二次差分形式に基づく離散時間システムに対する 一般化 Lyapunov 安定定理

小 島 千 昭*・鷹 羽 浄 嗣*

A Generalized Lyapunov Stability Theorem for Discrete-time Systems
Based on Quadratic Difference Forms

Chiaki KOJIMA* and Kiyotsugu TAKABA*

In this paper, we consider the generalized Lyapunov stability analysis for a discrete-time system described by a high order difference-algebraic equation. In the behavioral approach, a Lyapunov function is characterized in terms of a quadratic difference form. As a main result, we derive a generalized Lyapunov stability theorem that the asymptotic stability of a behavior is equivalent to the solvability of the two-variable polynomial Lyapunov equation (TVPLE) whose solution induces the Lyapunov function. Moreover, we derive another asymptotic stability condition by using a polynomial matrix solution of the one-variable dipolynomial Lyapunov equation which is reduced from the TVPLE.

Key Words: Lyapunov stability theory, behavioral approach, quadratic difference form, polynomial matrix

1. はじめに

Lyapunov 安定理論は、動的システムの安定性解析において重要な役割を果たす。本論文では、高階の差分代数方程式で表わされる線形離散時間時不変システムに対する一般化 Lyapunov 安定解析を行ない、状態空間表現に基づく Lyapunov 安定理論の拡張を行なう。その結果、一般化 Lyapunov 安定定理を導出して、ビヘイビアの漸近安定性に対する必要十分条件を与える。

ビヘイビアアプローチにおいて、二次微分/差分形式 (quadratic differential/difference form; QDF) は、蓄積関数、供給率、Lyapunov 関数などの二次汎関数の表現に用いられ、消散性理論や安定性理論において重要な役割を果たす^{5), 11)}。QDF は、2 変数多項式行列と一対一に対応付けられるので、消散性や安定性の解析のための代数的ツールとして有用である。

Willems, Trentelman¹¹⁾ は QDF に基づいて連続時間システムに対する一般化 Lyapunov 安定定理を導出した。その定理においては、Lyapunov 関数は QDF を用いて記述され、2 変数多項式 Lyapunov 方程式 (two-variable polyno-

mial Lyapunov equation; TVPLE) の解から得られる。文献 11) では、TVPLE から 1 変数の多項式 Lyapunov 方程式 (polynomial Lyapunov equation; PLE) を導出して、その解を用いて TVPLE の解を構成する。また、一般化 Lyapunov 安定定理に基づいて、Kaneko, Fujii⁴⁾ と Cotroneo, Willems¹⁾ は、TVPLE から構成される線形行列不等式による漸近安定性のための必要十分条件を導出した。さらに、Peeters, Rapisarda⁷⁾ は、Faddeev の方法を用いて PLE の数式処理に基づく解法も与えた。

一方で、離散時間システムにおいては、QDF に基づく一般化 Lyapunov 安定解析はこれまで研究されていない。本論文では、離散時間システムに対する一般化 Lyapunov 安定定理を与える。離散時間システムの場合では、PLE に対応する方程式が、双多項式 (dipolynomial) 方程式となる。PLE には、2 変数多項式ではなく 1 変数多項式を用いることにより、安定定理の証明が簡単になるという利点がある。しかし、双多項式方程式は負のべきの項も許すために、双多項式方程式を用いた証明には上記の利点が存在しない。そこで、本論文では、TVPLE のみに基づいて安定定理の証明を完結させる。また、状態空間方程式に基づく Lyapunov 安定定理および Jury の安定判別法との関連も説明する。さらに、文献 11) に対応する結果として、この双多項式方程式の多項式行列解を用いた漸近安定性のための必要十分条件を導出する。

本論文で用いる記号を以下にまとめる。

$\mathbf{R}_s^{q \times q}$: $q \times q$ 実対称行列の集合

* 京都大学大学院情報学研究科数理工学専攻
京都市左京区吉田本町

* Department of Applied Mathematics and Physics, Graduate School of Informatics, Kyoto University, Yoshida-Honmachi, Sakyo-ku, Kyoto
(Received April 11, 2005)
(Revised January 13, 2006)

$\mathbf{R}[\xi]$: 実係数多項式の集合

$\mathbf{R}^{p \times q}[\xi]$: $p \times q$ 変数多項式行列の集合

$\mathbf{R}[\zeta, \eta]$: 実係数 2 変数多項式の集合

$\mathbf{R}^{p \times q}[\zeta, \eta]$: $p \times q$ 2 変数多項式行列の集合

$\mathbf{R}_s^{q \times q}[\zeta, \eta]$: $q \times q$ 対称 2 変数多項式行列の集合

$\mathbf{R}[\xi^{-1}, \xi]$: 双多項式の集合

$\mathbf{R}^{p \times q}[\xi^{-1}, \xi]$: $p \times q$ 双多項式行列の集合

$\mathbf{W}^T$: 集合 $\mathbf{T}$ から $\mathbf{W}$ への写像の集合

$R(\xi)^{\sim} := R(\xi^{-1})^T$

$\text{col}(A_1, A_2, \dots, A_n) := [A_1^T \ A_2^T \ \dots \ A_n^T]^T$

$\text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_q)$: $\{a_1, a_2, \dots, a_q\}$ を対角成分とする $q \times q$ 対角行列

rank: 行列の階数. ただし, 多項式行列 $R(\xi)$ に対しては, rank R は多項式行列の階数を表わし, rank $R(\lambda)$ は $\xi = \lambda$ ($\lambda \in \mathbf{C}$) を代入した定数行列 $R(\lambda)$ の階数を表わす.

2. ビヘイビアアプローチの準備

本節では, 本論文で必要となるビヘイビアシステム理論の基本事項を概観する.

2.1 線形離散時間システム

ビヘイビアシステム理論において動的システムは, 三つの集合の組 $\Sigma = (\mathbf{T}, \mathbf{W}, \mathcal{B})$ によって定義される. ここに, $\mathbf{T}$ は時間軸であり, $\mathbf{W}$ はシステムの変数とその値をとる信号空間である. そして, ビヘイビア $\mathcal{B} \subseteq \mathbf{W}^T$ は, システムの変数が取りうる軌道の集合である. 本論文では, 線形時不変離散時間システムを考えるので, 時間軸は $\mathbf{T} = \mathbf{Z}$ であり, 信号空間は $\mathbf{W} = \mathbf{R}^q$ となる. このような Σ は, 線形差分代数方程式

$$R_0 w(t) + R_1 w(t+1) + \dots + R_L w(t+L) = 0 \quad (1)$$

によって表現される. ただし, $R_i \in \mathbf{R}^{p \times q}$ ($i = 0, 1, \dots, L$) かつ $L \geq 0$ である. 変数 $w \in (\mathbf{R}^q)^{\mathbf{Z}}$ は, manifest 変数と呼ばれる. 表現 (1) を $\mathcal{B}$ の kernel 表現といい,

$$\begin{aligned} R(\sigma)w &= 0, \\ R(\xi) &:= R_0 + R_1 \xi + \dots + R_L \xi^L \in \mathbf{R}^{p \times q}[\xi] \end{aligned} \quad (2)$$

と略記する. 作用素 σ は, シフト作用素であり, $(\sigma w)(t) := w(t+1)$ と $(\sigma^T w)(t) := w(t+T)$, $\forall T \in \mathbf{Z}$ によって定義される. このとき, ビヘイビアは,

$$\mathcal{B} = \{w \in (\mathbf{R}^q)^{\mathbf{Z}} \mid R(\sigma)w = 0\} \quad (3)$$

によって与えられる.

補助変数 ℓ をもつ方程式

$$A(\sigma)\ell = 0, \quad w = C(\sigma)\ell \quad (4)$$

を考える. ただし, $A \in \mathbf{R}^{p \times m}[\xi]$ かつ $C \in \mathbf{R}^{q \times m}[\xi]$ である. また, $\ell \in (\mathbf{R}^m)^{\mathbf{Z}}$ を $\mathcal{B}$ の latent 変数という. 次式が成り立つとき, (4) 式は $\mathcal{B}$ の latent 変数表現であるという.

$$\mathcal{B} = \{w \in (\mathbf{R}^q)^{\mathbf{Z}} \mid \exists \ell \in (\mathbf{R}^m)^{\mathbf{Z}} \text{ s.t. (4)}\}$$

また,

$$\{A(\sigma)\ell = 0 \text{ かつ } w = C(\sigma)\ell = 0\} \implies \ell = 0$$

が成り立つとき, latent 変数 ℓ は w から可観測であるという. Latent 変数 ℓ が w から可観測であるための必要十分条件は, 任意の $\lambda \in \mathbf{C}$ に対して定数行列 $\text{col}(A(\lambda), C(\lambda))$ がフルランクとなることである¹⁰⁾. このとき, 対 $(A(\xi), C(\xi))$ は可観測であるという.

2.2 二次差分形式

2 変数多項式行列

$$\Phi(\zeta, \eta) = \sum_{i=0}^{N_1} \sum_{j=0}^{N_2} \Phi_{ij} \zeta^i \eta^j \in \mathbf{R}^{q_1 \times q_2}[\zeta, \eta]$$

を考える. ただし, $\Phi_{ij} \in \mathbf{R}^{q_1 \times q_2}$ ($i = 0, 1, \dots, N_1; j = 0, 1, \dots, N_2$) かつ $N_1, N_2 \geq 0$ である.

2 変数多項式行列と双多項式行列を関連づける写像 ∂ を,

$$\partial: \mathbf{R}^{q_1 \times q_2}[\zeta, \eta] \rightarrow \mathbf{R}^{q_1 \times q_2}[\xi^{-1}, \xi], \quad \partial\Phi(\xi) := \Phi(\xi^{-1}, \xi)$$

によって定義する.

ここで, $q_1 = q_2 =: q$, $N_1 = N_2 =: N$ かつ $\Phi(\zeta, \eta)^T = \Phi(\eta, \zeta)$ が成り立つとき, $\Phi(\zeta, \eta)$ は対称であるという. このとき, $\Phi(\zeta, \eta)$ は, 二次差分形式 (quadratic difference form; QDF)

$$Q_\Phi: (\mathbf{R}^q)^{\mathbf{Z}} \rightarrow \mathbf{R}^{\mathbf{Z}},$$

$$Q_\Phi(\ell)(t) := \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \ell(t+i)^T \Phi_{ij} \ell(t+j)$$

を誘導する. QDF において, ζ と η は, それぞれ $\ell(t)^T$ と $\ell(t)$ に対するシフトに対応する. QDF $Q_\Phi(\ell)(t)$ の変化率

$$\nabla Q_\Phi(\ell)(t) := Q_\Phi(\ell)(t+1) - Q_\Phi(\ell)(t)$$

もまた QDF である. QDF $\nabla Q_\Phi(\ell)(t)$ を誘導する 2 変数多項式行列を, $\nabla\Phi \in \mathbf{R}_s^{q \times q}[\zeta, \eta]$ とする. すなわち, $\nabla Q_\Phi(\ell)(t) = Q_{\nabla\Phi}(\ell)(t)$ である. このとき, $\nabla\Phi(\zeta, \eta) = (\zeta\eta - 1)\Phi(\zeta, \eta)$ によって与えられる.

任意の $\ell \in (\mathbf{R}^q)^{\mathbf{Z}}$ と $t \in \mathbf{Z}$ に対して $Q_\Phi(\ell)(t) \geq 0$ が成り立つとき, $\Phi(\zeta, \eta)$ は非負定値であるといい, $\Phi \geq 0$ と記す. さらに, $\Phi(\zeta, \eta)$ が正定値であるとは, $\Phi \geq 0$ かつ $\{Q_\Phi(\ell) = 0 \implies \ell = 0\}$ が成り立つことをいい, $\Phi > 0$ と記す. 不等式 $\Phi \geq 0$ は, $D \in \mathbf{R}^{s \times q}[\xi]$ が存在して, $\Phi(\zeta, \eta) = D(\zeta)^T D(\eta)$ が成り立つことに等価である¹¹⁾.

[補題 1]⁵⁾ 2 変数多項式行列 $\Phi \in \mathbf{R}_s^{q \times q}[\zeta, \eta]$ に対して, つぎの (i) と (ii) は同値である.

(i) ある 2 変数多項式行列 $\Psi \in \mathbf{R}_s^{q \times q}[\zeta, \eta]$ が存在して, $\nabla\Psi(\zeta, \eta) = \Phi(\zeta, \eta)$, 等価的に任意の $t \in \mathbf{Z}$ と $\ell \in (\mathbf{R}^q)^{\mathbf{Z}}$ に対して, $\nabla Q_\Psi(\ell)(t) = Q_\Phi(\ell)(t)$ が成り立つ.

(ii) 任意の $\xi \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ に対して, $\partial\Phi(\xi) = 0$ が成り立つ. 2 変数多項式行列 $\Phi(\zeta, \eta)$ が $\mathcal{B}$ に沿って非負定値であるとは, 任意の $w \in \mathcal{B}$ と $t \in \mathbf{Z}$ に対して $Q_\Phi(w)(t) \geq 0$ が成り立つことをいい, $\Phi \stackrel{\mathcal{B}}{\geq} 0$ と記す. さらに, $\Phi \stackrel{\mathcal{B}}{\geq} 0$ かつ $\{Q_\Phi(w) = 0 \implies w = 0\}$ が成り立つとき, $\Phi(\zeta, \eta)$ は $\mathcal{B}$ に沿って正定値であるといい, $\Phi \stackrel{\mathcal{B}}{>} 0$ と記す.

2.3 多項式行列のビヘイビア上の同値関係

多項式行列のビヘイビア B に関する同値関係を導入する。

[定義 1]¹¹⁾

(i) 多項式行列 $D_1 \in \mathbf{R}^{p \times q}[\xi]$ と $D_2 \in \mathbf{R}^{p \times q}[\xi]$ が B に関して同値であるとは, $D_1(\sigma)w = D_2(\sigma)w, \forall w \in B, t \in \mathbf{Z}$ が成り立つことをいい, $D_1 \stackrel{B}{=} D_2$ と記す。

(ii) 2変数多項式行列 $\Phi_1 \in \mathbf{R}_s^{q \times q}[\zeta, \eta]$ と $\Phi_2 \in \mathbf{R}_s^{q \times q}[\zeta, \eta]$ が B に関して同値であるとは, $Q_{\Phi_1}(w) = Q_{\Phi_2}(w), \forall w \in B, t \in \mathbf{Z}$ が成り立つことをいい, $\Phi_1 \stackrel{B}{=} \Phi_2$ と記す。

ビヘイビア B に関する同値関係を, その kernel 表現を誘導する多項式行列 $R \in \mathbf{R}^{p \times q}[\xi]$ を用いて特徴付ける。

[補題 2]¹¹⁾

(i) 多項式行列 $D_1, D_2 \in \mathbf{R}^{p \times q}[\xi]$ に対して, $D_1 \stackrel{B}{=} D_2$ が成り立つための必要十分条件は, ある $F \in \mathbf{R}^{p \times p}[\xi]$ が存在して, $D_1(\xi) - D_2(\xi) = F(\xi)R(\xi)$ が成り立つことである。

(ii) 2変数多項式行列 $\Phi_1, \Phi_2 \in \mathbf{R}_s^{q \times q}[\zeta, \eta]$ に対して, $\Phi_1 \stackrel{B}{=} \Phi_2$ が成り立つための必要十分条件は, ある $G \in \mathbf{R}^{p \times q}[\zeta, \eta]$ が存在して,

$$\Phi_2(\zeta, \eta) = \Phi_1(\zeta, \eta) + R(\zeta)^T G(\zeta, \eta) + G(\eta, \zeta)^T R(\eta)$$

が成り立つことである。

つぎの補題 3 は, $\Phi(\zeta, \eta)$ の B に沿った非負定値性と正定値性のための必要十分条件を与える。

[補題 3]¹¹⁾

(i) 不等式 $\Phi \stackrel{B}{\geq} 0$ が成り立つための必要十分条件は, ある $\Phi' \in \mathbf{R}_s^{q \times q}[\zeta, \eta]$ と $D \in \mathbf{R}^{q \times q}[\xi]$ が存在して, $\Phi \stackrel{B}{=} \Phi'$ かつ $\Phi'(\zeta, \eta) = D(\zeta)^T D(\eta)$ が成り立つことである。

(ii) 不等式 $\Phi \stackrel{B}{>} 0$ が成り立つための必要十分条件は, ある $\Phi' \in \mathbf{R}_s^{q \times q}[\zeta, \eta]$ と $D \in \mathbf{R}^{q \times q}[\xi]$ が存在して, $\Phi \stackrel{B}{=} \Phi'$, $\Phi'(\zeta, \eta) = D(\zeta)^T D(\eta)$ かつ $(R(\xi), D(\xi))$ が可観測となることである。

2.4 R -正準多項式行列

ビヘイビア B の kernel 表現が正方かつ正則な多項式行列 $R \in \mathbf{R}^{q \times q}[\xi]$ によって誘導される場合に限定する。

[定義 2]¹¹⁾

(i) 多項式行列 $D \in \mathbf{R}^{q \times q}[\xi]$ が R -正準であるとは, $D(\xi)R(\xi)^{-1}$ が厳密にプロパーとなることをいう。

(ii) 2変数多項式行列 $\Phi \in \mathbf{R}_s^{q \times q}[\zeta, \eta]$ が R -正準であるとは, $R(\zeta)^{-T} \Phi(\zeta, \eta) R(\eta)^{-1}$ が (2変数有理関数の意味で) 厳密にプロパーとなることをいう。

与えられた多項式行列と B に関して同値な R -正準多項式行列は, 一意に決まる。

[補題 4]¹¹⁾ 任意の 2変数多項式行列 $\Phi \in \mathbf{R}_s^{q \times q}[\zeta, \eta]$ に対して, B に関して同値な R -正準 2変数多項式行列 $\Phi' \in \mathbf{R}_s^{q \times q}[\zeta, \eta]$ が, 一意に存在する。

[補題 5]¹¹⁾ 2変数多項式行列 $\Phi \in \mathbf{R}_s^{q \times q}[\zeta, \eta]$ は R -正準であるとする。このとき, つぎの (i) と (ii) が, 成り立つ。

(i) 不等式 $\Phi \stackrel{B}{\geq} 0$ が成り立つための必要十分条件は, $\Phi \geq 0$

が成り立つことである。

(ii) 不等式 $\Phi \stackrel{B}{>} 0$ が成り立つための必要十分条件は, ある多項式行列 $D \in \mathbf{R}^{q \times q}[\xi]$ が存在して, $\Phi(\zeta, \eta) = D(\zeta)^T D(\eta)$ かつ $(R(\xi), D(\xi))$ が可観測となることである。このような $D(\xi)$ は R -正準である。

3. 一般化 Lyapunov 安定定理

本節では, QDF に基づいて一般化 Lyapunov 安定定理を与える。以下では, システムは $\Sigma = (\mathbf{Z}, \mathbf{R}^q, B)$ で与えられるとする。ビヘイビア B の自律性と漸近安定性を定義する。

[定義 3]⁸⁾

(i) ビヘイビア B が自律的であるとは, $w_1, w_2 \in B$ に対して $\{w_1(t) = w_2(t), \forall t < 0\}$ ならば $w_1 = w_2$ が成り立つことをいう。

(ii) ビヘイビア B が漸近安定であるとは,

$$w \in B \implies \lim_{t \rightarrow \infty} w(t) = 0$$

が成り立つことをいう。

上の定義より, B が自律的でないならば, $w \in B$ の中に任意の軌道を取ることができる変数すなわち外部入力が存在する。そのような場合には外部入力の軌道を適当に選ぶことにより $\|w(t)\|$ ($w \in B$) を非有界にすることができるので, B が漸近安定であるためには自律性が成り立たなくてはならないことがわかる。

多項式行列 $R \in \mathbf{R}^{p \times q}[\xi]$ は B の kernel 表現を誘導するとする。多項式行列の零点とその Schur 性の定義を与える。

[定義 4]^{6), 11)}

(i) 複素数 $\lambda \in \mathbf{C}$ が $R(\xi)$ の零点であるとは, $\text{rank } R(\lambda) < \text{rank } R$ が成り立つことである。

(ii) 多項式行列 $R(\xi)$ が Schur であるとは, $\text{rank } R = q$ かつ $R(\xi)$ がすべての零点を単位円の内部にもつことである。

(3) 式で与えられる B が自律的であるための必要十分条件は $\text{rank } R = q$ である¹⁰⁾。ビヘイビア B の漸近安定性の必要十分条件を $R(\xi)$ の零点を用いて与える。

[補題 6]⁶⁾ (3) 式で与えられるビヘイビア B が漸近安定であるための必要十分条件は, $R(\xi)$ が Schur となることである。

補題 3(ii) および補題 6 より, 文献 11) と同様の方法によって, つぎの補題 7 を得る。その結果, ビヘイビアが漸近安定であるための十分条件を与える。

[補題 7] ある 2変数多項式行列 $\Psi \in \mathbf{R}_s^{q \times q}[\zeta, \eta]$ が存在して, 不等式

$$\Psi \stackrel{B}{\geq} 0 \text{ かつ } \nabla \Psi \stackrel{B}{<} 0 \quad (5)$$

が成り立つとき, ビヘイビア B は漸近安定である。

補題 7 の (5) 式を満たす QDF $Q_\Psi(w)$ を B に対する Lyapunov 関数という。

(補題 7 の証明) 補題 3(ii) より, $\nabla \Psi \stackrel{B}{<} 0$ は, ある $D \in \mathbf{R}^{q \times q}[\xi]$ が存在して, $(R(\xi), D(\xi))$ が可観測かつ

$$\nabla \Psi(\zeta, \eta) \stackrel{B}{=} -D(\zeta)^T D(\eta) \quad (6)$$

が成り立つことに等価である。さらに、 $\nabla \Psi(\zeta, \eta)$ の定義を用いると、

$$Q_{\Psi}(w)(t+1) - Q_{\Psi}(w)(t) = \nabla Q_{\Psi}(w)(t) \quad (7)$$

となる。(7) 式を $t=0$ から $t=T$ まで和をとり、(6) 式を代入すると、

$$\begin{aligned} Q_{\Psi}(w)(T+1) - Q_{\Psi}(w)(0) &= \sum_{t=0}^T \nabla Q_{\Psi}(w)(t) \\ &= - \sum_{t=0}^T \|(D(\sigma)w)(t)\|^2 \end{aligned}$$

がしたがう。不等式 $\Psi \stackrel{B}{\geq} 0$ から $Q_{\Psi}(w)(T+1) \geq 0$ であるので、次式が成り立つ。

$$\sum_{t=0}^T \|(D(\sigma)w)(t)\|^2 \leq Q_{\Psi}(w)(0)$$

ここで、 $Q_{\Psi}(w)(0) < \infty$ かつ T は任意であるから

$$\sum_{t=0}^{\infty} \|(D(\sigma)w)(t)\|^2 < \infty \quad (8)$$

を得る。

いま、 $\lambda \in \mathbf{C}$ を $R(\xi)$ の零点とする。このとき、ある非零ベクトル $a \in \mathbf{C}^q$ が存在して、 $R(\lambda)a = 0$ が成り立つ。さらに、 $w(t) = a\lambda^t$ は、 $R(\sigma)w = 0$ を満たす。この $w(t)$ に対して $(D(\sigma)w)(t) = D(\lambda)a\lambda^t$ であるから、

$$\sum_{t=0}^{\infty} \|(D(\sigma)w)(t)\|^2 = \|D(\lambda)a\|^2 \sum_{t=0}^{\infty} |\lambda|^{2t}$$

が成り立つ。よって、(8) 式が成り立つためには、 $|\lambda| < 1$ または $\|D(\lambda)a\| = 0$ となることが必要十分である。方程式 $\|D(\lambda)a\| = 0$ が成り立つとき、 $(R(\xi), D(\xi))$ の可観測性を用いると、次式がしたがう。

$$\{R(\lambda)a = 0 \text{ かつ } D(\lambda)a = 0\} \implies a = 0$$

しかし、 $a = 0$ は仮定に矛盾するので、 $|\lambda| < 1$ が成り立つ。補題 6 より、このことは B の漸近安定性に等価である。□

ビヘイビア B の漸近安定性に対する必要条件を導くために、その漸近安定性を仮定して、Lyapunov 関数の構成方法を与える。

ビヘイビア B は漸近安定であると仮定する。また、 $\Phi \in \mathbf{R}_s^{q \times q}[\zeta, \eta]$ を、 $\Phi \stackrel{B}{<} 0$ を満たす任意の 2 変数多項式行列とする。このとき、 $\Psi \in \mathbf{R}_s^{q \times q}[\zeta, \eta]$ と $Y \in \mathbf{R}^{p \times q}[\zeta, \eta]$ を未知変数とする 2 変数多項式行列方程式

$$\nabla \Psi(\zeta, \eta) = \Phi(\zeta, \eta) - Y(\eta, \zeta)^T R(\eta) - R(\zeta)^T Y(\zeta, \eta) \quad (9)$$

を考える。この方程式を 2 変数多項式 Lyapunov 方程式 (two-variable polynomial Lyapunov equation; TVPLE) という。補題 2(ii) と補題 3(ii) より、TVPLE (9) の解 $\Psi(\zeta, \eta)$ と $Y(\zeta, \eta)$ に対して

$$\nabla \Psi \stackrel{B}{=} \Phi \stackrel{B}{<} 0 \quad (10)$$

が成り立つ。したがって、TVPLE (9) を満たす $\Psi(\zeta, \eta)$ の中で $\Psi \stackrel{B}{\geq} 0$ なるものを得ることができれば、それは B に対する Lyapunov 関数を誘導する。

[補題 8] ビヘイビア B は漸近安定であると仮定する。また、 $\Phi \in \mathbf{R}_s^{q \times q}[\zeta, \eta]$ を、 $\Phi \stackrel{B}{<} 0$ を満たす任意の 2 変数多項式行列とする。このとき、ある $\Psi \in \mathbf{R}_s^{q \times q}[\zeta, \eta]$ と $Y \in \mathbf{R}^{p \times q}[\zeta, \eta]$ が存在して、TVPLE (9) を満たす。さらに、 $\Psi \stackrel{B}{\geq} 0$ が成り立つ。

(証明) はじめに、TVPLE (9) の可解性を示す。その準備として、ユニモジュラ行列 $U \in \mathbf{R}^{p \times p}[\xi]$ 、 $V \in \mathbf{R}^{q \times q}[\xi]$ が存在して、 $R(\xi)$ を Smith 正準形

$$R(\xi) = U(\xi) \begin{bmatrix} R'(\xi) \\ 0_{(p-q) \times q} \end{bmatrix} V(\xi)$$

に変換できる³⁾。ただし、 $R' \in \mathbf{R}_s^{q \times q}[\xi]$ は、次式で与えられる対角行列である。

$$\begin{aligned} R'(\xi) &= \text{diag}(r_1(\xi), r_2(\xi), \dots, r_q(\xi)), \\ r_i &\in \mathbf{R}[\xi] \quad (i = 1, 2, \dots, q) \end{aligned} \quad (11)$$

よって、 $R(\xi) = R'(\xi)$ と置き直して証明しても一般性を失わない。このとき、(9) 式は、 q^2 個のスカラー方程式に帰着できる。その第 (i, j) 成分は、 $i, j = 1, 2, \dots, q$ に対して

$$\begin{aligned} (\zeta\eta - 1)\psi_{ij}(\zeta, \eta) \\ = \phi_{ij}(\zeta, \eta) - y_{ji}(\eta, \zeta)r_j(\eta) - r_i(\zeta)y_{ij}(\zeta, \eta) \end{aligned} \quad (12)$$

と記述される。ただし、 $\psi_{ij}, \phi_{ij}, y_{ij} \in \mathbf{R}[\zeta, \eta]$ は、それぞれ $\Psi(\zeta, \eta)$ 、 $\Phi(\zeta, \eta)$ 、 $Y(\zeta, \eta)$ の第 (i, j) 成分である。よって、(12) 式を満たす $\psi_{ij}(\zeta, \eta)$ 、 $y_{ij}(\zeta, \eta)$ と $y_{ji}(\eta, \zeta)$ の存在を示せばよい。ビヘイビア B は漸近安定であるので、補題 6 から、 $R(\xi)$ は Schur である。よって、 $r_i(\xi)$ と $r_j(\xi)$ はともに Schur となり、 $r_i(\zeta)$ 、 $r_j(\eta)$ と $\zeta\eta - 1$ は、2 変数多項式の意味で共通の零点をもたない。よって、補題 A より、ある $\hat{\psi}_{ij}, \hat{y}_{ij}, \hat{y}_{ji} \in \mathbf{R}[\zeta, \eta]$ が存在して、

$$\hat{\psi}_{ij}(\zeta, \eta)(\zeta\eta - 1) + \hat{y}_{ij}(\zeta, \eta)r_i(\zeta) + \hat{y}_{ji}(\eta, \zeta)r_j(\eta) = 1$$

が成り立つ。上式の両辺に $\phi_{ij}(\zeta, \eta)$ を乗じると、 $\psi_{ij}(\zeta, \eta) := \phi_{ij}(\zeta, \eta)\hat{\psi}_{ij}(\zeta, \eta)$ 、 $y_{ij}(\zeta, \eta) := \phi_{ij}(\zeta, \eta)\hat{y}_{ij}(\zeta, \eta)$ および $y_{ji}(\eta, \zeta) := \phi_{ij}(\zeta, \eta)\hat{y}_{ji}(\eta, \zeta)$ は、(12) 式を満たす。

つぎに、 $\Psi \stackrel{B}{\geq} 0$ を証明する。(10) 式は、

$$Q_{\Psi}(w)(t+1) - Q_{\Psi}(w)(t) = Q_{\Phi}(w)(t)$$

に等価である。上式を $t=0$ から $t=T$ までの和をとると、

$$Q_{\Psi}(w)(T+1) - Q_{\Psi}(w)(0) = \sum_{t=0}^T Q_{\Phi}(w)(t)$$

を得る。上の方程式で $T \rightarrow \infty$ とすれば、 B は漸近安定であるので、 $Q_{\Psi}(w)(0) = -\sum_{t=0}^{\infty} Q_{\Phi}(w)(t)$ がしたがう。不等式 $\Phi \stackrel{B}{<} 0$ から、このことは $Q_{\Psi}(w)(0) \geq 0$ を示している。また、 $w \in B$ は任意であるので、 $\Psi \stackrel{B}{\geq} 0$ が成り立つ。□

補題 2,3,7 および補題 8 より, 本論文の主要結果として, 一般化 Lyapunov 安定定理を得る.

《定理 1》 与えられた $\Phi \in \mathbf{R}_s^{q \times q}[\zeta, \eta]$ を, $\Phi \stackrel{B}{<} 0$ を満たす任意の 2 変数多項式行列とする. このとき, つぎの (i), (ii), (iii) および (iv) は, 同値である.

(i) ビヘイビア B は, 漸近安定である.

(ii) 2 変数多項式行列 $\Psi \in \mathbf{R}_s^{q \times q}[\zeta, \eta]$ が存在して,

$$\Psi \stackrel{B}{\geq} 0 \text{ かつ } \nabla \Psi \stackrel{B}{<} 0 \quad (13)$$

が成り立つ.

(iii) 2 変数多項式行列 $\Psi \in \mathbf{R}_s^{q \times q}[\zeta, \eta]$ が存在して, (10) 式と $\Psi \stackrel{B}{\geq} 0$ を満たす.

(iv) 2 変数多項式行列 $\Psi \in \mathbf{R}_s^{q \times q}[\zeta, \eta]$ と $Y \in \mathbf{R}^{p \times q}[\zeta, \eta]$ が存在して, TVPLE (9) と $\Psi \stackrel{B}{\geq} 0$ を満たす.

(証明) 関係 (i) $\Rightarrow$ (iv) は, 補題 8 より成り立つ. 補題 2 (ii) を用いると, (iv) は (iii) に等価である. また, $\Phi \stackrel{B}{<} 0$ と補題 3 (ii) より, (iii) は (ii) を意味する. 最後に, (ii) $\Rightarrow$ (i) は, 補題 7 から従う. $\square$

この節の残りでは, 定理 1 に基づいて, TVPLE (9) の R -正準解 $\Psi' \in \mathbf{R}_s^{q \times q}[\zeta, \eta]$ による漸近安定条件を与える. そこで, B の kernel 表現 (2) を誘導する多項式行列 $R \in \mathbf{R}^{q \times q}[\xi]$ は正方かつ正則であると仮定する. また, 2 変数多項式行列 $\Phi \stackrel{B}{<} 0$ の R -正準性を仮定する.

定理 1 (i) $\Leftrightarrow$ (iii) より, B が漸近安定であるためには, (10) 式を満たす $\Psi \stackrel{B}{\geq} 0$ が存在することが必要十分である. 補題 4 (ii) から, この $\Psi(\zeta, \eta)$ に対して $\Psi' \stackrel{B}{=} \Psi$ なる R -正準 2 変数多項式行列 $\Psi' \in \mathbf{R}_s^{q \times q}[\zeta, \eta]$ が存在する. よって, 補題 2 (ii) より, B の漸近安定性は, $\Psi' \stackrel{B}{\geq} 0$ と $Y' \in \mathbf{R}^{q \times q}[\zeta, \eta]$ が存在して, TVPLE

$$\nabla \Psi'(\zeta, \eta) = \Phi(\zeta, \eta) - Y'(\eta, \zeta)^T R(\eta) - R(\zeta)^T Y'(\zeta, \eta) \quad (14)$$

が成り立つことに等価である. 上式の両辺にそれぞれ左から $R(\zeta)^{-T}$, 右から $R(\eta)^{-1}$ を乗じると,

$$\begin{aligned} & (\zeta\eta - 1)R(\zeta)^{-T}\Psi'(\zeta, \eta)R(\eta)^{-1} \\ &= R(\zeta)^{-T}\Phi(\zeta, \eta)R(\eta)^{-1} - R(\zeta)^{-T}Y'(\eta, \zeta)^T \\ & \quad - Y'(\zeta, \eta)R(\eta)^{-1} \end{aligned} \quad (15)$$

が成り立つ. (15) 式の右辺第 1 項の厳密なプロパー性より, $\Psi'(\zeta, \eta)$ が R -正準, つまり (15) 式の左辺がプロパーであるための必要十分条件は, $Y'(\zeta, \eta)R(\eta)^{-1}$ がプロパーとなることである. 後者の条件が成り立つためには, $X' \in \mathcal{X}_R$ が存在して, $X'(\eta) = Y'(\zeta, \eta)$ となることが必要十分である. ここで, $\mathcal{X}_R$ は, 次式で定義される集合である.

$$\mathcal{X}_R = \{X \in \mathbf{R}^{q \times q}[\xi] \mid X(\xi)R(\xi)^{-1} : \text{プロパー}\} \quad (16)$$

このとき, TVPLE (14) は, $\Psi' \in \mathbf{R}_s^{q \times q}[\zeta, \eta]$ と $X' \in \mathcal{X}_R$ を未知変数とする TVPLE

$$\nabla \Psi'(\zeta, \eta) = \Phi(\zeta, \eta) - X'(\zeta)^T R(\eta) - R(\zeta)^T X'(\eta) \quad (17)$$

に帰着される. さらに, $\Psi'(\zeta, \eta)$ は R -正準であるので, 補題 5 (i) より, $\Psi' \stackrel{B}{\geq} 0$ は $\Psi' \geq 0$ に同値である.

以上の議論から, 定理 1 は, つぎの系 1 によって言い換えられる.

[系 1] 与えられた $\Phi \in \mathbf{R}_s^{q \times q}[\zeta, \eta]$ を $\Phi \stackrel{B}{<} 0$ を満たす任意の R -正準 2 変数多項式行列とする. (3) 式で与えられるビヘイビア B が漸近安定であるための必要十分条件は, R -正準 2 変数多項式行列 $\Psi' \in \mathbf{R}_s^{q \times q}[\zeta, \eta]$ と多項式行列 $X' \in \mathbf{R}^{q \times q}[\xi]$ が存在して, TVPLE (17) と $\Psi' \geq 0$ を満たすことである. また, (17) 式を満たす $\Psi'(\zeta, \eta)$ と $X'(\eta)$ に対して, $\Psi'(\zeta, \eta)$ が R -正準であるための必要十分条件は, $X' \in \mathcal{X}_R$, すなわち $X'(\xi)R(\xi)^{-1}$ がプロパーとなることである.

3.1 古典的結果との関係

本節では, 本論文の安定定理と古典的な結果としてよく知られた Lyapunov 安定定理と Jury の安定判別法との関連を調べる.

3.1.1 Lyapunov 安定定理

系 1 は, 状態空間方程式に基づく Lyapunov 安定定理の一般化である. このことを以下で説明する.

ビヘイビア B は, つぎの状態空間方程式

$$w(t+1) = Aw(t) \quad (18)$$

によって記述されるとする. また, $R(\xi) = A - \xi I_q$ および $\Phi(\zeta, \eta) = \Phi_0 - D_0^T D_0$ を定義する. ただし, $D_0 \in \mathbf{R}^{m \times q}$ は, (A, D_0) が状態空間方程式の意味で可観測となる定数行列である. このことは, 第 2.1 節の意味で $(R(\xi), D_0)$ が可観測となることと等価である. 以下では, このとき TVPLE (17) の解の存在と Lyapunov 方程式の解の存在が等価であることを示す.

ある R -正準 2 変数多項式行列 $\Psi' \geq 0$ と多項式行列 $X' \in \mathcal{X}_R$ が存在して, TVPLE (17) を満たすと仮定する. 多項式行列 $R(\xi)$ は $A - \xi I_q$ であるので, 文献 3) の Lemma 6.3-10 より, $\Psi'(\zeta, \eta)$ は非負定値定数行列 $\Psi_0 \in \mathbf{R}_s^{q \times q}$ であり, $X'(\eta)$ は 1 次以下の多項式行列 $X'(\eta) = X_0 + X_1\eta$, $X_0, X_1 \in \mathbf{R}^{q \times q}$ である. これらを TVPLE (17) に代入すると

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla \Psi'(\zeta, \eta) - \Phi(\zeta, \eta) + X'(\zeta)^T R(\eta) + R(\zeta)^T X'(\eta) \\ &= (\zeta\eta - 1)\Psi_0 - \Phi_0 + (X_0 + X_1\zeta)^T (A - \eta I_q) \\ & \quad + (A - \zeta I_q)^T (X_0 + X_1\eta) \\ &= \zeta\eta (\Psi_0 - X_1^T - X_1) \\ & \quad + \zeta (X_1^T A - X_0) + \eta (A^T X_1 - X_0^T) \\ & \quad - (\Psi_0 + \Phi_0 - X_0^T A - A^T X_0) \end{aligned} \quad (19)$$

を得る. (19) 式の最右辺と最左辺の各係数を比較すれば,

$$\Psi_0 - X_1^T - X_1 = 0 \quad (20)$$

$$X_1^T A - X_0 = 0 \quad (21)$$

$$\Psi_0 + \Phi_0 - X_0^T A - A^T X_0 = 0 \quad (22)$$

が成り立つ。(20)式と(21)式を満たすすべての X_0 と X_1 は, $X_0 = \Psi_0 A/2 + GA$ かつ $X_1 = \Psi_0/2 - G$ によってパラメトライズされる. ただし, $G \in \mathbf{R}^{q \times q}$ は任意の歪対称行列である. よって, $X'(\eta)$ は,

$$X'(\eta) = \frac{1}{2} \Psi_0 (\eta I_q + A) + GR(\eta) \quad (23)$$

となる. さらに, $X_0 = \Psi_0 A/2 + GA$ を (22) 式に代入すると, Ψ_0 はよく知られた Lyapunov 方程式

$$A^T \Psi_0 A - \Psi_0 = \Phi_0 \quad (24)$$

を満たさなければならないことがわかる. このとき, $(R(\xi), D_0)$ の可観測性より $\Psi_0 > 0$ がしたがう.

逆に, Ψ_0 が Lyapunov 方程式 (24) の正定値解であるとき, 上の計算を逆に辿れば, $\Psi'(\zeta, \eta) := \Psi_0$ と $X'(\eta) := \Psi_0(\eta I_q + A)/2$ は TVPLE (17) を満たすことがわかる.

よって, TVPLE (17) の解の存在と Lyapunov 方程式 (24) の解の存在の等価性が示された.

よく知られているように, (18) 式のシステムが漸近安定であるための必要十分条件は (24) 式が正定値解をもつことである¹²⁾. したがって, ここでの議論は, 系 1 が従来の状態空間方程式に基づく Lyapunov 安定定理を特別な場合として含んでいることを示している.

3.1.2 Jury の安定判別法

連続時間システムの文献 11) では, 一般化 Lyapunov 安定定理と Routh-Hurwitz の安定判別法との対応関係が説明されている. 以下では, Jury の安定判別法との同様の対応関係を与える. ビヘイビア $\mathcal{B}$ は, スカラー差分代数方程式

$$R(\sigma)w = 0, \quad R(\xi) = R_0 + R_1\xi + \cdots + R_L\xi^L \in \mathbf{R}[\xi], \\ R_0, R_1, \dots, R_L \in \mathbf{R}, \quad R_L \neq 0$$

によって記述されるとする. ここでの目的は, この $R(\xi)$ に対する Jury の安定条件を TVPLE (9) から導出することである. そのために, 2 変数多項式

$$\Phi(\zeta, \eta) = -\frac{1}{2} \zeta^L \eta^L R(\zeta) \sim R(\eta) \quad (25)$$

を導入する. このとき, TVPLE (9) の解のひとつは, $Y(\zeta, \eta) = -R(\eta)/4$ と次式の $\Psi(\zeta, \eta)$ である.

$$\Psi(\zeta, \eta) = \frac{R(\zeta)R(\eta) - \zeta^L \eta^L R(\zeta) \sim R(\eta)}{2(\zeta\eta - 1)} \quad (26)$$

いま, 多項式の系列 $E_i, F_i \in \mathbf{R}[\xi]$ ($i = 0, 1, \dots, L$) を

$$E_i(\xi) = \begin{cases} R(\xi) & \text{for } i = 0, \\ F_{i-1}(0)F_{i-1}(\xi) - E_{i-1}(0)E_{i-1}(\xi) & \text{for } i = 1, 2, \dots, L. \end{cases} \quad (27)$$

$$F_i(\xi) = \xi^{L-i} E_i(\xi) \quad (28)$$

によって定義する. ここに, $E_i(\xi)$ の次数は高々 $L-i$ である. このとき, $E_i(\xi)$ と $F_i(\xi)$ の各単項式の係数は Jury 表の要素となっている. Jury の安定条件とはつぎの命題であった.

[命題 1]²⁾ 多項式 $R \in \mathbf{R}[\xi]$ が Schur であるための必要十分条件は, つぎの不等式が成り立つことである.

$$E_1(0) > 0, \quad E_i(0) < 0 \quad (i = 2, 3, \dots, L) \quad (29)$$

定理 1 を通じて命題 1 を証明するために, $E_i(\xi)$ と $F_i(\xi)$ を用いて (26) 式の $\Psi(\zeta, \eta)$ を表わす. この準備として, $i = 0, 1, \dots, L$ に対して,

$$B_i(\zeta, \eta) = \frac{E_i(\zeta)E_i(\eta) - F_i(\zeta)F_i(\eta)}{2(\zeta\eta - 1)} \quad (30)$$

を定義する. この $B_i(\zeta, \eta)$ に対して, 漸化式

$$B_{i-1}(\zeta, \eta) = -\frac{1}{E_i(0)} \zeta \eta B_i(\zeta, \eta) + \frac{1}{2E_i(0)} E_i(\zeta)E_i(\eta) \\ (i = 1, 2, \dots, L) \quad (31)$$

が成り立つ (導出は付録 B を参照). 多項式 $E_i(\xi)$ の次数は高々 $L-i$ であるので, (27) 式と (28) 式より $E_L(\xi)$ と $F_L(\xi)$ は定数でありかつ一致する. (30) 式を用いると $B_L(\zeta, \eta) = 0$ を得る. この終端条件のもとで (31) 式を解くと,

$$B_i(\zeta, \eta) = -\frac{1}{2} \sum_{j=i+1}^L \frac{\zeta^{j-i-1} \eta^{j-i-1} E_j(\zeta)E_j(\eta)}{\{-E_{i+1}(0)\} \cdots \{-E_j(0)\}} \\ (i = 0, 1, \dots, L-1) \quad (32)$$

が成り立つ. (26)~(28) 式および (30) 式より $\Psi(\zeta, \eta) = B_0(\zeta, \eta)$ である. よって, (32) 式を用いると,

$$\Psi(\zeta, \eta) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^L \frac{1}{\alpha_i} \zeta^{i-1} \eta^{i-1} E_i(\zeta)E_i(\eta) \quad (33)$$

を得る. ただし, $\alpha_i = \prod_{j=1}^i \{-E_j(0)\}$ である.

(命題 1 の証明) 必要性を示す. 多項式行列 $R(\xi)$ は Schur であると仮定する. 補題 6 を用いると, $\mathcal{B}$ は漸近安定である. また, このとき $(R(\xi), \xi^L R(\xi) \sim)$ は可観測であるので, 補題 3(ii) と (25) 式より $\Phi \stackrel{\mathcal{B}}{<} 0$ が成り立つ. よって, 補題 8 より, (26) 式の $\Psi(\zeta, \eta)$ は, TVPLE (9) の解であり, $\Psi \stackrel{\mathcal{B}}{\geq} 0$ を満たす. (26) 式より $\Psi(\zeta, \eta)$ は R -正準であるので, 補題 5(i) とあわせると, $\Psi \stackrel{\mathcal{B}}{\geq} 0$ は, $\Psi \geq 0$ を意味する.

多項式 $E_i(\xi)$ の次数は高々 $L-i$ であるので, (33) 式より $\Psi(\zeta, \eta)$ を $\Psi(\zeta, \eta) = \sum_{i=0}^{L-1} \sum_{j=0}^{L-1} \Psi_{ij} \zeta^i \eta^j$, $\Psi_{ij} \in \mathbf{R}$ ($i, j = 0, 1, \dots, L-1$) によって表わすことができる. この $\Psi(\zeta, \eta)$ に対して, $\tilde{\Psi} \in \mathbf{R}_s^{L \times L}$ を

$$\tilde{\Psi} := \begin{bmatrix} \Psi_{00} & \Psi_{01} & \cdots & \Psi_{0L-1} \\ \Psi_{10} & \Psi_{11} & \cdots & \Psi_{1L-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Psi_{L-10} & \Psi_{L-11} & \cdots & \Psi_{L-1L-1} \end{bmatrix}$$

によって定義する. このとき, 文献 5) の Proposition 2.1 より $\Psi \geq 0$ は $\tilde{\Psi} \geq 0$ に等価である. さらに, (33) 式より,

$$\tilde{\Psi} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^L \frac{1}{\alpha_i} \begin{bmatrix} 0_{1 \times (i-1)} \tilde{E}_i \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0_{1 \times (i-1)} \tilde{E}_i \end{bmatrix} \quad (34)$$

を得る. ただし, $\tilde{E}_i \in \mathbf{R}^{1 \times (L+1-i)}$ ($i = 1, 2, \dots, L$) は, $E_i(\xi) = E_{i,0} + E_{i,1}\xi + \cdots + E_{i,L-i}\xi^{L-i}$, $E_{i,0}, E_{i,1}, \dots, E_{i,L-i} \in \mathbf{R}$ に対して $\tilde{E}_i := [E_{i,0} \ E_{i,1} \ \cdots \ E_{i,L-i}]$ によって定義される. (34) 式より, $\tilde{\Psi}$ の各対角成分は, $\Psi_{ii} =$

$-\sum_{j=1}^i E_{j,i-j}^2/(2\alpha_j)$ ($i = 1, 2, \dots, L$) によって表わされる. (34) 式において任意の $i = 1, 2, \dots, L$ に対して $E_{i,0} = E_i(0) \neq 0$ かつ $1/\alpha_i \neq 0$ であるので, $\text{rank } \tilde{\Psi} = L$ を得る. 不等式 $\tilde{\Psi} \geq 0$ とあわせると, $\tilde{\Psi} > 0$ が成り立つ. よって, $\Psi_{ii} > 0$ より $1/\alpha_i < 0$ が必要となり, (29) 式がしたがう.

つぎに, 十分性を証明する. 不等式 (29) は, $\alpha_i < 0$ ($i = 1, 2, \dots, L$) を意味する. (26) 式より, $\Psi \stackrel{B}{\geq} 0$ を得る. ここで, $\text{rank } \tilde{\Psi} = L$ を示す. (26) 式を用いると,

$$Q_{\Psi}(w)(0) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^L \frac{1}{\alpha_i} |E_i(\sigma)w(i-1)|^2 \geq 0, \forall w \in B$$

が成り立つ. 多項式 $E_i(\xi)$ の次数は高々 $L-i$ であることと (29) 式より, $\{Q_{\Psi}(w)(0) = 0 \Rightarrow w(0) = w(1) = \dots = w(L-1) = 0\}$ がしたがう. このことは $\tilde{\Psi} > 0$ を意味するので, $\text{rank } \tilde{\Psi} = L$ が成り立つ.

さらに, $(R(\xi), \xi^L R(\xi)^{\sim})$ の可観測性を示す. $P, Q \in \mathbf{R}[\xi]$ が存在して $R(\xi) = P(\xi)Q(\xi)$ かつ $\xi^L R(\xi)^{\sim} = P(\xi)\xi^L Q(\xi)^{\sim}$ が成り立つと仮定する. このとき, $\Psi(\zeta, \eta) = P(\zeta)\Psi_Q(\zeta, \eta)P(\eta)$ がしたがう. ただし, $\Psi_Q(\zeta, \eta)$ は, (26) 式に $R(\xi) = Q(\xi)$ を代入して得られる 2 変数多項式行列である. これより, $\text{rank } \tilde{\Psi} \leq \text{rank } \tilde{\Psi}_Q \leq L$ が必要となる. ここで, $\text{rank } \tilde{\Psi} = L$ であるので, これは $P(\xi)$ は定数であることを意味する. よって, $(R(\xi), \xi^L R(\xi)^{\sim})$ は可観測となる.

(26) 式と $(R(\xi), \xi^L R(\xi)^{\sim})$ の可観測性を用いると, $\nabla \Psi \stackrel{B}{<} 0$ を得る. 不等式 $\Psi \stackrel{B}{\geq} 0$ とあわせると, 定理 1 と補題 6 より, $R(\xi)$ は Schur である. $\square$

4. 双多項式 Lyapunov 方程式

前節では, ビヘイビア B の漸近安定性の必要十分条件が TVPLE (9) を用いて特徴付けられることを示した. 一方, 連続時間システムでは, TVPLE (9) から導出された 1 変数多項式 Lyapunov 方程式を用いた B の漸近安定条件が得られている¹¹⁾. 本節では, 離散時間システムの場合に, 対応する結果がどのように記述されるのかを明らかにする.

前節と同じく, $\Phi \in \mathbf{R}_s^{p \times q}[\zeta, \eta]$ を, $\Phi < 0$ を満たす任意の 2 変数多項式行列とする. 補題 1 を用いると, TVPLE (9) の解の存在は, 双多項式 Lyapunov 方程式 (dipolynomial Lyapunov equation; DLE)

$$R(\xi)^{\sim} X(\xi) + X(\xi)^{\sim} R(\xi) = \partial \Phi(\xi) \quad (35)$$

の解の存在に等価である. ただし, $X \in \mathbf{R}^{p \times q}[\xi^{-1}, \xi]$ は, 未知の双多項式行列である. DLE (35) の解 $X(\xi)$ に対して, $Y \in \mathbf{R}^{p \times q}[\zeta, \eta]$ を, $\partial Y(\xi) = X(\xi)$ を満たすように与える. この $Y(\zeta, \eta)$ を TVPLE (9) に代入すれば, B に対する Lyapunov 関数を得る.

[補題 9] (3) 式で与えられるビヘイビア B は漸近安定であると仮定する. また, $\Phi \in \mathbf{R}_s^{q \times q}[\zeta, \eta]$ を, $\Phi < 0$ を満たす任意の 2 変数多項式行列とする. このとき, つぎの (i), (ii),

(iii) および (iv) が成り立つ.

(i) DLE (35) の解が存在する.

(ii) 双多項式行列 $X_0 \in \mathbf{R}^{p \times q}[\xi^{-1}, \xi]$ を DLE (35) の解のひとつとする. このとき, DLE (35) のすべての解は,

$$X(\xi) = X_0(\xi) + F(\xi)R(\xi)$$

によってパラメトライズされる. ただし, $F \in \mathbf{R}^{p \times p}[\xi^{-1}, \xi]$ は, 次式を満たす自由パラメータである.

$$F(\xi)^{\sim} = -F(\xi) \quad (36)$$

(iii) 2 変数多項式行列 $Y \in \mathbf{R}^{p \times q}[\zeta, \eta]$ は, DLE (35) の解 $X \in \mathbf{R}^{p \times q}[\xi^{-1}, \xi]$ に対して, $\partial Y(\xi) = X(\xi)$ を満たすとする. このとき, B に対する Lyapunov 関数を誘導する 2 変数多項式行列は, 次式で与えられる.

$$\Psi(\zeta, \eta) = \frac{\Phi(\zeta, \eta) - Y(\eta, \zeta)^T R(\eta) - R(\zeta)^T Y(\zeta, \eta)}{\zeta\eta - 1} \quad (37)$$

(iv) DLE (35) の解 $X_i(\xi)$ ($i = 1, 2$) に対して, $\Psi_i \in \mathbf{R}_s^{q \times q}[\zeta, \eta]$ を (37) 式によって構成される 2 変数多項式行列とする. このとき, つぎの同値関係が成り立つ.

$$\Psi_1 \stackrel{B}{=} \Psi_2$$

(証明) (i) 補題 8 より, TVPLE (9) を満たす $Y(\zeta, \eta)$ が存在する. この $Y(\zeta, \eta)$ に対して $X(\xi) = \partial Y(\xi)$ とおけば, $X(\xi)$ は, DLE (35) を満たす.

(ii) 双多項式行列 $\bar{X}(\xi) := X(\xi) - X_0(\xi)$ を定義する. このとき,

$$R(\xi)^{\sim} \bar{X}(\xi) + \bar{X}(\xi)^{\sim} R(\xi) = 0$$

が成り立つ. 補題 8 と同様に, 一般性を失うことなく $R(\xi)$ は Smith 正準形 (11) であると仮定できる. このとき, 上式を成分ごとに書き下すと,

$$r_i(\xi^{-1})\bar{x}_{ij}(\xi) + \bar{x}_{ji}(\xi^{-1})r_j(\xi) = 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, q) \quad (38)$$

となる. ただし, $\bar{x}_{ij} \in \mathbf{R}[\xi^{-1}, \xi]$ は, $\bar{X}(\xi)$ の第 (i, j) 成分である. (38) 式の両辺に $\xi^{\deg r_i(\xi)}$ をかけて変形すると,

$$\xi^{\deg r_i(\xi)} r_i(\xi^{-1})\bar{x}_{ij}(\xi) = -\xi^{\deg r_i(\xi)} \bar{x}_{ji}(\xi^{-1})r_j(\xi)$$

が成り立つ. 多項式 $r_j(\xi)$, $\xi^{\deg r_i(\xi)} r_i(\xi^{-1})$ は共通の零点をもたないので, $f_{ij} \in \mathbf{R}[\xi^{-1}, \xi]$ が存在して,

$$\bar{x}_{ij}(\xi) = f_{ij}(\xi)r_j(\xi) \quad (39)$$

を満たす. 上式を行列に書き直せば, $\bar{X}(\xi) = F(\xi)R(\xi)$ が成り立つ.

つぎに, (36) 式を示す. (39) 式を (38) 式に代入すると, $r_i(\xi^{-1})\{f_{ji}(\xi^{-1}) + f_{ij}(\xi)\}r_j(\xi) = 0$ が成り立つ. ここで, $r_i(\xi^{-1})$ と $r_j(\xi)$ は自明にゼロではないので, $f_{ji}(\xi^{-1}) + f_{ij}(\xi) = 0$ を得る. この式を行列を用いて書き直すと, $F(\xi)^{\sim} + F(\xi) = 0$ が成り立つ.

(iii) 補題 8 から明らかである.

(iv) $\Psi_1(\zeta, \eta)$ と $\Psi_2(\zeta, \eta)$ とを (37) 式によって構成すると, $\nabla \Psi_1 \stackrel{B}{=} \nabla \Psi_2$ が成り立つ. よって, 任意の $w \in B$ と $T \in \mathbf{Z}$

に対して,

$$\begin{aligned}
 0 &= \sum_{t=0}^{T-1} \nabla Q_{\Psi_1}(w)(t) - \sum_{t=0}^{T-1} \nabla Q_{\Psi_2}(w)(t) \\
 &= \sum_{t=0}^{T-1} \nabla Q_{(\Psi_1 - \Psi_2)}(w)(t) \\
 &= \sum_{t=0}^{T-1} \{Q_{(\Psi_1 - \Psi_2)}(w)(t+1) - Q_{(\Psi_1 - \Psi_2)}(w)(t)\} \\
 &= Q_{(\Psi_1 - \Psi_2)}(w)(T) - Q_{(\Psi_1 - \Psi_2)}(w)(0) \quad (40)
 \end{aligned}$$

となる。ビヘイビア $\mathcal{B}$ の漸近安定性より,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} Q_{(\Psi_1 - \Psi_2)}(w)(T) = 0$$

を得る。上式を (40) 式とあわせると, $Q_{(\Psi_1 - \Psi_2)}(w)(0) = 0$ がしたがう。さらに, これを (40) 式に代入すると, $Q_{(\Psi_1 - \Psi_2)}(w)(T) = 0, \forall w \in \mathcal{B}, T \in \mathbf{Z}$ が成り立つ。このことは, $\Psi_1 - \Psi_2 \stackrel{\mathcal{B}}{=} 0$ を示している。□

(注意 1) 補題 9(ii) より, DLE (35) の解 $X(\xi)$ は一意ではないので, (37) 式の $\Psi(\zeta, \eta)$ の一意性も成り立たない。補題 9(iv) は, それらが誘導する Lyapunov 関数 $Q_{\Psi}(w)$ が $X(\xi)$ の値にかかわらず $\Phi(\zeta, \eta)$ に対して $\mathcal{B}$ 上で一意となることを意味する。

系 1 に基づいて, DLE (35) を用いた $\mathcal{B}$ の漸近安定性のための必要十分条件を与える。そのために, $\mathcal{B}$ の kernel 表現 (2) を誘導する多項式行列 $R \in \mathbf{R}^{q \times q}[\xi]$ は正方かつ正則であると仮定する。また, $\Phi \stackrel{\mathcal{B}}{<} 0$ の R -正準性を仮定する。(17) 式に $\zeta = \xi^{-1}$ と $\eta = \xi$ を代入すると, 次式が成り立つ。

$$X'(\xi) \sim R(\xi) + R(\xi) \sim X'(\xi) = \partial \Phi(\xi) \quad (41)$$

よって, TVPLE (17) を満たす $X'(\eta)$ は, DLE (35) の多項式行列解である。これより, つぎの補題 10 が成り立つ。

[補題 10] 与えられた $\Phi \in \mathbf{R}_s^{q \times q}[\zeta, \eta]$ を, $\Phi \stackrel{\mathcal{B}}{<} 0$ を満たす任意の R -正準 2 変数多項式行列とする。また, 集合 $\mathcal{X}_R$ は (16) 式で与えられるとする。多項式行列 $X' \in \mathbf{R}^{q \times q}[\xi]$ に対して, つぎの (i) と (ii) は同値である。

(i) 多項式行列 $X' \in \mathcal{X}_R$ は DLE (41) を満たす。

(ii) R -正準 2 変数多項式行列 $\Psi' \in \mathbf{R}_s^{q \times q}[\zeta, \eta]$ が存在して, $\Psi'(\zeta, \eta)$ と $X'(\eta)$ は, TVPLE (17) を満たす。

(証明) (ii) $\Rightarrow$ (i) TVPLE (17) に $\zeta = \xi^{-1}$ と $\eta = \xi$ を代入すると (41) 式を得るので, 証明は明らかである。

(i) $\Rightarrow$ (ii) 補題 1(i) $\Leftrightarrow$ (ii) および補題 2(ii) を用いると, ある $\Psi' \in \mathbf{R}_s^{q \times q}[\zeta, \eta]$ が存在して,

$$\nabla \Psi'(\zeta, \eta) = \Phi(\zeta, \eta) - X'(\zeta)^T R(\eta) - R(\zeta)^T X'(\eta)$$

が成り立つ。上式より, $\Psi'(\zeta, \eta)$ と $X'(\eta)$ は TVPLE (17) を満たす。また, $\Phi(\zeta, \eta)$ の R -正準性と $X'(\xi)R(\xi)^{-1}$ のプロパー性から, $\Psi'(\zeta, \eta)$ は R -正準である。□

DLE (35) の多項式行列解を用いると, 補題 9 は, つぎの補題 11 によって言い換えられる。

[補題 11] (3) 式で与えられるビヘイビア $\mathcal{B}$ は漸近安定

であると仮定する。また, $\Phi \in \mathbf{R}_s^{q \times q}[\zeta, \eta]$ を, $\Phi \stackrel{\mathcal{B}}{<} 0$ を満たす任意の R -正準 2 変数多項式行列とする。集合 $\mathcal{X}_R$ は (16) 式で与えられるとする。このとき, つぎの (i) と (ii) が成り立つ。

(i) 多項式行列 $X' \in \mathcal{X}_R$ を DLE (35) の解とする。このとき, $\mathcal{B}$ に対する Lyapunov 関数を誘導する R -正準 2 変数多項式行列は, 次式で与えられる。

$$\Psi'(\zeta, \eta) = \frac{\Phi(\zeta, \eta) - X'(\zeta)^T R(\eta) - R(\zeta)^T X'(\eta)}{\zeta\eta - 1} \quad (42)$$

(ii) DLE (35) のひとつの解 $X'_0 \in \mathcal{X}_R$ が与えられたとき, 集合 $\mathcal{X}_R$ に属する任意の多項式行列解 $X'(\xi)$ は,

$$X'(\xi) = X'_0(\xi) + F_0 R(\xi)$$

と表わすことができる。ただし, $F_0 \in \mathbf{R}^{q \times q}$ は, $F_0^T = -F_0$ を満たす自由パラメータである。

(iii) (42) 式によって構成される $\Psi'(\zeta, \eta)$ は, DLE (35) の解 $X' \in \mathcal{X}_R$ の値にかかわらず $\Phi(\zeta, \eta)$ に対して一意に定まる。

(証明) (i) DLE (35) の解 $X' \in \mathcal{X}_R$ の存在性は, 系 1 および補題 10(ii) $\Rightarrow$ (i) より成り立つ。補題 10(ii) を用いると, $\Psi'(\zeta, \eta)$ が (42) 式によって与えられることは明らかである。補題 10(iii) から, この $\Psi'(\zeta, \eta)$ は, $\mathcal{B}$ に対する Lyapunov 関数を誘導する。

(ii) 補題 9(ii) より, ある $F \in \mathbf{R}^{q \times q}[\xi^{-1}, \xi]$ が存在して,

$$X'(\xi) - X'_0(\xi) = F(\xi)R(\xi) \text{ かつ } F(\xi) \sim -F(\xi) \quad (43)$$

が成り立つ。(43) 式の第 1 式の両辺に右から $R(\xi)^{-1}$ を乗じると,

$$\{X'(\xi) - X'_0(\xi)\} R(\xi)^{-1} = F(\xi) \quad (44)$$

を得る。(44) 式の左辺はプロパーであるので, $F(\xi)$ は正のべきの項をもたない。このことは, $F(\xi) \sim$ が多項式であることを意味する。したがって, (43) 式の第 2 式から, $F(\xi)$ は定数行列 $F(\xi) = F_0$ であり, $F_0^T = -F_0$ を満たす。

(iii) DLE (35) の 2 つの解 $X'_1, X'_2 \in \mathcal{X}_R$ が与えられたとする。このとき, (ii) よりある歪対称行列 $F_0 \in \mathbf{R}^{q \times q}$ が存在して,

$$X'_1(\xi) - X'_2(\xi) = F_0 R(\xi) \quad (45)$$

が成り立つ。

ここで, $\Psi'_1, \Psi'_2 \in \mathbf{R}_s^{q \times q}[\zeta, \eta]$ を, それぞれ $X'_1(\xi)$ と $X'_2(\xi)$ に対して (42) 式で構成される 2 変数多項式行列とする。

$$\Psi'_i(\zeta, \eta) = \frac{\Phi(\zeta, \eta) - X'_i(\zeta)^T R(\eta) - R(\zeta)^T X'_i(\eta)}{\zeta\eta - 1} \quad (i = 1, 2)$$

(45) 式と上式より,

$$\begin{aligned}
 &\Psi'_1(\zeta, \eta) - \Psi'_2(\zeta, \eta) \\
 &= \frac{\{X'_1(\zeta) - X'_2(\zeta)\}^T R(\eta) + R(\zeta)^T \{X'_1(\eta) - X'_2(\eta)\}}{1 - \zeta\eta} \\
 &= \frac{\{F_0 R(\zeta)\}^T R(\eta) + R(\zeta)^T F_0 R(\eta)}{1 - \zeta\eta}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{R(\zeta)^T (F_0^T + F_0) R(\eta)}{1 - \zeta\eta}$$

$$= 0$$

を得る。よって、 $\Psi'(\zeta, \eta)$ は、DLE (35) の解 $X' \in \mathcal{X}_R$ の値にかかわらず $\Phi(\zeta, \eta)$ に対して一意に定まる。□

(注意2) 注意1で説明したように、Lyapunov 関数を誘導する2変数多項式行列 $\Psi'(\zeta, \eta)$ の $\Phi(\zeta, \eta)$ に対する一意性は、一般に成り立たない。しかし、補題11(iii)は、 $\Psi'(\zeta, \eta)$ を R -正準2変数多項式行列に限定した場合、一意に定まることを意味する。

系1および補題10,11より、 $\mathcal{B}$ の漸近安定性に対するDLE (35) の多項式行列解を用いた必要十分条件を与える。

《定理2》 (3) 式で与えられるビヘイビア $\mathcal{B}$ が漸近安定であるための必要十分条件は、DLE (35) の多項式行列解 $X' \in \mathcal{X}_R$ が存在して、(42) 式で与えられる $\Psi'(\zeta, \eta)$ が $\Psi' \geq 0$ を満たすことである。

(証明) 系1および補題10,11より明らかである。□

(注意3) DLE (35) の解 $X(\xi)$ のクラスは双多項式行列であるが、定理2は、 $\mathcal{B}$ の漸近安定性を調べるためにはDLE (35) の解のクラスを多項式行列に限定して、定理2の条件を満たす解を求めればよいことを述べている。

以下では第3.1.1節の続きとして、状態空間方程式(18)で記述されるビヘイビア $\mathcal{B}$ の漸近安定性とDLE (35) との関連について説明する。(23) 式で定義される $X' \in \mathcal{X}_R$ に対して、つぎの計算

$$\begin{aligned} R(\xi) \sim X'(\xi) + X'(\xi) \sim R(\xi) \\ &= \frac{1}{2} (A - \xi^{-1} I_q)^T \Psi_0 (\xi I_q + A) \\ &\quad + \frac{1}{2} (\xi^{-1} I_q + A)^T \Psi_0 (A - \xi I_q) \\ &= \frac{1}{2} A^T \Psi_0 \{(\xi I_q + A) + (A - \xi I_q)\} \\ &\quad - \frac{1}{2} \xi^{-1} \Psi_0 \{(\xi I_q + A) - (A - \xi I_q)\} \\ &= A^T \Psi_0 A - \Psi_0 = \Phi_0 = \partial \Phi(\xi) \end{aligned} \quad (46)$$

が成り立つ。(46) 式より、 $X'(\xi)$ は、DLE (35) の多項式行列解である。実際、 $X'(\xi)R(\xi)^{-1}$ はプロパーである。また、(42) 式より $\Psi'(\zeta, \eta) = \Psi_0 > 0$ であるので、定理2から $\mathcal{B}$ の漸近安定性がわかる。

5. 数 値 例

多項式行列

$$R(\xi) = \begin{bmatrix} 3\xi - 1 & 4\xi^2 - 2 \\ 0 & 2\xi^2 - 1 \end{bmatrix}$$

によって誘導されるビヘイビア $\mathcal{B}$ を考える。そして、(R -正準)2変数多項式行列

$$\Phi(\zeta, \eta) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 - \zeta\eta \end{bmatrix} \stackrel{\mathcal{B}}{<} 0$$

を与える。このとき、TVPLE (9) の解は、

$$\Psi(\zeta, \eta) = \begin{bmatrix} \frac{9}{8} & 0 \\ 0 & \frac{3}{8}\zeta\eta + \frac{5}{3} \end{bmatrix},$$

$$Y(\zeta, \eta) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{16}(3\eta + 1) & 0 \\ \frac{1}{8}(3\eta + 1) & -\frac{1}{3}(2\eta^2 + 1) \end{bmatrix}$$

となる。変数 $w = \text{col}(w_1, w_2) \in \mathcal{B}$ に対して、QDF $Q_\Psi(w)$, $\nabla Q_\Psi(w)$ は、それぞれ

$$Q_\Psi(w)(t) = \frac{9}{8}w_1(t)^2 + \frac{5}{3}w_2(t)^2 + \frac{8}{3}w_2(t+1)^2$$

$$\nabla Q_\Psi(w)(t) = -w_1(t)^2 - w_2(t)^2 - w_2(t+1)^2$$

によって与えられる。(13) 式が成り立つので、定理1より $\mathcal{B}$ は漸近安定である。また、 $Q_\Psi(w)$ は $\mathcal{B}$ に対するLyapunov 関数となる。

また、DLE (35) の多項式行列解を求めると、

$$X'(\xi) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{16}(3\xi + 1) & 0 \\ \frac{1}{8}(3\xi + 1) & -\frac{1}{3}(2\xi^2 + 1) \end{bmatrix} = Y(\zeta, \xi)$$

で与えられる。このとき、有理関数行列

$$X'(\xi)R(\xi)^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{3\xi+1}{16(3\xi-1)} & \frac{3\xi+1}{8(3\xi-1)} \\ \frac{3\xi+1}{8(3\xi-1)} & -\frac{42\xi^3-2\xi^2+3\xi-7}{12(3\xi-1)(2\xi^2-1)} \end{bmatrix}$$

はプロパーである。さらに、上の $X'(\xi)$ に対して $\Psi'(\zeta, \eta)$ を(42) 式によって求めると、次式を得る。

$$\Psi'(\zeta, \eta) = \Psi(\zeta, \eta) = \begin{bmatrix} \frac{9}{8} & 0 \\ 0 & \frac{3}{8}\zeta\eta + \frac{5}{3} \end{bmatrix} \geq 0$$

よって、定理2からも $\mathcal{B}$ の漸近安定性が確認できる。

6. お わ り に

本論文では、QDFに基づいて、高階の差分代数方程式(kernel表現)で書かれるシステムに対する一般化Lyapunov安定定理を導出した。特に、本論文は、文献11)と異なり、安定定理の証明をTVPLE (9) のみに基づいて2変数多項式行列の範囲で完結させている。一般化Lyapunov安定定理では、ビヘイビアの漸近安定性は、Lyapunov関数を誘導するTVPLE (9) の可解性に等価であることを示した。さらに、TVPLE (9) とDLE (35) との関係を明らかにして、DLEの多項式行列解によるビヘイビアの漸近安定性のための必要十分条件を与えた。なお、定理1の漸近安定条件は、線形行列不等式を用いた条件に変換可能であり、MatlabのLMI ToolboxとPolynomial Toolboxを用いて数値的に判定可能である。この詳細は小島、鷹羽¹³⁾を参照されたい。

謝辞 本研究を遂行するに当たり、貴重な御助言を頂いた同志社大学片山徹教授、京都大学太田快人教授および金子修助手に深く感謝の意を表します。

参 考 文 献

- 1) T. Cotroneo and J.C. Willems: An LMI condition for non-negativity of a Quadratic Differential Form along a Behavior, Proceedings of the 14th International Symposium on

- Mathematical Theory of Networks and Systems (2000)
- 2) E.I. Jury: Theory and Application of the z-Transform Method, John Wiley (1964)
 - 3) T. Kailath: Linear Systems, Prentice-Hall, Englewood Cliffs (1980)
 - 4) O. Kaneko and T. Fujii: Algebraic stability criterion for high order differential equations in a behavioral framework, Proceedings of the 37th IEEE Conference on Decision and Control, 132/137 (1998)
 - 5) O. Kaneko and T. Fujii: Discrete time average positivity and spectral factorization in a behavioral framework, Systems and Control Letters, **39**-1, 31/44 (2000)
 - 6) M. Kuijper: Why do stabilizing controllers stabilize?, Automatica, **31**-4, 621/625 (1995)
 - 7) R.L.M. Peeters and P. Rapisarda: A two-variable approach to solve the polynomial Lyapunov equation, Systems and Control Letters, **42**, 117/126 (2001)
 - 8) J.W. Polderman and J.C. Willems: Introduction to Mathematical Systems Theory: A Behavioral Approach, Springer-Verlag, New York (1998)
 - 9) B.L. van der Waerden: Algebra, based in part on lectures by E. Artin and E. Noether; translated by F. Blum and J.R. Schulenberger, Springer-Verlag, New York (1991)
 - 10) J.C. Willems: Paradigms and puzzles in the theory of dynamical systems, IEEE Transactions on Automatic Control, **AC36**-11, 259/294 (1991)
 - 11) J.C. Willems and H.L. Trentelman: On quadratic differential forms, SIAM Journal on Control and Optimization, **36**-5, 1703/1749 (1998)
 - 12) K. Zhou, J.C. Doyle and K. Glover: Robust and optimal control, Prentice Hall, Englewood Cliffs (1996)
 - 13) 小島・鷹羽: 二次差分形式に基づく離散時間システムの漸近安定性に対する LMI 条件, システム制御情報学会論文誌, **50**-2, 78/80 (2006)

《付 録》

A. Hilbert の零点定理

[補題 A]⁹⁾ n 変数多項式 $r_i(\xi_1, \dots, \xi_n)$ ($i = 1, 2, \dots, l$) が共通の複素零点をもたないための必要十分条件は, n 変数多項式 $g_i(\xi_1, \dots, \xi_n)$ ($i = 1, 2, \dots, l$) が存在して, つぎの n 変数多項式方程式を満たすことである.

$$\sum_{i=1}^l g_i(\xi_1, \dots, \xi_n) r_i(\xi_1, \dots, \xi_n) = 1$$

B. (31) 式の導出

(28) 式より, $F_i(\xi)^\sim = \xi^{-L+i} E_i(\xi)$ および $E_i(\xi)^\sim = \xi^{-L+i} F_i(\xi)$ を得る. これらの式と (27) 式の第 2 式を (28) 式に代入すると, $i = 1, 2, \dots, L$ に対して

$$\begin{aligned} F_i(\xi) &= \xi^{L-i} \{F_{i-1}(0)F_{i-1}(\xi)^\sim - E_{i-1}(0)E_{i-1}(\xi)^\sim\} \\ &= \xi^{L-i} \cdot \xi^{-L+i-1} \\ &\quad \cdot \{F_{i-1}(0)E_{i-1}(\xi) - E_{i-1}(0)F_{i-1}(\xi)\} \\ &= \xi^{-1} \{F_{i-1}(0)E_{i-1}(\xi) - E_{i-1}(0)F_{i-1}(\xi)\} \end{aligned}$$

が成り立つ. 上式と (27) 式, (28) 式を用いると,

$$\begin{aligned} 2(\zeta\eta - 1) \{E_i(0)B_{i-1}(\zeta, \eta) + \zeta\eta B_i(\zeta, \eta)\} \\ = E_i(0) \{E_{i-1}(\zeta)E_{i-1}(\eta) - F_{i-1}(\zeta)F_{i-1}(\eta)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \zeta\eta \{E_i(\zeta)E_i(\eta) - F_i(\zeta)F_i(\eta)\} \\ &= E_i(0) \{F_{i-1}(\zeta)E_{i-1}(\eta) - F_{i-1}(\zeta)F_{i-1}(\eta)\} \\ &\quad + \zeta\eta \{F_{i-1}(0)F_{i-1}(\zeta) - E_{i-1}(0)E_{i-1}(\zeta)\} \\ &\quad \cdot \{F_{i-1}(0)F_{i-1}(\eta) - E_{i-1}(0)E_{i-1}(\eta)\} \\ &\quad - \{F_{i-1}(0)E_{i-1}(\zeta) - E_{i-1}(0)F_{i-1}(\zeta)\} \\ &\quad \cdot \{F_{i-1}(0)E_{i-1}(\eta) - E_{i-1}(0)F_{i-1}(\eta)\} \end{aligned}$$

がしたがう. (27) 式より $E_i(0) = F_{i-1}(0)^2 - E_{i-1}(0)^2$ であるので, 次式を得る.

$$\begin{aligned} 2(\zeta\eta - 1) \{E_i(0)B_{i-1}(\zeta, \eta) + \zeta\eta B_i(\zeta, \eta)\} \\ = \{F_{i-1}(0)^2 - E_{i-1}(0)^2\} \\ \cdot \{E_{i-1}(\zeta)E_{i-1}(\eta) - F_{i-1}(\zeta)F_{i-1}(\eta)\} \\ + \zeta\eta \{F_{i-1}(0)F_{i-1}(\zeta) - E_{i-1}(0)E_{i-1}(\zeta)\} \\ \cdot \{F_{i-1}(0)F_{i-1}(\eta) - E_{i-1}(0)E_{i-1}(\eta)\} \\ - \{F_{i-1}(0)E_{i-1}(\zeta) - E_{i-1}(0)F_{i-1}(\zeta)\} \\ \cdot \{F_{i-1}(0)E_{i-1}(\eta) - E_{i-1}(0)F_{i-1}(\eta)\} \\ = E_{i-1}(0)^2(\zeta\eta - 1)E_{i-1}(\zeta)E_{i-1}(\eta) \\ - E_{i-1}(0)F_{i-1}(0)(\zeta\eta - 1) \\ \cdot \{E_{i-1}(\zeta)F_{i-1}(\eta) + F_{i-1}(\zeta)E_{i-1}(\eta)\} \\ + F_{i-1}(0)^2(\zeta\eta - 1)F_{i-1}(\zeta)F_{i-1}(\eta) \end{aligned}$$

上式の最左辺と最右辺を $\zeta\eta - 1$ で割って整理すると,

$$\begin{aligned} 2 \{E_i(0)B_{i-1}(\zeta, \eta) + \zeta\eta B_i(\zeta, \eta)\} \\ = \{F_{i-1}(0)F_{i-1}(\zeta) - E_{i-1}(0)E_{i-1}(\zeta)\} \\ \cdot \{F_{i-1}(0)F_{i-1}(\eta) - E_{i-1}(0)E_{i-1}(\eta)\} \end{aligned}$$

が成り立つ. (27) 式より, 上式は,

$$2 \{E_i(0)B_{i-1}(\zeta, \eta) + \zeta\eta B_i(\zeta, \eta)\} = E_i(\zeta)E_i(\eta) \quad (\text{B.1})$$

によって書き直せる. (B.1) 式を変形すれば, (31) 式を得る.

〔著 者 紹 介〕

小 島 千 昭 (学生会員)

2002 年京都大学理学部理学科数理学系卒業. 2004 年同大学大学院情報学研究科数理工学専攻修士課程修了. 同年同博士後期課程に進学, 現在に至る. ビヘイビアアプローチによるシステム理論の研究に従事. システム制御情報学会の会員.

鷹 羽 浄 嗣 (正会員)

1989 年京都大学工学部数理工学科卒業. 91 年同大学大学院応用システム科学専攻修士課程修了. 同年同大学工学部数理工学科助手. 98 年同大学大学院情報学研究科数理工学専攻助教授, 現在に至る. 博士 (工学). ロバスト制御, 最適制御の研究に従事. システム制御情報学会および IEEE の各会員.