control approach, *Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control*, 3261/3266 (2002)
- 19) X. Xin and M. Kaneda: New analytical results of the energy based swinging up control of the Acrobot, *Proceedings of the 43rd IEEE Conference on Decision and Control*, 704/709 (2004)

[著者紹介]

忻

欣 (正会員)

1965年8月6日生。87年中国科学技术大学卒業、1993年東南大学大学院自動制御理論および応用専攻博士課程修了、工学博士。2000年東京工業大学博士(工学)の学位取得。その間、91-93年大阪大学留学。95年東南大学助教授、96年東京工業大学 NEDO 派遣研究員、97年同助手を経て、2000年岡山県立大学助教授となり、現在に至る。2004年度制御部門大会賞受賞。非線形制御、ロボスト制御、ロボット工学に関する教育研究に従事、IEEEなどの会員。

兼 田 雅 弘 (正会員)

1943年3月27日生。70年京都大学大学院工学研究科博士課程(電子工学専攻)修了。同年岡山大学工学部専任講師。83年詫間電波工業高等専門学校助教授。86年同教授。93年岡山県立大学情報工学部教授となり、現在に至る。制御理論、制御系設計の高度化と知能化に関する研究に従事。最近、非線形システムの制御に興味をもつ。工学博士。システム制御情報学会、電子情報通信学会、IEEEなどの会員。